Getal & Ruimte

vwo

complexe getallen

J. v.d. Meer
H. v. Tilburg

Uitwerkingen

Hoofdstuk 1 Complexe getallen

1.1 Nieuwe getallen

1)

a) $(2+5i)+(4-6i)=6-i$

b) $(5-i)(5+i)=25+5i-5i+1=26$

c) $(1+i)^2=(1+i)(1+i)=1+i+i-1=2i$

d) $i(6+7i)=6i-7$

e) $i^5=i^2 i^2 i=-1\cdot -1\cdot i=i$

f) $(1+i)(6-i)+(3-i)=6-i+6i+1+3-i=10+4i$

2)

a) $\dfrac{5+5i}{1-i}=\dfrac{5+5i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{(5+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{5+5i+5i-5}{1+i-i+1}=\dfrac{10i}{2}=5i$

b) $\dfrac{3+i}{2-i}=\dfrac{3+i}{2-i}\cdot\dfrac{2+i}{2+i}=\dfrac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+3i+2i-1}{4+2i-2i+1}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

c) $\dfrac{i}{3+4i}=\dfrac{i}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i}=\dfrac{i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{3i+4}{9-12i+12i+16}=\dfrac{4+3i}{25}=\tfrac{4}{24}+\tfrac{3}{25}i$

d) $\dfrac{5+2i}{i}=\dfrac{5+2i}{i}\cdot\dfrac{-i}{-i}=\dfrac{(5+2i)\cdot -i}{i\cdot -i}=\dfrac{-5i+2}{1}=-5i+2=2-5i$

3)

a) $\ln(-2)\approx 0{,}69+3{,}14i$ $(=\ln 2+\pi i)$

b) $2^i\approx 0{,}77+0{,}64i$

c) $e^{\pi i}=-1$

d) $\sqrt[3]{8i}\approx 1{,}73+i$ $(=\sqrt{3}+i)$

4)

a) $z=a+bi$ en $\bar{z}=a-bi$

$\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{a+bi+a-bi}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$, en dit is het reële deel van z.

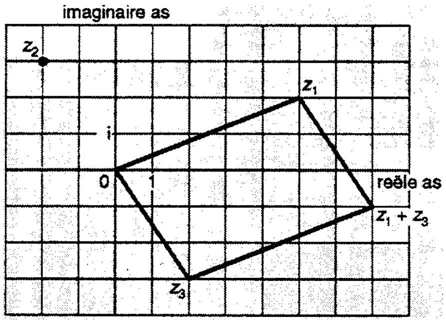
$\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\dfrac{a+bi-a+bi}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b$, en dit is het imaginaire deel van z.

b) $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-abi+abi+b^2=a^2+b^2$

1.2 Het complexe vlak

5)

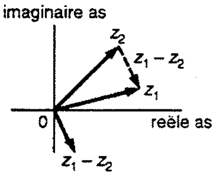
a)



b) zie a)

c) Ja, want $z_1 + z_3 = z_1 + -z_2 = z_1 - z_2$.

d) Ja, gebruik de kop-staart-methode.



6)

a) $|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(2+2i) = 45°$

b) $|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(-2+2i) = 135°$

c) $|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(2-2i) = -45°$

d) $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\text{Arg}(3+4i) = 53{,}1°$

e) $|10i| = \sqrt{0^2+10^2} = \sqrt{100} = 10$

$\text{Arg}(10i) = 90°$

f) $|-10| = \sqrt{(-10)^2+0^2} = \sqrt{100} = 10$

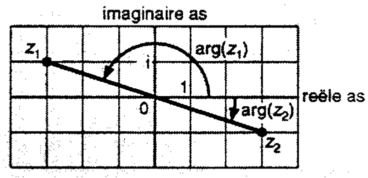
$\text{Arg}(-10) = 180°$

7)

a) $z_1 = -3 + i :\ \varphi = \tan^{-1}(\frac{1}{-3}) \approx -18{,}4°$

$z_2 = 3 - i :\ \varphi = \tan^{-1}(\frac{-1}{3}) \approx -18{,}4°$

b)



$\arg(z_1) \approx 161{,}6°$

$\arg(z_2) \approx -18{,}4°$

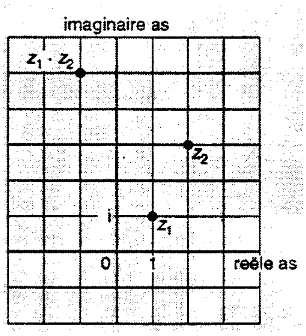
c) Natuurlijk niet!

8)

a) $z_1 = 1 + i$ en $z_2 = 2 + 3i$

$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (1+i)(2+3i) = 2 + 3i + 2i - 3 = -1 + 5i$

b)



$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26}$

c) $\arg(z_1) = 45°$

$\arg(z_2) = 56{,}3°$

$\arg(z_3) = 101{,}3°$

$45° + 56{,}3° = 101{,}3°$

d) De verbanden blijven kloppen, dus:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

9)

De getallen zijn elkaars geconjungeerde.

10)
De getallen hebben hetzelfde argument.

11)
Te bewijzen: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.
Bewijs: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

12)
a) Te bewijzen: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ met $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$.
Bewijs:
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{a + bi} \cdot \overline{c + di} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci - bd = (ac - bd) - (ad + bc)i$
b) Te bewijzen: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ met $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$.
Bewijs:
$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})} = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \sqrt{(z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2})} = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \cdot \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$

13) $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ en $z = z_1 \cdot z_2$
$\varphi_1 = \arg(z_1)$ en $\varphi_2 = \arg(z_2)$ en $\varphi = \arg(z)$
Te bewijzen: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

a) $\sin\varphi_1 = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\varphi_1 = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sin\varphi_2 = \dfrac{d}{|z_2|} = \dfrac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

$\cos\varphi_2 = \dfrac{c}{|z_2|} = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

b) $z = z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\tan\varphi = \dfrac{ad + bc}{ac - bd}$

c) $\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \dfrac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} = \dfrac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}$

d) $\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} + \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} - \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}} = \dfrac{bc + ad}{ac - bd}$

$\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \tan\varphi$
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$
dus $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

14)

a) $\text{Arg}(1+i) = 45°$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

b) $\arg((1+i)^4) = 4 \cdot 45° = 180°$

$|(1+i)^4| = (\sqrt{2})^4 = 4$

c) Het getal –4 heeft als hoofdargument ook $180°$ en de lengte van de bijbehorende vector is ook 4.

d) $\text{Arg}(1-i) = -45°$

$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg((1-i)^6) = 6 \cdot -45° = -270°$ en $\text{Arg}((1-i)^6) = 90°$

