HOGESCHOOL ROTTERDAM

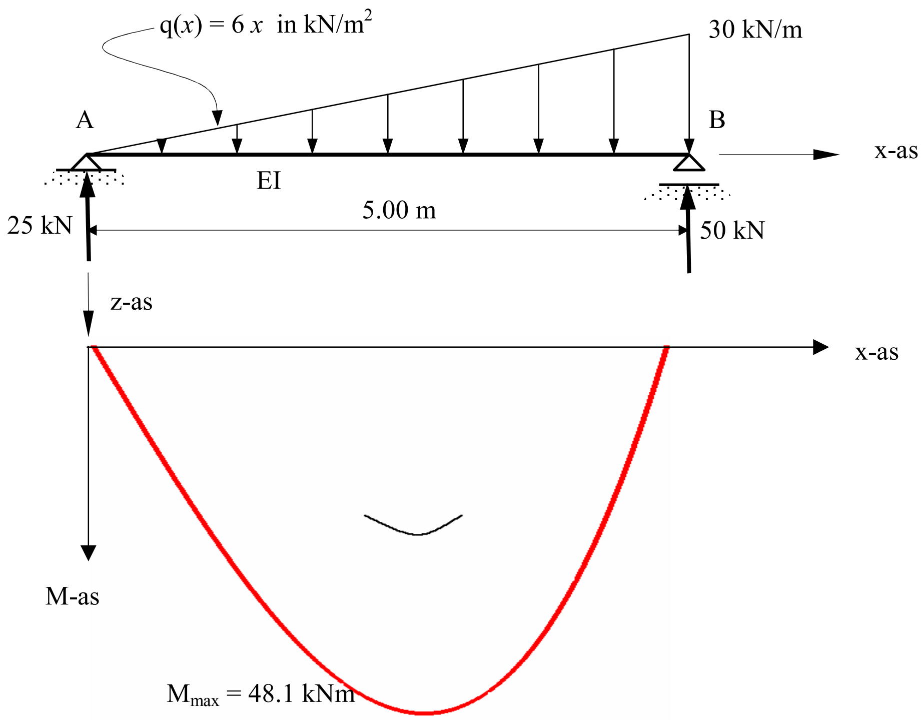
Cluster: RIBACS

MODULEWIJZER

voor training:

Toegepaste Wiskunde II

voor Bouwkunde & Civiele Techniek



Moment in x = *Moment in 0* +

Oppervlakte van het gebied tussen Dwarskrachtenlijn en de X-as tussen 0 en x.

$$M(x) = M(0) + \int_0^x V(\tilde{x})d\tilde{x} = -x^3 + 25x$$

Modulecode:	**ribWBK11t & ribWCT11t deel II** (oude code bouWBK01t & civWCT01t)
Opgesteld door:	William Kuppen (ribWCT11t) en Jan Slabbekoorn (ribWbk11t)
Docenten:	Mustapha Attahiri, William Kuppen, Joost van Leeuwen, Marc Roos en Jan Slabbekoorn
Aanmaakdatum:	Augustus 2005, februari 2007, januari 2008
Studielast:	1 ects
Opleiding:	Bouwkunde & Civiele Techniek
Fase:	Propedeuseprogramma 1e jaar

INHOUDSOPGAVE.

1 Inleiding.

In de module "**Toegepaste Wiskunde II**" voor bouwkunde & civiele techniek komen oplosmethoden van stelsels lineaire vergelijkingen, integraalrekening en statistiek aan de orde.
De redenen om aandacht aan deze onderwerpen te besteden komen o.a. ter sprake in de volgende beschouwingen.

Veel technische problemen kunnen herleid worden tot een stelsel van lineaire vergelijkingen. Neem b.v. een eindig elementenpakket waarmee verplaatsingen, normaalkrachten, dwarskrachten en momenten in een constructie worden bepaald, spanningen en vervormingen van grond of stroomsnelheden en drukken in water of het temperatuursverloop in een gebouw. Bij driedimensionale stromingsproblemen kunnen het zelfs een miljoen of nog meer lineaire vergelijken zijn met even zoveel onbekenden. Zoiets snel oplossen vereist een speciale aanpak "algoritme", dit is werk voor specialisten. In de module ribWBK11t & ribWCT11t deel II worden lineaire stelsels van hooguit vier onbekende behandeld, deze kunnen voorkomen bij de berekening van een eenvoudig statisch onbepaalde constructie.

