HOGESCHOOL ROTTERDAM

Cluster: RIBACS

Aantekeningen bij

Toegepaste Wiskunde II

voor Bouwkunde & Civiele Techniek

INHOUDSOPGAVE.

1 Verband tussen belasting, dwarskracht V en moment M.

Module 2 (Basisboek Toegepaste Mechanica van Welleman)
4. WISKUNDIGE ACHTERGRONDEN (blz. 101 t/m 115).

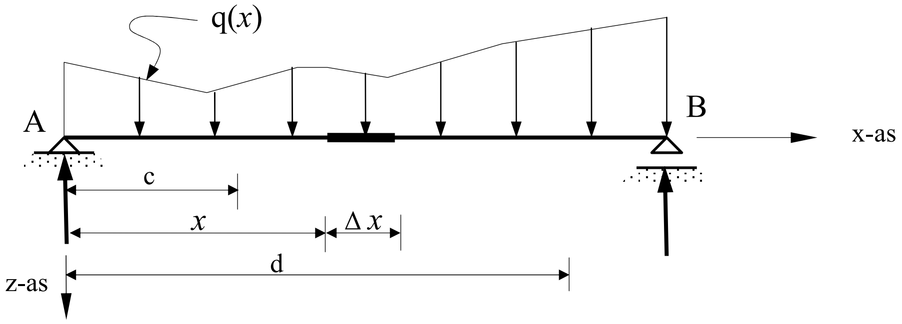
Voor een ligger met een willekeurige *continue* belasting q(x) geldt:

$$V'(x) = -q(x) \quad \text{...(1)}$$

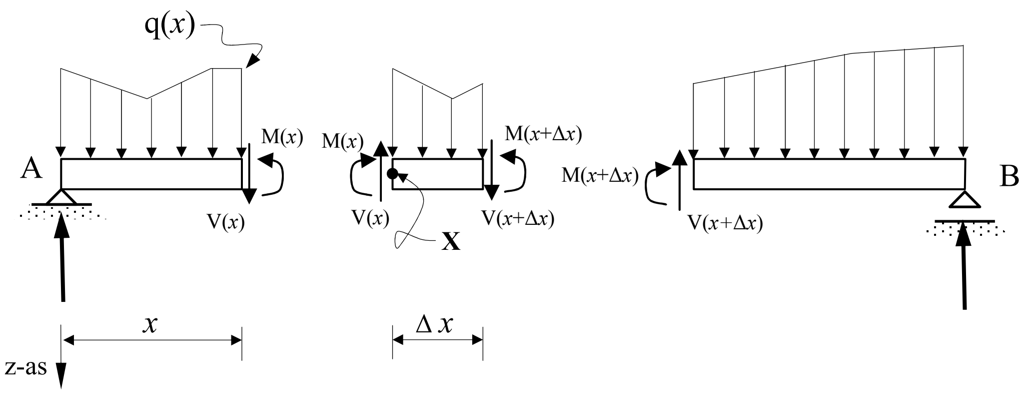
$$M'(x) = V(x)\,. \quad \text{...(2)}$$

Deze vergelijkingen volgen uit het verticale evenwicht $\sum V = 0$ en het momentenevenwicht $\sum M = 0$.

Bewijs:



We beschouwen een elementje uit de balk op een afstand x van A met lengte Δx, met de bijbehorende dwarskrachten en momenten.



Uit het verticale evenwicht, $\sum V = 0$ van het elementje volgt:

$$-V(x) \;+\; q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \Delta x + V(x + \Delta x) = 0$$

$$V(x+\Delta x) - V(x) = -q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \Delta x$$

$$\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x}$$

Als Δx heel erg klein wordt, Δx nadert tot 0 ($\Delta x \to 0$) , dan gaat het linkerlid over in de afgeleide van V in x en het rechterlid in -q(x):

$$\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = V'(x) \qquad \text{als } \Delta x \to 0$$

$$-q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} = -q(x) \qquad \text{als } \Delta x \to 0$$

dus:

$$V'(x) = -q(x) .$$

Uit het momentenevenwicht t.o.v. **X**, $\sum_{\text{t.o.v. X}} M = 0$ van het elementje volgt:

$$-M(x) + M(x+\Delta x) - V(x+\Delta x) * \Delta x - q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \Delta x * \text{arm} = 0$$

$$M(x+\Delta x) - M(x) = V(x+\Delta x) * \Delta x + q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \Delta x * \text{arm}$$

$$\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = V(x+\Delta x) + q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \text{arm} .$$