$|(1-i)^6| = (\sqrt{2})^6 = 8$

dus $(1-i)^6 = 8i$

15)

a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

b) $\arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

16)

a) $\arg(-2+i) \approx 153{,}43°$

$\text{Arg}((-2+i)^{10}) \approx 10 \cdot 153{,}43° \bmod 360° \approx 94{,}3°$

b) $\arg(2+3i) \approx 56{,}31°$

$\arg(-1+6i) \approx 99{,}46°$

$\text{Arg}(\dfrac{2+3i}{(-1+6i)^2}) \approx 56{,}31° - 2 \cdot 99{,}46° \bmod 360° \approx -142{,}6°$

c) $\arg(i) = 90°$

$\text{Arg}(i^5) = 5 \cdot 90° \bmod 360° = 90°$

d) $\arg(2-2i) = -45°$

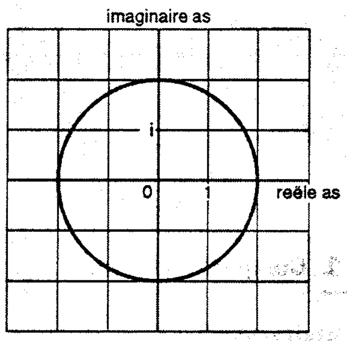
$\text{Arg}((2-2i)^6) = 6 \cdot -45° \bmod 360° = 90°$

17)

a) $z\overline{z} = 4$

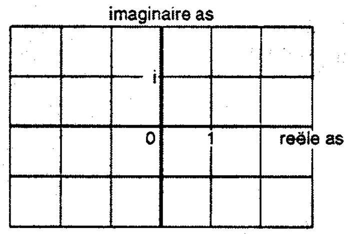
Je weet: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$, dus $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

De getallen z zijn in het complexe vlak de punten die op een cirkel liggen met middelpunt O en straal 2.



b) $z + \overline{z} = 0$

Als $z = a + bi$ en $\overline{z} = a - bi$, dan is $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 0$, dus $a = 0$.
Je krijgt dus $z = a + bi = 0 + bi = bi$, en dit zijn alle punten op de imaginaire as.



c)

Als $z = a + bi$ en $\overline{z} = a - bi$, dan is $|z - \overline{z}| = |a + bi - (a - bi)| = |a + bi - a + bi| = |2bi| < 1$.

Dus:

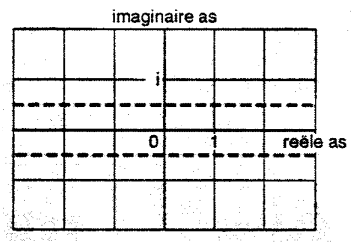
$2|bi| < 1$

$|bi| < \frac{1}{2}$

$|b| \cdot |i| < \frac{1}{2}$

$|b| < \frac{1}{2}$

Dit zijn de punten die minder dan $\frac{1}{2}$ van de reële as afliggen.



1.3 Poolcoördinaten

18)

Te bewijzen: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ met $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Bewijs:

a) voor $n = 1$ klopt de formule, want $z^1 = r^1(\cos 1\varphi + i\sin 1\varphi)$

b) stel voor $n = k$ klopt de formule, dus $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$

c) voor $n = k+1$ krijgen we:

$z^{k+1} = z^k \cdot z^1 = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^k \cdot r(\cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi))$

(volgt uit $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg\big(z_1 \cdot z_2\big) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$)

$z^{k+1} = r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi))$

d) Door middel van volledige inductie is nu bewezen dat $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ en dus dat $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ en dit geeft $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ (formule van de Moivre).

19)

a) $6 = 6(\cos 0° + i\sin 0°)$

b) $10i = 10(\cos 90° + i\sin 90°)$

c) $5 + 5i = \sqrt{50}(\cos 45° + i\sin 45°) = 5\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

d) $-5 + 5i = \sqrt{50}(\cos 135° + i\sin 135°) = 5\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$

e) $5 - 5i = \sqrt{50}(\cos(-45°) + i\sin(-45°)) = 5\sqrt{2}(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$

f) $2 - i = \sqrt{5}(\cos(-26{,}6°) + i\sin(-26{,}6)°)$

$(2-i)^4 = (\sqrt{5})^4(\cos(4\cdot -26{,}6°) + i\sin(4\cdot -26{,}6)°) = 25(\cos(-106{,}3°) + i\sin(-106{,}3)°)$

20)

a) $2 + i = \sqrt{5}(\cos 0{,}46 + i\sin 0{,}46)$

$(2+i)^3 = (\sqrt{5})^3(\cos 3\cdot 0{,}46 + i\sin 3\cdot 0{,}46) = 5\sqrt{5}(\cos 1{,}39 + i\sin 1{,}39)$

b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{1}{4}\pi + i\sin\tfrac{1}{4}\pi)$

$(1+i)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi) = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{1}{8}\pi + i\sin\tfrac{1}{8}\pi)$

c) $-2 + 4i = \sqrt{20}(\cos 2{,}03 + i\sin 2{,}03)$

$\sqrt{-2+4i} = (-2+4i)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{20})^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}03 + i\sin\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}03) = \sqrt[4]{20}(\cos 1{,}02 + i\sin 1{,}02)$

d) $2 - i = \sqrt{5}(\cos(-0{,}46) + i\sin(-0{,}46))$

$\dfrac{1}{(2-i)^2} = (2-i)^{-2} = (\sqrt{5})^{-2}(\cos(-2\cdot -0{,}46) + i\sin(-2\cdot -0{,}46)) = \tfrac{1}{5}(\cos 0{,}93 + i\sin 0{,}93)$

e) $-2 + 2i = \sqrt{8}(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{3}{4}\pi)$

$\sqrt[3]{-2+2i} = (-2+2i)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}}(\cos\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}(\cos\tfrac{1}{4}\pi + i\sin\tfrac{1}{4}\pi)$

21)

a) $(\cos x + i\sin x)^3 = (\cos x + i\sin x)^2(\cos x + i\sin x) = (\cos^2 x + 2i\sin x\cos x - \sin^2 x)(\cos x + i\sin x)$

$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + i\sin x\cos^2 x + 2i\sin x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos x - \sin^2 x\cos x - i\sin^3 x$

$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\sin x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos x - i\sin^3 x$

b) $\cos 3x + i\sin 3x = \cos^3 x + 3i\sin x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos x - i\sin^3 x$

Kijkend naar het reëele deel krijg je: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$.

Kijkend naar het imaginaire deel krijg je: $\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$.

c) $(\cos x + i\sin x)^4 = (\cos x + i\sin x)^3(\cos x + i\sin x)$

$(\cos x + i\sin x)^4 = (\cos^3 x + 3i\sin x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos x - i\sin^3 x)(\cos x + i\sin x)$

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + i\sin x\cos^3 x + 3i\sin x\cos^3 x - 3\sin^2 x\cos^2 x \\ - 3\sin^2 x\cos^2 x - 3i\sin^3 x\cos x - i\sin^3 x\cos x + \sin^4 x$$

$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\sin x\cos^3 x - 6\sin^2 x\cos^2 x - 4i\sin^3 x\cos x + \sin^4 x$

Omdat ook $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$ krijg je:

Kijkend naar het reëele deel: $\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2\cos^2 x + \sin^4 x$.