Integraalrekening kunnen we in de Bouwkunde & Civiele Techniek tegenkomen bij problemen uit de toegepaste mechanica, vloeistofmechanica en grondmechanica, zoals: oppervlakte, statisch moment, traagheidsmoment, zwaartepunt van een doorsnede, bepaling van de dwarskrachten-, momenten- en zakkingslijn met hun extremen en de vultijd van een schutkolk.

Bij het bepalen van: de overstromingskans van een polder, de golfhoogte die door 2% van alle golven wordt overschreden, de sterkte van een bepaald materiaal, de file prognose bij een bepaald wegennet, de meest economische kadelengte voor een zeehaven (een grote kadelengte vereist een zeer grote investering, bij een kleine kadelengte moeten schepen wachten en buitengaats voor anker gaan of uitwijken naar andere havens) Het zal duidelijk zijn dat kansrekening en statistiek hierbij onontbeerlijk zijn.

Om studenten op een zelfstandige manier te laten werken worden er slechts hoorinstructie colleges gegeven. In deze colleges worden bepaalde theorieën behandeld en oplosmethodes voor diverse soorten problemen besproken. Tevens worden er door de docent huiswerkopdrachten verstrekt, die thuis (of tijdens instructie-uren) gemaakt kunnen worden. Deze huiswerkopdrachten kunnen meetellen bij de definitieve beoordeling. De theoretische kennis, die nodig is om deze opdrachten te maken, moet in veel gevallen zelf in de literatuur worden opgezocht.

2 Beknopte weergave van de inhoud.

De volgende onderwerpen komen aan de orde:

(a) Eenvoudig stelsel lineaire vergelijkingen en de Gauss eliminatiemethode;
(b) Onbepaald integreren;
(c) Oppervlaktes, statisch moment, kwadratisch oppervlakte moment;
(d) Relatie tussen belasting, dwarskracht, moment, hoekverdraaiing en zakking;
(e) Eenvoudige statistiek, normaal verdeling;
(f) Het werken met grafische rekenmachine.

3 Algemene doelstellingen.

Na bestudering van deze module is de student in staat:

(a) Eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen m.b.v. de Gauss eliminatiemethode.
(b) Eenvoudige integralen te bepalen.
(c) De oppervlakte van een vlakdeel te berekenen, als dat vlakdeel begrensd wordt door grafieken van functies.
(d) M.b.v. integraalrekening het statisch moment, traagheidsmoment en zwaartepunt van een eenvoudige doorsnede te bepalen.
(e) M.b.v. integraalrekening de M-, en V-lijn te bepalen voor een ligger met $q(x)$ belasting.
(f) Te werken met de tabel van de standaardnormale verdeling.

4 Beginvereisten.

De student dient kennis hebben van het differentiëren, zoals behandeld in de module Toegepaste Wiskunde voor Bouwkunde & Civiele Techniek, code: ribWBK11t & ribWCT11t deel I.

5 Werkschema.

Bijeenkomst	Onderwerp	Opdrachten / Vraagstukken
1	Stelsel lineaire vergelijkingen Paragraaf 1.1.4 uit [1][1] , blz. 25 t/m 33	Van [1], vraagstuk 1.22 t/m 1.29.
2	Stelsel lineaire vergelijkingen (vervolg) Integreren, onbepaalde integraal en bepaalde integraal Paragraaf 3.3.1 en 3.3.2 uit [1] , blz. 319 t/m 324.	Van [1], vraagstuk 1.22 t/m 1.29 m.b.v. een grafische rekenmachine of Maple. Van [1], vraagstuk 3.21 t/m 3.25
3	Het begrip oppervlakte Paragraaf 3.3.3 uit [1], blz. 325 t/m 329	Van [1], vraagstuk 3.26 t/m 3.29
4	Statisch moment, zwaartepunten en traagheidsmoment Module 3, onderdeel 5 en 6.1 uit [3], blz. 169 t/m 181	Worden door de docent verstrekt[2]
5	Statisch moment, zwaartepunten en traagheidsmoment (vervolg) Relatie tussen belasting, dwarskracht en moment Module 2, onderdeel 4 uit [3], blz. 101 t/m 115	Worden door de docent verstrekt[2]
6	Relatie tussen belasting, dwarskracht en moment (vervolg) Vervorming door buiging,en de relaties tussen: q, V, M, φ en w. Module 5, onderdeel 1 en 2 uit [3], blz. 282 t/m 296	Worden door de docent verstrekt
7	Vervorming door buiging,en de relaties tussen: q, V, M, φ en w. (vervolg)	Worden door de docent verstrekt
8	**TOETS**	