Als Δx heel erg klein wordt, $\Delta x \to 0$, dan gaat het linkerlid over in de afgeleide van M in x en het rechterlid in V(x), want:

$$\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = M'(x) \qquad \text{als } \Delta x \to 0$$

$$V(x+\Delta x) = V(x) \qquad \text{als } \Delta x \to 0$$

$$q_{\text{gemiddelde van } x \text{ tot } x+\Delta x} * \text{arm} = 0 \qquad \text{als } \Delta x \to 0$$ [1]

dus:

$$M'(x) = V(x) .$$ □

[1] De arm van de belasting ligt tussen de 0 en Δx, dus als $\Delta x \to 0$ dan geldt zeker dat arm $\to$ 0.

De vergelijking van V en M kunnen we bepalen door te integreren.

Onbepaald integreren en randvoorwaarden gebruiken:

$$V(x) = -\int q(x)\,dx \qquad \text{...(3)}$$

$$M(x) = \int V(x)\,dx. \qquad \text{...(4)}$$

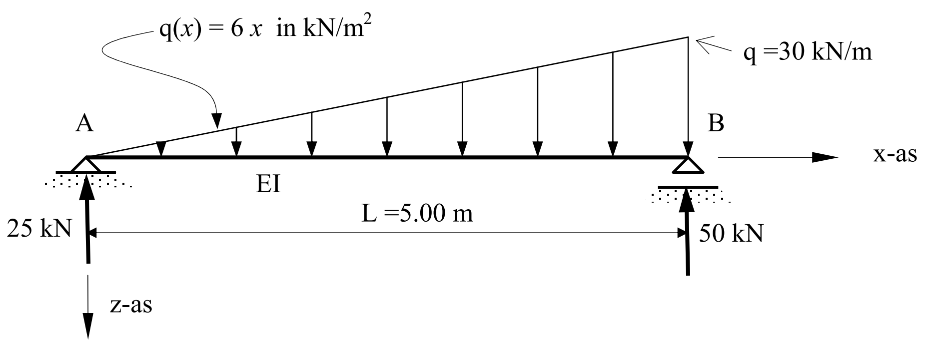
of

Bepaald integreren (de randvoorwaarden worden nu direct ingevuld):

$$V(d) = V(c) - \underbrace{\int_c^d q(x)\,dx}_{\text{oppervlakte van belastingsvlak tussen c en d}} \qquad \text{...(5)}$$

$$M(d) = M(c) + \underbrace{\int_c^d V(x)\,dx}_{\text{oppervlakte van dwarskrachtenvlak tussen c en d}}. \qquad \text{...(6)}$$

Voorbeeld 1



(a) Bereken de $V(x)$ en $M(x)$ m.b.v. van onbepaald integreren en randvoorwaarden.
(b) Bereken M_{max} en teken de V- en M-lijn.

Oplossing:

(a) De vergelijking van de dwarskrachtenlijn $V(x)$ volgt uit de evenwichtsrelatie van een elementje (eenheden zijn voor de eenvoud weggelaten, lengten in m krachten in kN):

$$V'(x) = -q(x)$$
$$V'(x) = -6x.$$

Door te integreren vinden we nu $V(x)$:

$$V(x) = \int -6x\,dx = -3x^2 + \underbrace{C_1}_{\text{integratieconstante}} \qquad \text{...(7)}$$

De integratieconstante C_1 volgt uit de oplegreactie bij punt A of B.