Kijkend naar het imaginaire deel: $\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x$.

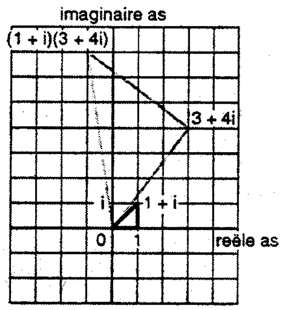
22)

De rotatiehoek is het hoofdargument van $z_2 = 2 + 1{,}5i$, $\text{Arg}(2 + 1{,}5i) = 0{,}64$ rad.

De vermenigvuldigingsfactor is de lengte van z_2, $|2 + 1{,}5i| = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$.

23)

Het product van $1 + i$ en $3 + 4i$.



De hoek bij 0 in de driehoek met hoekpunten 0, $3 + 4i$ en $(1 + i)(3 + 4i)$ is gelijk aan de hoofdwaarde van het argument van $1 + i$.

De vermenigvuldigingsfactor is de lengte van $3 + 4i$, en dat is 5.

24)

Het quotiënt $\dfrac{z_1}{z_2}$ met $\text{Arg}(z_1) > \text{Arg}(z_2) > 0$.

Je krijgt dan een verkleining van de groene driehoek uit fig. 1.10 uit het boek.

1.4 Vergelijkingen oplossen

25)

a) $3z + 5i = 2iz + 2$

$3z - 2iz = 2 - 5i$

$z(3-2i) = 2 - 5i$

$z = \frac{2-5i}{3-2i} = \frac{2-5i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(2-5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i-15i+10}{9+6i-6i+4} = \frac{16-11i}{13} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i$

b) $\frac{z-1}{z+i} = 2$

$z - 1 = 2(z+i)$

$z - 1 = 2z + 2i$

$-z = 1 + 2i$

$z = -1 - 2i$

c) $(z+i)(z-i) = 0$

$z + i = 0 \vee z - i = 0$

$z = -i \vee z = i$

d) $(z+i)(z-i) = 10$

$z^2 - zi + zi + 1 = 10$

$z^2 = 9$

$z = -3 \vee z = 3$

e) $z \cdot \bar{z} = 16$

Alle getallen op cirkel met middelpunt O en straal 4.

26)

a) $z^2 + 6z + 10 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$

$z = \frac{-6-\sqrt{-4}}{2} \vee z = \frac{-6+\sqrt{-4}}{2}$

$z = \frac{-6-2i}{2} \vee z = \frac{-6+2i}{2}$

$z = -3 - i \vee z = -3 + i$

b) $z^4 = -16$

$\arg(z^4) = \arg(-16)$ en $|z^4| = |-16|$

$4 \cdot \arg(z) = \pi + k \cdot 2\pi$ en $|z|^4 = 16$

$\arg(z) = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ en $|z| = 2$

$z = 2(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi) \vee z = 2(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi)$

$\vee z = 2(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi) \vee z = 2(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$

$z = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}) \vee z = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}) \vee z = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}) \vee z = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2})$

$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \vee z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \vee z = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \vee z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) $z^4 + 9z^2 = 0$

$z^2(z^2 + 9) = 0$

$z^2 = 0 \vee z^2 + 9 = 0$

$z = 0 \vee z^2 = -9$

$z = 0 \vee z = 3i \vee z = -3i$

d) $z^4 = -16i$

$\arg(z^4) = \arg(-16i)$ en $|z^4| = |-16i|$

$4 \cdot \arg(z) = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en $|z|^4 = 16$

$\arg(z) = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ en $|z| = 2$

$z = 2(\cos(-\frac{5}{8}\pi) + i\sin(-\frac{5}{8}\pi)) \vee z = 2(\cos(-\frac{1}{8}\pi) + i\sin(-\frac{1}{8}\pi))$

$\vee z = 2(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi) \vee z = 2(\cos\frac{7}{8}\pi + i\sin\frac{7}{8}\pi)$

e) $z^3 = -1$

$\arg(z^3) = \arg(-1)$ en $|z^3| = |-1|$

$3 \cdot \arg(z) = \pi + k \cdot 2\pi$ en $|z|^3 = 1$

$\arg(z) = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ en $|z| = 1$

$z = 1(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi) \vee z = 1(\cos\pi + i\sin\pi) \vee z = 1(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$

$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = -1 \vee z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

f) $(z-1)^4 = -i$

$\arg((z-1)^4) = \arg(-i)$ en $|(z-1)^4| = |-i|$

$4 \cdot \arg(z-1) = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en $|z-1|^4 = 1$

$\arg(z-1) = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ en $|\mathrm{z\text{-}1}| = 1$

$z - 1 = 1(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi) \vee z - 1 = 1(\cos\frac{7}{8}\pi + i\sin\frac{7}{8}\pi)$

$\vee z - 1 = 1(\cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi) \vee z - 1 = 1(\cos\frac{15}{8}\pi + i\sin\frac{15}{8}\pi)$

$z = 1 + \cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi \vee z = 1 + \cos\frac{7}{8}\pi + i\sin\frac{7}{8}\pi$

$\vee z = 1 + \cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi \vee z = 1 + \cos\frac{15}{8}\pi + i\sin\frac{15}{8}\pi$

1.5 Complexe functies

27)

a) Neem $z = c + di$.

$f(z) = f(c+di) = c + di + a + bi = (a+c) + (b+d)i$

Het punt is dus getransleerd over (a, b)

b) $f(z) = (a+bi)\cdot z$

$|f(z)| = |a+bi|\cdot|z|$ en $\arg(f(z)) = \arg(a+bi) + \arg(z)$

$|f(z)| = 1\cdot|z| = |z|$

Het beeld van *z* ligt dus even ver van *O* af als *z* zelf, dus liggen zowel *z* als $f(z)$ op een cirkel met middelpunt *O*.

Ook wordt *z* over een hoek van $\arg(a+bi)$ geroteerd om *O*.

c) $f(z) = (a+bi)\cdot z$

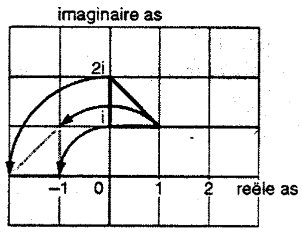
$|f(z)| = |a+bi|\cdot|z|$ en $\arg(f(z)) = \arg(a+bi) + \arg(z)$

Het beeld van *z* ligt dus een factor $|a+bi|$ verder van *O* af als *z* zelf.

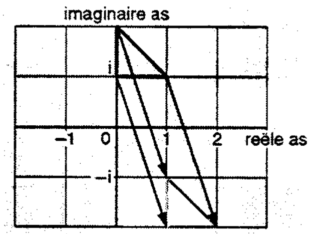
Ook wordt *z* over een hoek van $\arg(a+bi)$ geroteerd om *O*.

28)

a) $f(z) = iz$; $|i| = 1$, dus een rotatie over $\arg(i) = 90°$.