[1] Zie de literatuurlijst.
[2] Paragraaf 3.4 (blz. 122 t/m 134) uit Toegepaste Mechanica deel 2 van Coenraad Hartsuijker, ISBN 9039505942.

6 Verdere aanwijzingen voor de student.

Het onderstaande is een bekend gegeven uit de didactiek:

Een mens onthoudt:
10% van wat hij hoort
20% van wat hij ziet
80% van wat hij doet.

Het beroep van Bouwkundig of Civiel ingenieur leer je niet door er alleen maar naar te kijken, maar door het te doen! Dit geldt natuurlijk ook voor een ondersteunend vak als toegepaste wiskunde, dus niet alleen maar kijken naar de vraagstukken en uitwerkingen, maar zelf maken.

7 Literatuur en leermiddelen bij ribWBK11t & ribWCT11t deel II.

[1] Pelt, T.M. van ,R.B.J. Pijlgroms en J.L. Walter; Wiskunde voor het hoger onderwijs 0, vierde druk; Wolters-Noordhoff 2005; ISBN 90-01-03338-5.

[2] Pelt, T.M. van ,R.B.J. Pijlgroms en J.L. Walter; Wiskunde voor het hoger onderwijs 0 Uitwerkingen, vierde druk; Wolters-Noordhoff 2005; ISBN 90-01-03339-3.

[3] Welleman, J.W., A. Dolfing en J.W. Hartman; Basisboek toegepaste mechanica, tweede druk; Thiememeulenhoff 2002; ISBN 9006950017.
Niet verplicht om aan te schaffen voor de training Toegepaste Wiskunde!

Voor het onderwerp statistiek kunnen wiskundeboeken uit de vooropleiding worden gebruikt.

8 Toetsing.

De toetsing of de student in voldoende mate de kennis van deze module heeft opgenomen, geschiedt doormiddel van een schriftelijk tentamen met een tijdsduur van 85 minuten en een aantal huiswerkopdrachten.
Het schriftelijke tentamen gaat over de onderwerpen uit het werkschema en de huiswerkopdrachten. De huiswerkopdrachten kunnen voor 30% het eindcijfer bepalen, de overige 70% worden dan door het schriftelijke tentamen bepaald. Als het tentamencijfer hoger is dan het cijfer voor de huiswerkopgaven, dan is het cijfer gelijk aan het afgeronde tentamencijfer, dus:

Cijfer deel II := MAX{ 0.3×huiswerkcijfer + 0.7×tentamencijfer ; tentamencijfer }.

8.1 Oefententamen Toegepaste Wiskunde II.

Normering														
Vraag	1	2	3	4	5(a)	5(b)	5(c)	5(d)	6(a)	6(b)	6(c)	7	**bonus**	**Totaal**
Punten	15	3×5	3×5	10	5	5	5	10	5	10	10	10	+5	120
Het tentamencijfer is het aantal behaalde punten met een maximum van 100 gedeeld door 10., het deelcijfer voor deel II is: Cijfer deel II := MAX{ 0.3×huiswerkcijfer + 0.7×tentamencijfer ; tentamencijfer }.														