Bepaling van de oplegreacties (een oplegreactie volstaat al om de C_1 te bepalen):

$$\sum_{\text{t.o.v. A}} M = 0 \qquad -\frac{1}{2} * 30\,\text{kN/m} * 5\text{m} * \left(\frac{2}{3} * 5\text{m}\right) + V_B * 5\text{m} = 0$$

$$V_B = 50\,\text{kN}$$

$$\sum V = 0 \qquad V_A = \frac{1}{2} * 30\,\text{kN/m} * 5\text{m} - V_B$$

$$V_A = 75\,\text{kN} - 50\,\text{kN} = 25\,\text{kN}$$

Bepaling van C_1:
De dwarskracht net even rechts van steunpunt A ($x \downarrow 0$) is +25 kN, dus:

$$V(\underbrace{0.00\cdots01}_{\substack{\text{positief en bijna nul} \\ \text{notatie } 0^+}}) = +25\,\text{kN}$$

$$V(0^+) = -3 * 0^2 + C_1$$

$$V(0^+) = C_1 .$$

De integratieconstante C_1 = +25 kN, de vergelijking van de dwarskracht $V(x)$ kunnen we dus schrijven als:

$$V(x) = -3x^2 + 25. \qquad \text{...(8)}$$

De vergelijking van de momentenlijn $M(x)$ volgt uit de evenwichtsrelatie van een elementje:

$$M'(x) = V(x) .$$

Door integreren vinden we nu:

$$M(x) = \int -3x^2 + 25\,dx = -x^3 + 25x + \underbrace{C_2}_{\text{integratieconstante}}$$

De integratieconstante C_2 volgt uit het momenten bij steunpunt A of B, het moment bij steunpunt A is 0 kNm, dus: $C_2 = 0$. Voor $M(x)$ geldt dus:

$$M(x) = -x^3 + 25x. \qquad \text{...(9)}$$

(b) De extremen van M bevinden zich op de plaatsen waar $M'(x) = V(x) = 0$ ofwel:

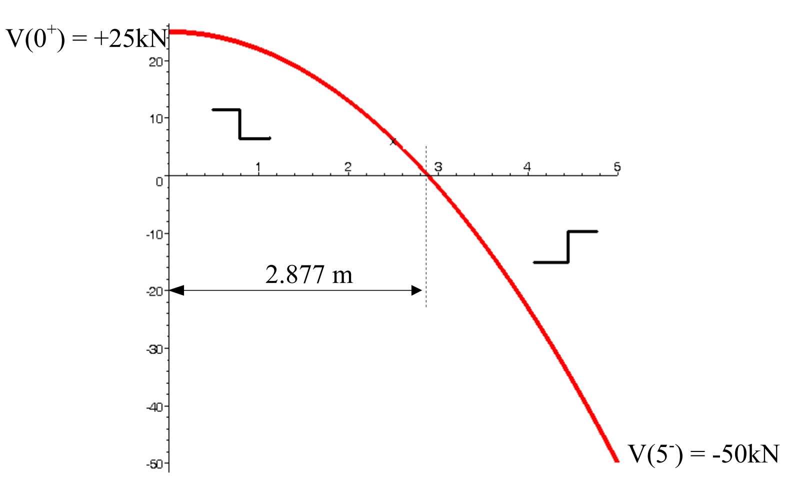
$$-3x^2 + 25 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.887\,\mathrm{m}$$

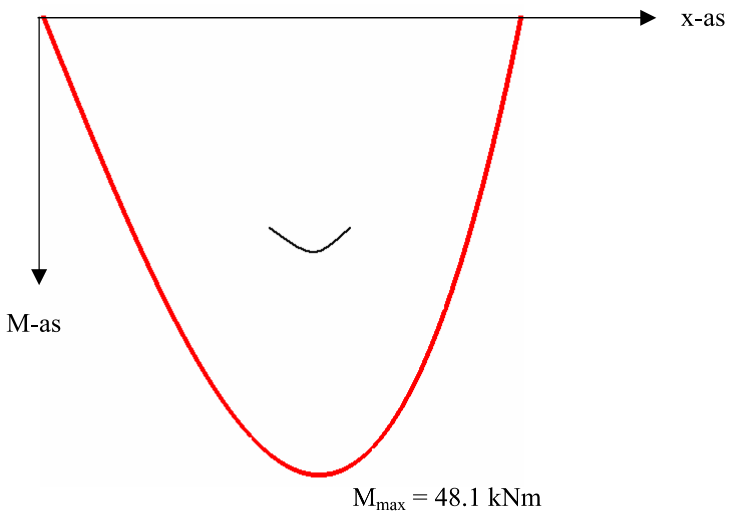
M heeft voor $x = 2.887$ m [2] een maximum, want $\mathrm{M}'(x) = \mathrm{V}(x)$ wisselt van plus naar min (M wisselt dus van stijgend naar dalend),

$$\mathrm{M}_{\max} = \mathrm{M}(2.887) = -2.887^3 + 25 * 2.887 = 48.1\,\mathrm{kNm}$$ [3]

M.b.v. vergelijking (8) en (9) kunnen we nu de V- en M-lijn tekenen.