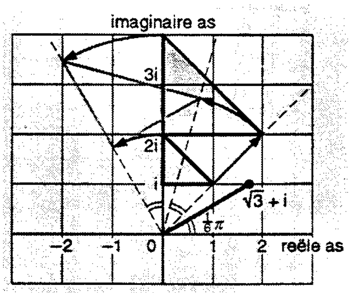


b) $f(z) = z + 1 - 3i$; translatie over $(1,–3)$.



c) $f(z) = (\sqrt{3} + i)z$

$|\sqrt{3} + i| = 2$, dus een vermenigvuldiging ten opzichte van *O* met 2 en een rotatie over $\arg(\sqrt{3} + i) = 30°$.



29)

$f(z) = (a + bi) \cdot z + c + di$

Deze functie bestaat uit een combinatie van een translatie, rotatie en vermenigvuldiging ten opzichte van 0.

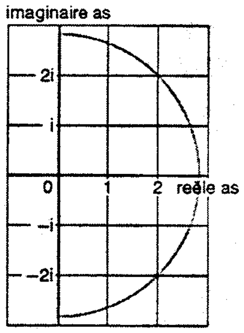
Bij alle drie de transformatie blijft het beeld gelijkvormig met het origineel.

30)

Beeld van de cirkelsector bij de functie $f(z) = z^3$.

Bij deze functie worden alle argumenten verdrievoudigd en de absolute waarden tot de derde macht verheven.

Het beeld van de cirkelsector met straal $\sqrt{2}$ en argument tussen $-30°$ en $30°$ wordt dan een cirkelsector met straal $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ en argument tussen $-90°$ en $90°$.



31)

a) De absolute waarden worden gekwadrateerd, dus de afstand van een punt op de lijn tot *O* wordt niet een bepaalde factor keer zo groot.

b) Lijnen door *O*.

c) $f(2) = 2^2 = 4$

$f(2 + 0{,}5i) = (2 + 0{,}5i)^2 = 4 + 2i - 0{,}25 = 3{,}75 + 2i$

$f(2 + i) = (2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$

$f(2 + 1{,}5i) = (2 + 1{,}5i)^2 = 4 + 6i - 2{,}25 = 1{,}75 + 6i$

$f(2 + 2i) = (2 + 2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$

$f(2 - 0{,}5i) = (2 - 0{,}5i)^2 = 4 - 2i - 0{,}25 = 3{,}75 - 2i$

$f(2 - i) = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$

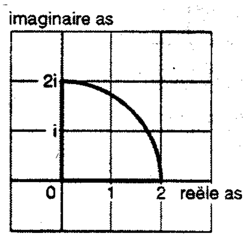
$f(2 - 1{,}5i) = (2 - 1{,}5i)^2 = 4 - 6i - 2{,}25 = 1{,}75 - 6i$

$f(2 - 2i) = (2 - 2i)^2 = 4 - 8i - 4 = -8i$

Wanneer je de beeldpunten tekent in het complexe vlak zul je zien dat de beeldgrafiek van de lijn een parabool is met top 4 en snijpunten met de imaginaire as $-8i$ en $8i$.

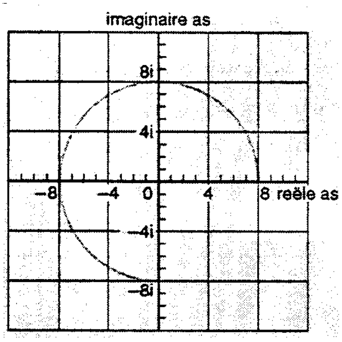
32)

a) Dit is een cirkelsector met straal 2 en argument tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.



b) $f(z) = z^3$

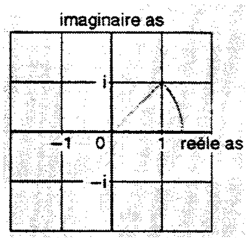
Argumenten worden 3 keer zo groot en absolute waarden tot de macht 3 verheven.
Dus het beeld is een cirkelsector met straal $2^3 = 8$ en argument tussen 0 en $\frac{3}{2}\pi$.



c) $f(z) = \sqrt{z}$

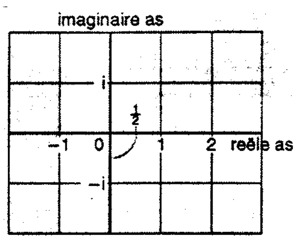
Argumenten worden $\frac{1}{2}$ keer zo groot en absolute waarden tot de macht $\frac{1}{2}$ verheven.

Dus het beeld is een cirkelsector met straal $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ en argument tussen 0 en $\frac{1}{4}\pi$.



d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

Argumenten worden –1 keer zo groot en absolute waarden tot de macht –1 verheven.
Dus het beeld is een cirkelsector met straal $2^{-1} = \frac{1}{2}$ en argument tussen 0 en $-\frac{1}{2}\pi$.



33)

a) $f(z) = \overline{(\frac{1}{z})}$.

Neem $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dan is:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{1(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

En $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dus $\arg(\overline{\frac{1}{z}}) = \varphi = \arg(z)$.

De getallen z, 0 en $\overline{(\frac{1}{z})}$ liggen dus op één rechte lijn.

b) Cirkel met middelpunt O en straal $\frac{1}{2}$.

34)

$$f(z) = \frac{z}{1-i} = \frac{z}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{z(1+i)}{1+i-i+1} = \frac{z(1+i)}{2} = \frac{1+i}{2} \cdot z = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i) \cdot z$$

Bij deze functie hoort de vermenigvuldiging ten opzichte van O met factor $\left|\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ gecombineerd met een rotatie over $\arg(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i) = 45°$.

Een rotatie verandert niets aan de oppervlakte van een figuur, dus kijken we alleen naar de vermenigvuldiging met factor $\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

De vergrotingsfactor $k = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ houdt in dat de lengtes k keer zo groot worden en de oppervlakte $k^2 = \tfrac{1}{2}$ keer zo groot.

De oppervlakte van V was dus $\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$.

1.6 De formule van Euler

35)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$[\sin x]' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots$$

$$[\sin x]' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$[\cos x]' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \ldots$$

$$[\cos x]' = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

36)

Volgens Euler is $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi} = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

37)

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

a) $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

b) $e^{-i} = \cos(-1) + i\sin(-1)$

c) $e^{7\pi i} = \cos 7\pi + i\sin 7\pi = -1$

38)

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$

a) $|-5| = 5$ en $\arg(-5) = \pi$

Dus $-5 = 5 \cdot e^{\pi i}$.

b) $|1+i| = \sqrt{2}$ en $\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$

Dus $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

c) $\left|\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right| = 1$ en $\arg(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{6}\pi$

Dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = 1 \cdot e^{\frac{1}{6}\pi i} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$.

39)

Te bewijzen: $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.