Vraag 1 [15 punten]

Los het onderstaande stelsel lineaire vergelijkingen op, met de Gauss eliminatie methode:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 18 \\ x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Vraag 2 [5+5+5 = 15 punten]

Bepaal de volgende integralen:

a. $\int (x^3 + x^2 + \sqrt{x})dx$

b. $\int (x^2\sqrt{x} + \sin(x) + \cos(x))\,dx$

c. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x}\,dx$

Vraag 3 [5+5+5 = 15 punten]

Bepaal de volgende bepaalde integralen:

a. $\int_{-1}^{1} (2x+1)dx$

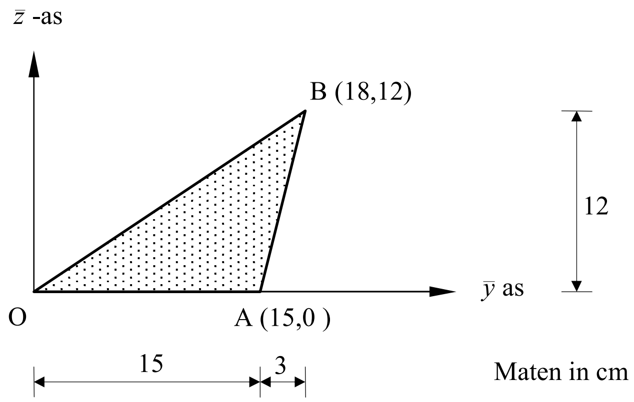
b. $\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$

c. $\int_{0}^{1} 5x\sqrt{3x}\,dx$

Vraag 4 [10 punten]

Bepaal de grootte van het oppervlak ingesloten door $y = x^2$, $y = x - 3$ en de rechten $x = -3$ en $x = 3$.

Vraag 5 [5+5+5+10 = 25 punten]



Maten in cm

Gegeven is de driehoek OAB, zie de voorgaande figuur.

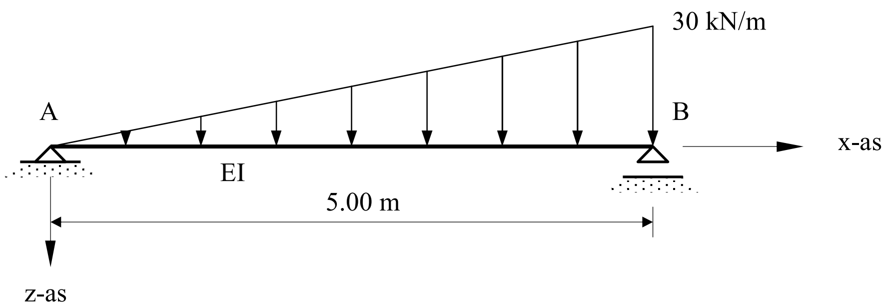
a. Bereken m.b.v. integraalrekening het statisch moment ($S_{\bar{y}}$) van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{y}$ -as.

b. Bereken van driehoek OAB de $\bar{z}$ -coördinaat van het zwaartepunt ($\bar{z}_Z$)

c. Bereken m.b.v. integraalrekening het traagheidsmoment ($I_{\bar{y}}$) van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{y}$ -as.

d. Bereken m.b.v. integraalrekening het statisch moment ($S_{\bar{z}}$) van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{z}$ -as en bepaal de $\bar{y}$ -coördinaat van het zwaartepunt ($\bar{y}_Z$).

Vraag 6 [5+10+10 = 25 punten]



Gegeven is een ligger met een constante buigsijfheid EI op twee steunpunten, met een driehoeksbelasting.

a. Bereken en teken de V-lijn.

b. Bereken: M(x), de plaats waar M maximaal is, de maximale waarde van M (M_{max}) en teken de M-lijn.

c. Bereken de hoekverandering van de ligger in punt A, φ_A en schets de φ- en *w*-lijn.

Vraag 7 [10 punten]

De druksterkte ($\underline{x}$) van een constructiemateriaal is normaal verdeeld met $\mu = 40$ N/mm^2 en $\sigma = 5$ N/mm^2. Er worden 25 onafhankelijke proeven gedaan waarbij de druksterkte wordt bepaald.

a. Hoe groot is de kans dat bij een afzonderlijke proef de druksterkte kleiner is dan 37 N/mm^2?

b. Hoe groot is de kans dat de gemiddelde druksterkte, uit 25 onafhankelijke proeven kleiner is dan 37 N/mm^2?