V-lijn [kN]



M-lijn [kNm]

□

[2] Bij een driehoeksbelasting is dat op de plaats $\frac{\mathrm{L}}{\sqrt{3}} \approx 0.577\mathrm{L}$.

[3] Bij een driehoeksbelasting is $\mathrm{M}_{\max} = \frac{\mathrm{qL}^2}{9\sqrt{3}} \approx 0.0642 * \mathrm{qL}^2$.

2 Vervorming door doorbuiging.

Module 5 (Basisboek Toegepaste Mechanica van Welleman)
Paragraaf 1, 2, 3 (gedeeltelijk), 4 en 5 (blz. 279 t/m 330).

Evenwichtsrelaties voor een klein elementje geeft:

Differentiaalvorm:

$$V'(x) = -q(x) \qquad ...(10)$$

$$M'(x) = V(x). \qquad ...(11)$$

Onbepaalde integraal (randvoorwaarden zijn nodig voor V en M) :

$$V(x) = -\int q(x)\,dx \qquad ...(12)$$

$$M(x) = \int V(x)\,dx. \qquad ...(13)$$

Bepaalde integraal:

$$V(d) = V(c) - \underbrace{\int_c^d q(x)\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van belastingsvlak}\\ \text{tussen c en d}}} \qquad ...(14)$$

$$M(d) = M(c) + \underbrace{\int_c^d V(x)\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van dwarskrachtenvlak}\\ \text{tussen c en d}}}. \qquad ...(15)$$

de laatste uitdrukking (eigenlijk $\sum_{\text{t.o.v. } x=d} M = 0$) zou ook nog geschreven kunnen worden, als:

$$M(d) = M(c) + \underbrace{V(c)*(d-c)}_{\substack{\text{Moment t.g.v. V(c)}\\ \text{dwarskracht*afstand}}} - \underbrace{\int_c^d q(x)*(d-x)\,dx}_{\substack{\text{statisch moment q-vlak}\\ \text{van c tot d t.o.v. } x=d}}. \qquad ...(16)$$

Constitutieve relatie

Differentiaalvorm:

$$\varphi'(x) = \frac{M(x)}{EI}. \qquad ...(17)$$

Onbepaalde integraal (randvoorwaarden zijn nodig voor φ) :

$$\varphi(x) = \int \frac{M(x)}{EI}\,dx. \qquad ...(18)$$

Bepaalde integraal (eerste stelling van het momentenoppervlak):

$$\varphi(d) = \varphi(c) - \underbrace{\int_c^d \frac{M(x)}{EI}\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van M/EI vlak}\\ \text{tussen c en d}}}. \qquad ...(19)$$

Kinematische relatie

Differentiaalvorm:

$$w'(x) = -\varphi(x)\,. \qquad ...(20)$$

Onbepaalde integraal (randvoorwaarden zijn nodig voor w) :

$$w(x) = -\int \varphi(x)\,dx\,. \qquad ...(21)$$

Bepaalde integraal:

$$w(d) = w(c) - \underbrace{\int_c^d \varphi(x)\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van het } \varphi\text{-vlak} \\ \text{tussen c en d}}} \qquad ...(22)$$

of zo, deze uitdrukking noemt men de tweede stelling van het momentenoppervlak

$$w(d) = w(c) - \underbrace{\varphi(c) * (d - c)}_{\substack{\text{Kwispeleffect} \\ \text{hoekverdraaiing} * \text{afstand}}} - \underbrace{\int_c^d \frac{M(x)}{EI} * (d - x)\,dx}_{\substack{\text{statisch moment M/EI-vlak} \\ \text{van c tot d t.o.v. } x = d}} \qquad ...(23)$$