Bewijs:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{i\cdot-\varphi} = e^{-i\varphi}$

40)

a) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

Optellen van deze twee levert:

$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$

Dus $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

b) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

Aftrekken van deze twee levert:

$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$

$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -\frac{1}{2}i(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$

Dus $\sin x = -\frac{1}{2}i(e^{ix} - e^{-ix})$.

1.7 De functie $f(z) = e^z$

41)

a) $|1+i| = \sqrt{2}$ en $\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$

Dus $1+i = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}i}$.

b) $|-5+7i| = \sqrt{74}$ en $\arg(-5+7i) = 2{,}191$

Dus $-5+7i = \sqrt{74}\cdot e^{2{,}191i}$.

c) $|10-3i| = \sqrt{109}$ en $\arg(10-3i) = -0{,}291$

Dus $10-3i = \sqrt{109}\cdot e^{2{,}191\pi}$.

d) $|12+5i| = \sqrt{169} = 13$ en $\arg(12+5i) = 0{,}395$

Dus $12+5i = 13\cdot e^{0{,}395i}$.

e) $|\cos 1 + i\sin 1| = 1$ en $\arg(\cos 1 + i\sin 1) = 1$

Dus $\cos 1 + i\sin 1 = 1\cdot e^{1\cdot i} = e^{i}$.

f) $\sqrt{2+2i} = (2+2i)^{\frac{1}{2}}$

$|2+2i| = \sqrt{8}$ en $\arg(2+2i) = \frac{1}{4}\pi$

Dus $2+2i = \sqrt{8}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

En $\sqrt{2+2i} = (\sqrt{8}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{8}e^{\frac{1}{8}\pi}$.

42)

a) $|i| = 1$ en $\arg(i) = \frac{1}{2}\pi$, dus $i = 1\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} = e^{\frac{1}{2}\pi i}$.

Dus $i\cdot e^{i\varphi} = e^{\frac{1}{2}\pi i}\cdot e^{i\varphi} = e^{\frac{1}{2}\pi i + i\varphi} = e^{i(\varphi+\frac{1}{2}\pi)}$.

b) $|2i| = 2$ en $\arg(2i) = \frac{1}{2}\pi$, dus $2i = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i}$.

Dus $2i\cdot e^{i\varphi} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i}\cdot e^{i\varphi} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i + i\varphi} = 2\cdot e^{i(\varphi+\frac{1}{2}\pi)}$.

c) $|-3| = 3$ en $\arg(-3) = \pi$, dus $-3 = 3\cdot e^{\pi i}$.

Dus $-3\cdot e^{i\varphi} = 3\cdot e^{\pi i}\cdot e^{i\varphi} = 3\cdot e^{\pi i + i\varphi} = 3\cdot e^{i(\varphi+\pi)}$.

d) $|-4i| = 4$ en $\arg(-4i) = -\frac{1}{2}\pi$, dus $-4i = 4\cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i}$.

Dus $-4i\cdot e^{i\varphi} = 4\cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i}\cdot e^{i\varphi} = 4\cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i + i\varphi} = 4\cdot e^{i(\varphi-\frac{1}{2}\pi)}$.

e) $|1+i| = \sqrt{2}$ en $\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$, dus $1+i = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

Dus $(1+i)\cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}\cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i + i\varphi} = \sqrt{2}\cdot e^{i(\varphi+\frac{1}{4}\pi)}$.

43)

a) $\frac{d}{dt} e^{i\pi t} = i\pi e^{i\pi t}$

b) $\frac{d}{dt} e^{(5+6i)t} = (5+6i)e^{(5+6i)t}$

c) $\frac{d}{dt} e^{-2it} = -2ie^{-2it}$

d) $\frac{d}{dt}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t} - i\omega e^{-i\omega t}$

44)

a) Te bewijzen: $f(z) = f(z+2\pi i)$ als $f(z) = e^z$.
Bewijs:
$f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \cdot (1+0) = e^z = f(z)$.

b) Voor een periodieke functie $f(x)$ met periode t geldt: $f(x) = f(x+t)$.
Dit geldt ook voor $f(z)$ en de periode is $2\pi i$.

1.8 De functie $f(z) = \ln z$

45)

Te bewijzen: $\ln i = \frac{1}{2}\pi i$.

Bewijs:

$e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi = i$

Dus $\ln i = \frac{1}{2}\pi i$

46)

a) $\ln(-e) = 1 + \pi i$

b) $\ln(-e^2) = 2 + \pi i$

c) $\ln(ei) = \ln e + \ln i = 1 + \frac{1}{2}\pi i$

d) $\ln(-2i) = \ln(-2) + \ln i = \ln 2 + \pi i + \frac{1}{2}\pi i = \ln 2 + \frac{3}{2}\pi i$

e) $\ln(-3) = \ln 3 + \pi i$

f) $\ln(3i) = \ln 3 + \ln i = \ln 3 + \frac{1}{2}\pi i$

47)

a) $\ln(1+i) = 0{,}347 + 0{,}785i$

b) $\ln(6i) = 1{,}792 + 1{,}571i$

c) $\ln(-10+5i) = 2{,}414 + 2{,}678i$

d) $\ln 0 =$ niet mogelijk

48)

a) Te bewijzen: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Bewijs:

beide leden zetten we als exponent boven het grondtal e:

linkerlid: $e^{\ln\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$

rechterlid: $e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$

De machten zijn gelijk, dus zijn ook de exponenten gelijk.

b) Te bewijzen: $\ln a^n = n\ln a$.

Bewijs:

beide leden zetten we als exponent boven het grondtal e:

linkerlid: $e^{\ln a^n} = a^n$

rechterlid: $e^{n\ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$

De machten zijn gelijk, dus zijn ook de exponenten gelijk.

49)

L lijnstuk met eindpunten $z_1 = 1 + 2i$ en $z_2 = 1 - 2i$.

a) Het beeld $f(L)$ van L, met $f(z) = \ln z$.

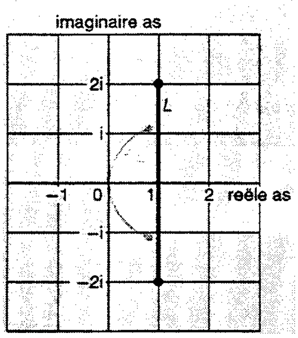
$\ln(z_1) = \ln(1 + 2i) \approx 0{,}80 + 1{,}11i$

$\ln(z_2) = \ln(1 - 2i) \approx 0{,}80 - 1{,}11i$

$\ln(1 + i) \approx 0{,}35 + 0{,}79i$

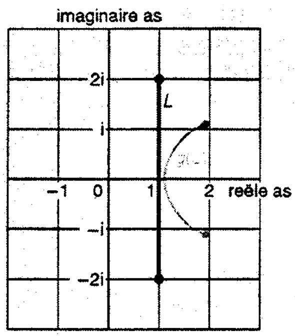
$\ln(1 - i) \approx 0{,}35 - 0{,}79i$

$\ln 1 = 0$



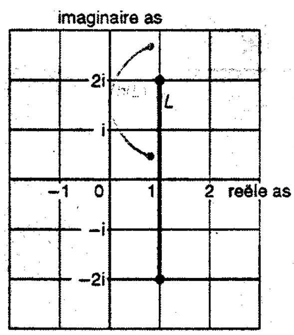
b) Het beeld $g(L)$ van L, met $g(z) = \ln 3z = \ln 3 + \ln z$.