8.2 Toegepaste Wiskunde II, van vrijdag 12 mei 2006 van 08.30 tot 09.55.

Normering										
Vraag	1(a)	1(b)	2	3	4(a)	4(b)	4(c)	5	Bonus	Totaal
Punten	5	10	10	20	5	10	10	25	+5	100
Het tentamencijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 10. Het cijfer voor deel II wordt als volgt bepaald: Cijfer deel II := MAX{ 0.3×huiswerkcijfer + 0.7×tentamencijfer ; tentamencijfer}.										

Vraag 1 [5 + 10 = 15 punten]

Bepaal de volgende integralen:

(a) $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$

(b) $\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx$.

Vraag 2 [10 punten]

Bepaal de volgende bepaalde integraal:

$$\int_{-1}^{1}\left(6x^5 - 2x + 1\right) dx \ .$$

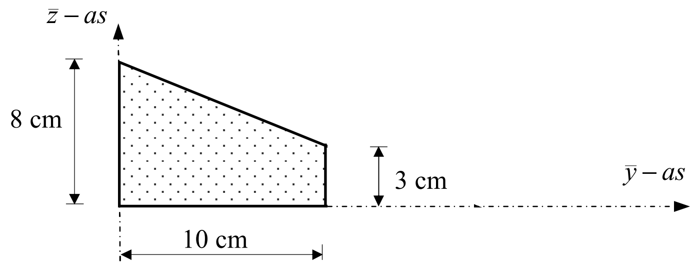
Vraag 3 [20 punten]

Los het onderstaande stelsel lineaire vergelijkingen op, met de eliminatie methode van Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 9 \\ 3x + 5y + 6z = 17 \end{cases}.$$

Vraag 4 [5 + 10 + 10 = 25 punten]

De onderstaande tekening stelt een doorsnede van een bepaald profiel voor.



(a) Toon aan dat het statisch moment ($S_{\bar{z}}$) van de doorsnede t.o.v. de $\bar{z}$ -as gelijk is aan:

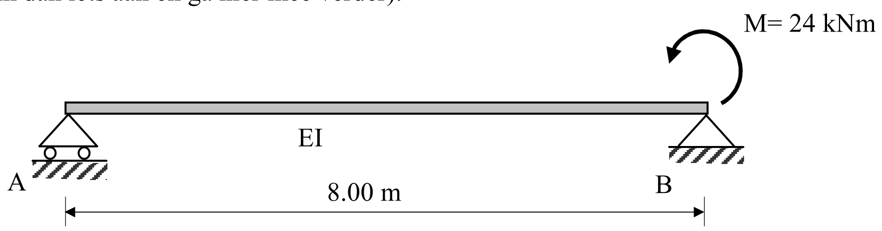
$$S_{\bar{z}} = \int_0^{10} \bar{y} * (8 - 0.5\bar{y})\, d\bar{y}\,.$$

(b) Bereken het statisch moment $S_{\bar{z}}$ m.b.v. van de bovenstaande integraal.

(c) Bereken het traagheidsmoment $I_{\bar{z}}$ van de doorsnede t.o.v. de $\bar{z}$ -as door gebruik te maken van integraalrekening.

Vraag 5 [25 punten]

De onderstaande tekening stelt een constructieschema van een ligger voor. Stel formules op waarmee in elk punt van de ligger de dwarskracht, het moment, de hoekverdraaiing en de doorbuiging kan worden berekend. Doe dit door gebruik te maken van integraalrekening (Tip: Als het U niet lukt een formule voor de dwarskrachtenlijn te bepalen, neem dan iets aan en ga hier mee verder).



8.3 Antwoorden.

Oefententamen Toegepaste Wiskunde II

1. $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ en $x_3 = -2.$

4.b. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

4.c. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \cos(x) + \sin(x) + C$

4.d. $\frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + C$

3.a. 2

3.b. 2

3.c. $2\sqrt{3}$

4. 36

5.a. 360 cm^3

5.b. 4 cm

5.c. 2160 cm^4

5.d. 990 cm^3, 11 cm

5. $V(x) = -3x^2 + 25$ voor $x \in [0,5]$,
V in kN en x in m

6. $M(x) = -x^3 + 25x$ voor $x \in [0,5]$,
M in kNm en x in m;
M heeft een maximum bij
$x = \sqrt{\frac{25}{3}}\ \text{m} \approx 2.887$ m
M_{max} = 48.1 kNm

7. $\varphi_A = \frac{-875}{12\mathrm{EI}}\ \text{rad} * \text{kNm}^2 \approx \frac{-72.9}{\mathrm{EI}}\ \text{rad} * \text{kNm}^2$,
verder is $\varphi = 0$ voor x =2.597 m en w_{max}
$w_{max} \approx w(2.597) = \frac{122.3}{\mathrm{EI}}\ \text{kNm}^3$.

7.a. 0.2743

7.b. 0.0013

Toegepaste Wiskunde II, van vrijdag 12 mei 2006

1.a. $x^3 + x^2 + x + \mathrm{C}$

1.b. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathrm{C}$

2. 2

3. $x = 0,\ y = 1$ en $z = 2$

4.b. 233.3 cm^3

4.c. 1417 cm^4

5. $V(x) = 3$ voor $x \in <0,8>$,
$M(x) = 3x$ voor $x \in [0,8]$,

$\varphi(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}x^2 - 32\right)$ voor $x \in [0,8]$,

$w(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{1}{2}x^3 + 32x\right)$ voor $x \in [0,8]$,

x in m, EI in kNm^2
V in kN, M in kNm,
φ in rad en w in m.

8.4 Uitwerkingen van tentamens.

8.4.1 Oefententamen Toegepaste Wiskunde II.

1. Bepaling van x_1, x_2 en x_3 m.b.v. Gauss eliminatie methode:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 4 & 5 & -2 & 18 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \\ \downarrow \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \downarrow \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lll} -3x_3 = 6 & \Leftrightarrow & x_3 = -2 \\ -x_2 = -2 & \Leftrightarrow & x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3*2 - 1*(-2) = 10 & \Leftrightarrow & x_1 = \dfrac{10-8}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x_1 = 1, \; x_2 = 2 \text{ en } x_3 = -2.$$

2.a. $$\int (x^3 + x^2 + \sqrt{x})dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

2.b. $$\int (x^2\sqrt{x} + \sin(x) + \cos(x)\,)\,dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \cos(x) + \sin(x) + C = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \cos(x) + \sin(x) + C$$

2.c. $$\int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x}\,dx = \int \left(x + x^{\frac{-1}{2}} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + C\,.$$

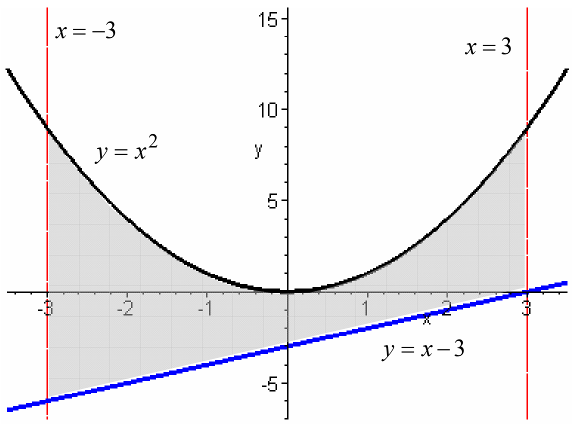
3.a. $$\int_{-1}^{1} (2x+1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \left(1^2 + 1\right) - \left((-1)^2 + (-1)\right) = 2$$

3.b. $$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - -\cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

3.c. $$\int_0^1 5x\sqrt{3x}\,dx = \int 5\sqrt{3} * x^{\frac{3}{2}}dx = 5\sqrt{3} * \int x^{\frac{3}{2}}dx = 5\sqrt{3} * \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} * \left[x^2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$$

4. De grootte van het oppervlak ingesloten door $y = x^2$, $y = x - 3$ en de rechten x = -3 en x = 3:

5.