Je neemt het beeld $f(L)$ en schuift het $\ln 3 \approx 1{,}10$ naar rechts.



c) Het beeld $h(L)$ van L, met $h(z) = \ln iz = \ln i + \ln z$.

Je neemt het beeld $f(L)$ en schuift het $\ln i \approx 1{,}57i$ naar boven.



d)

50)

a) $i^i = e^{\ln i^i} = e^{i \ln i} = (e^i)^{\ln i} = (e^i)^{\frac{1}{2}\pi i} = e^{\frac{1}{2}\pi i^2} = e^{-\frac{1}{2}\pi}$

b) $i^{2i} = e^{\ln i^{2i}} = e^{2i \ln i} = (e^{2i})^{\ln i} = (e^{2i})^{\frac{1}{2}\pi i} = e^{\pi i^2} = e^{-\pi}$

$i^{(1+i)} = i^1 \cdot i^i = i \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi} = ie^{-\frac{1}{2}\pi}$

Hoofdstuk 2 Toepassingen van complexe getallen

2.2 Tweede- en derdegraadsvergelijkingen

14)

a) $x_T = \frac{-b}{2a}$

$y_T = f(x_T) = f(\frac{-b}{2a})$

$= a \cdot (\frac{-b}{2a})^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

b) Als $x = x_T + i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}$ en $x = x_T - i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}$ nulpunten zijn van $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan moet $ax^2 + bx + c$ te ontbinden zijn in $a(x - (x_T + i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}))(x - (x_T - i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}))$.

Haakjes wegwerken geeft:

$a(x - (x_T + i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}))(x - (x_T - i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}}))$

$= a(x - x_T - i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}})(x - x_T + i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}})$

$= a((x - x_T)^2 - (i \cdot \sqrt{\frac{y_T}{a}})^2)$

$= a(x^2 - 2xx_T + x_T^2 - -1\frac{y_T}{a})$

$= a(x^2 - 2x \cdot -\frac{b}{2a} + (-\frac{b}{2a})^2 + \frac{-\frac{b^2 - 4ac}{4a}}{a}$

$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$

$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$

$= ax^2 + bx + c$

Dus $f(x) = ax^2 + bx + c$ geeft de hierboven genoteerde ontbinding, en dit geeft dan de gevraagde nulpunten.

c) $AB = x_B - x_A$

$x_A = x_T = \dfrac{-b}{2a}$

x_B is de oplossing van $f(x) = 2y_T$:

$ax^2 + bx + c = 2y_T$

$ax^2 + bx + c - 2y_T = 0$

$D = b^2 - 4\cdot a\cdot(c - 2y_T) = b^2 - 4ac + 8ay_T$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a}$$

Dus $x_B = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a}$.

$$AB = x_B - x_A = x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a} - x_T = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a} - \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T} + b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_T}}{\sqrt{4a^2}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac + 8ay_T}{4a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} + \frac{8ay_T}{4a^2}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}\cdot\frac{1}{a} + \frac{8ay_T}{4a^2}} = \sqrt{-y_T\cdot\frac{1}{a} + \frac{8ay_T}{4a^2}} = \sqrt{\frac{-y_T}{a} + \frac{2y_T}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{-y_T + 2y_T}{a}} = \sqrt{\frac{y_T}{a}}$$

NB: in de uitwerking is de stap van $2a$ naar $\sqrt{4a^2}$ gemaakt. Dit kan echter alleen als $a > 0$. Als in de functie *f* *a* kleiner is dan nul, dan kun je de functie *f* met -1 vermenigvuldigen zodat *a* groter dan nul wordt.

d) Aangezien $x = x_T + i\cdot\sqrt{\dfrac{y_T}{a}}$ en $x = x_T - i\cdot\sqrt{\dfrac{y_T}{a}}$ nulpunten van *f* zijn, *q* de lengte van het lijnstuk *AB* (en dus gelijk is aan $\sqrt{\dfrac{y_T}{a}}$) is en *p* de *x*-coördinaat van *T*, zijn $x = p + iq$ en $x = p - iq$ de nulpunten van *f*.

15)

De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ heeft als $x_T = \dfrac{-b}{2a}$ en $y_T = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ (zie opgave 14).

Volgens de *abc*-formule zijn de nulpunten te geven door $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en

$x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Deze oplossingen gaan we omschrijven.

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot \frac{1}{a}}$$

$$= x_T - \sqrt{-y_T \cdot \frac{1}{a}} = x_T - \sqrt{\frac{-y_T}{a}}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot \frac{1}{a}}$$

$$= x_T + \sqrt{-y_T \cdot \frac{1}{a}} = x_T + \sqrt{\frac{-y_T}{a}} = x_T \sqrt{\frac{-y_T}{a}}$$

NB: ook hier gaan we er van uit dat *a* positief is, wanneer je dezelfde uitwerking zou maken met een negatieve *a*, dan rolt het tweede nulpunt er als eerste uit, en het eerste als tweede.

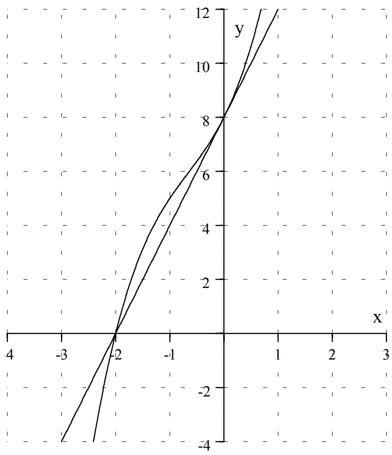
16)

a) Aflezen uit de grafiek geeft $p = 2\ (= x_T)$ en $q = 1$ (lengte van het halve lijnstuk dat ontstaat door de lijn $y = 2\ (= 2y_T)$ te snijden met de grafiek van *f*).
   Dit geeft als oplossingen van de vergelijking $x^2 - 4x + 5$: $x = 2 + i \vee x = 2 - i$.

b) $x = 2 + i$ geeft $y = (2+i)^2 - 4(2+i) + 5 = 4 + 4i - 1 - 8 - 4i + 5 = 0$
   $x = 2 - i$ geeft $y = (2-i)^2 - 4(2-i) + 5 = 4 - 4i - 1 - 8 + 4i + 5 = 0$

17)

a) Grafiek van *f* tekenen, snijpunt met de *x*-as is $S(-2,0)$.

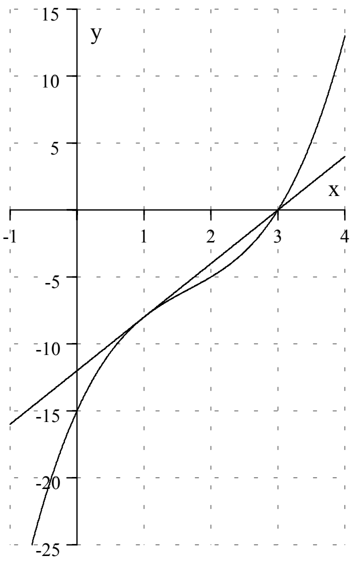


Door *S* de raaklijn aan de grafiek tekenen, deze heeft richtingscoëfficiënt 4 en raakt de grafiek in $R(0,8)$.

Dus $x_R = 0$ en $m = 4$.

Dit geeft als oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$: $x = -2 \vee x = 2i \vee x = -2i$.

b) Grafiek van *f* tekenen, snijpunt met de *x*-as is $S(3,0)$.



Door *S* de raaklijn aan de grafiek tekenen, deze heeft richtingscoëfficiënt 4 en raakt de grafiek in $R(1,-8)$.

Dus $x_R = 1$ en $m = 4$.

Dit geeft als oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$: $x = 3 \vee x = 1+2i \vee x = 1-2i$.

18)

a) Voer een staartdeling uit zodat je kunt laten zien dat $\dfrac{f(x)}{x - x_S} = x^2 + px + q$, met $p = x_S + a$ en $q = x_S^2 + ax_S + b$.

$x - x_S \,/\, x^3 + ax^2 + bx + c \,\backslash\, x^2 + ax + x_S x + ax_S + b + x_S^2$

$\text{x}^3 - x_S x^2$

$ax^2 + x_S x^2$

$ax^2 - ax_S x$

$x_s x^2 + ax_S x + bx$

$x_s x^s - x_S^2 x$

$ax_S x + bx + x_S^2 x$

$ax_S x - ax_S^2$

$bx + x_S^2 x + ax_S^2 + c$

$bx - bx_S$

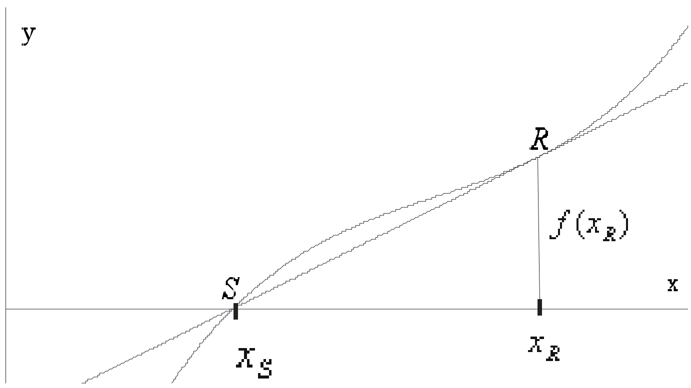
$\text{x}_S^2 x + ax_S^2 + c + bx_S$

$x_S^2 x - x_S^3$

$x_S^3 + ax_S^2 + bx_S + c = 0$

Dus $\dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - x_S} = x^2 + ax + x_S x + ax_S + b + x_S^2 = x^2 + (x_S + a)x + (x_S^2 + ax_S + b)$.

b) **LET OP: DE OPGAVE MOET ZIJN:**
Bewijs dat de lijn $y = y_T \cdot (x - x_S)$ de grafiek van $f(x) = (x - x_S)(x^2 + px + q)$ raakt in het punt *R* met $x_R = x_T$. Hierbij is $T(x_T, y_T)$ de top van de parabool $y = x^2 + px + q$.



$f(x) = (x - x_S)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx - x_S \cdot x^2 - px_S \cdot x - qx_S$

$f'(x) = 3x^2 + 2px + q - 2x_S \cdot x - px_S$

$f'(x_R) = 3x_R^2 + 2px_R + q - 2x_S \cdot x_R - px_S$

We gaan x_R uitrekenen:

$$\text{rc}_{RS} = \frac{f(x_R)-0}{x_R - x_S} = f'(x_R)$$

$$\frac{(x_R - x_S)(x_R^2 + px_R + q)}{x_R - x_S} = 3x_R^2 + 2px_R + q - 2x_S \cdot x_R - px_S$$

$$x_R^2 + px_R + q = 3x_R^2 + 2px_R + q - 2x_S \cdot x_R - px_S \quad \text{(want punt } R \neq S\text{)}$$

$$2x_R^2 + px_R - 2x_S \cdot x_R - px_S = 0$$

$$2x_R^2 - 2x_S \cdot x_R = -px_R + px_S$$

$$2x_R(x_R - x_S) = -p(x_R - x_S)$$

$$2x_R = -p$$

$$x_R = -\tfrac{1}{2}p$$

Als we kijken naar de parabool $y = x^2 + px + q$, dan is de x-coördinaat van de top gelijk aan

$x_T = -\dfrac{p}{2} = -\tfrac{1}{2}p = x_R$, en is de y-coördinaat van de top gelijk aan

$$y_T = x_R^2 + px_R + q = (-\tfrac{1}{2}p)^2 + p \cdot -\tfrac{1}{2}p + q = -\tfrac{1}{4}p^2 + q\,.$$

De raaklijn door de punten R en S heeft als formule $y = f'(x_R) \cdot (x - x_S)$.

Nu moeten we nog laten zien dat $f'(x_R) = y_T$.

$$\begin{aligned} f'(x_R) &= f'(-\tfrac{1}{2}p) \\ &= 3 \cdot (-\tfrac{1}{2}p)^2 + 2p \cdot -\tfrac{1}{2}p + q - 2x_S \cdot -\tfrac{1}{2}p - px_S \\ &= 3 \cdot \tfrac{1}{4}p^2 - p^2 + q + px_S - px_S \\ &= -\tfrac{1}{4}p^2 + q \\ &= y_T \end{aligned}$$

19)

a) $x^3 + 6x = 20$ geeft $p = 6$ en $q = 20$ dus $\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \to W$

$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 20 + W} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 20 - W} = 2$

b) $x^3 + 8x = 24$ geeft $p = 8$ en $q = 24$ dus $\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \to W$

$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 24 + W} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 24 - W} = 2$

c) $x^3 - 6x = 4$ geeft $p = -6$ en $q = 4$ dus $\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \to W$

$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 4 + W} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 4 - W} \approx 2{,}7321$

20)

a) $4^3 - 15 \cdot 4 = 64 - 60 = 4$

b) $p = -15$ en $q = 4$ geeft als discrimant $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = \dfrac{4^2}{4} + \dfrac{(-15)^3}{27} = -121$

Dus $W = \sqrt{-121} = 11i$.

Dit geeft $x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 4 + 11i} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 4 - 11i} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 4$.

c) Wortels uit negatieve getallen hadden toen nog geen betekenis.

d) Zelf doen.

e) De discriminant is nul als $\dfrac{q^2}{4} = -\dfrac{p^3}{27}$, ofwel $27q^2 = -4p^3$, dus $q = \pm\sqrt{\dfrac{-4p^3}{27}}$.

Neem als getallenvoorbeeld $p = -3$, dit geeft $q = \pm\sqrt{\dfrac{-4 \cdot (-3)^3}{27}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Als vergelijking nemen we $x^3 - 3x = 2$.

Wanneer de op de rekenmachine invoeren $y_1 = x^3 - 3x$ en $y_2 = 2$, dan zien we dat er drie reële oplossingen zijn, waarvan er twee gelijk zijn.

Voor andere vergelijkingen waarvan de discriminant nul is, zie je dat er steeds drie reële oplossingen zijn, waarvan er minstens twee gelijk zijn.

21)

$x^3 + px = q \ldots(\mathbf{1})$

Sstel $x = u + v$ en $p = -3uv$.

Substitutie in (1) geeft $u^3 + v^3 = q \ldots(\mathbf{2})$

Uit $p = -3uv$ volgt $v = -\dfrac{p}{3u}$.

substitutie in (2) geeft $u^6 - qu^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0 \ldots(\mathbf{3})$

Vergelijking (3) is kwadratisch in u^3.

Een andere oplossing dan in het boek is $u^3 = \dfrac{q - \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} = \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \ldots(\mathbf{4})$

Omdat $u^3 + v^3 = q$ krijg je $v^3 = q - u^3 = \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \ldots(\mathbf{5})$

Uit (4) en (5) volgt nu $x = u + v = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \ldots(\mathbf{6})$

En dit is hetzelfde resultaat als formule (6) uit het boek!

22)

a) $x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$

$5 - \frac{1}{3} \cdot 5^2 \to P$

$-\frac{2}{27} \cdot 5^3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 - 4 \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}} \to W$

$x = -\frac{1}{3} \cdot 5 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + W} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q - W}$

$x = -4$

b) $3x^3 + 11x^2 + 32x - 12 = 0$

$x^3 + \frac{11}{3}x^2 + \frac{32}{3}x - 4 = 0$

$\frac{32}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{11}{3})^2 \to P$

$-\frac{2}{27} \cdot (\frac{11}{3})^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{32}{3} - -4 \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}} \to W$

$x = -\frac{1}{3} \cdot \frac{11}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + W} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q - W}$

$x = \frac{1}{3}$

c) $x^3 + 10x^2 = 2\frac{5}{8}$

$x^3 + 10x^2 - 2\frac{5}{8} = 0$

$0 - \frac{1}{3} \cdot 10^2 \to P$

$-\frac{2}{27} \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 0 - -2\frac{5}{8} \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{P^3}{27}} \to W$

$x = -\frac{1}{3} \cdot 10 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + W} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q - W}$

$x = \frac{1}{2}$

23)

$x = y - \frac{1}{3}a$ substitueren in $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ geeft:

$(y - \frac{1}{3}a)^3 + a(y - \frac{1}{3}a)^2 + b(y - \frac{1}{3}a) + c = 0$

$(y - \frac{1}{3}a)(y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2) + a(y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2) + b(y - \frac{1}{3}a) + c = 0$

$y^3 - \frac{2}{3}ay^2 + \frac{1}{9}a^2y - \frac{1}{3}ay^2 + \frac{2}{9}a^2y - \frac{1}{27}a^3 + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 + by - \frac{1}{3}ab + c = 0$

$y^3 - \frac{1}{3}a^2y + \frac{2}{27}a^3 + by - \frac{1}{3}ab + c = 0$

$y^3 + by - \frac{1}{3}a^2y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$

$y^3 + by - \frac{1}{3}a^2y = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c = 0$

$y^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)y = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c = 0$

24)

$$y^2 + Ty + p + T^2 = 0$$

$$D = T^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p + T^2) = T^2 - 4p - 4T^2 = -3T^2 - 4p$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3T^2 - 4p} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3T^2 + 4p} = i\sqrt{3T^2 + 4p}$$

$$y = \frac{-T + i\sqrt{3T^2 + 4p}}{2} \vee y = \frac{-T - i\sqrt{3T^2 + 4p}}{2}$$

25)

Te bewijzen: $y^3 + py = q$ is te herleiden tot $(y - T)(y^2 + Ty + p + T^2) = 0$ met T de oplossing die te vinden is met behulp van de formule van Cardano, dus $T^3 + pT = q$.

Bewijs:

De vergelijking $y^3 + py = q$ is ook te schrijven als $y^3 + py - q = 0$

Volgens opgave 18 is $y^3 + py - q$ te ontbinden in $(y - T)(y + my + n)$ waarbij T een reële oplossing is van $y^3 + py - q = 0$ en $m = T + 0 = T$ en $n = T^2 + 0 \cdot T + p = T^2 + p$.

Oftewel $y^3 + py - q$ is te ontbinden in $(y - T)(y + Ty + p + T^2)$, waarmee het bewijs geleverd is.

26)

a) $x^3+6x^2=25$

$x^3+6x^2-25=0$

$0-\frac{1}{3}\cdot 6^2 \to P$

$-\frac{2}{27}\cdot 6^3+\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 0--25 \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4}+\dfrac{P^3}{27}} \to W$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q+W}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q-W} \to T$

$x=-\frac{1}{3}\cdot 6+T \vee x=-\frac{1}{3}\cdot 6+\dfrac{-T+i\sqrt{3T^2+4P}}{2}\ x=-\frac{1}{3}\cdot 6+\dfrac{-T-i\sqrt{3T^2+4P}}{2}$

$x\approx 1{,}7913 \vee x=-5 \vee x\approx -2{,}7913$

b) $2x^3+x^2+x-1=0$

$x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^2 \to P$

$-\frac{2}{27}\cdot(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}--\frac{1}{2} \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4}+\dfrac{P^3}{27}} \to W$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q+W}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q-W} \to T$

$x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+T \vee x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\dfrac{-T+i\sqrt{3T^2+4P}}{2}\ x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\dfrac{-T-i\sqrt{3T^2+4P}}{2}$

$x=\frac{1}{2} \vee x\approx -0{,}5+0{,}8660i \vee x\approx -0{,}5-0{,}8660i$

c) $\dfrac{x^3+x^2+x}{x+1}=6$

$x^3+x^2+x=6x+6$

$x^3+x^2-5x-6=0$

$-5-\frac{1}{3}\cdot 1^2 \to P$

$-\frac{2}{27}\cdot 1^3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot -5--6 \to Q$

$\sqrt{\dfrac{Q^2}{4}+\dfrac{P^3}{27}} \to W$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q+W}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q-W} \to T$

$x=-\frac{1}{3}\cdot 1+T \vee x=-\frac{1}{3}\cdot 1+\dfrac{-T+i\sqrt{3T^2+4P}}{2}\ x=-\frac{1}{3}\cdot 1+\dfrac{-T-i\sqrt{3T^2+4P}}{2}$

$x\approx 2{,}3028 \vee x=-2 \vee x\approx -1{,}3028$