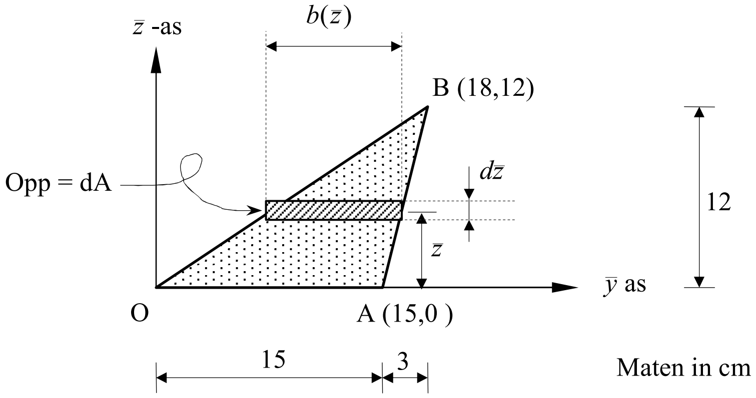


$$\int_{-3}^{3} \left| x^2 - (x-3) \right| dx = \int_{-3}^{3} (x^2 - x + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3} * 3^3 - \frac{1}{2} * 3^2 + 3 * 3 \right) - \left(\frac{1}{3} * (-3)^3 - \frac{1}{2} * (-3)^2 + 3 * (-3) \right)$$

$$= 36 .$$

5.a.



Voor het statisch moment van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{y}$ -as geldt:

$$S_{\bar{y}} = \int_{\Delta OAB} \bar{z} \, dA = \int_{0}^{12} \bar{z} * b(\bar{z}) \, d\bar{z} \; .$$

De $b(\bar{z})$ volgt uit de gelijkvormigheid van driehoeken:

$$\frac{b(\bar{z})}{15} = \frac{12 - \bar{z}}{12} \quad \Leftrightarrow \; b(\bar{z}) = \frac{15}{12} * (12 - \bar{z}) = \frac{5}{4}(12 - \bar{z})$$

dus:

$$S_{\bar{y}} = \int_{0}^{12} \bar{z} * \frac{5}{4}(12 - \bar{z}) \, d\bar{z} = \int_{0}^{12} 15\bar{z} - \frac{5}{4}\bar{z}^2 \, d\bar{z}$$

$$S_{\bar{y}} = \left[\frac{15}{2}\bar{z}^2 - \frac{5}{12}\bar{z}^3 \right]_0^{12} = \frac{15}{2} * 12^2 - \frac{5}{12} * 12^3 = 360 \, \text{cm}^3$$

5.b. De $\bar{z}$ -coördinaat van het zwaartepunt van driehoek OAB is:

$$\bar{z}_Z = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{360 \, \text{cm}^3}{\frac{1}{2} * 15\text{cm} * 12\text{cm}} = 4\text{cm}$$

5.c. Voor het traagheidsmoment van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{y}$ -as geldt:

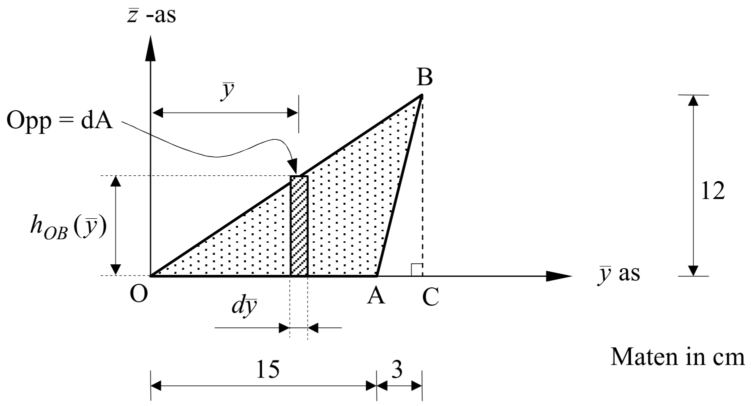
$$I_{\bar{y}} = \int_{\Delta OAB} \bar{z}^2 \, dA = \int_{0}^{12} \bar{z}^2 * b(\bar{z}) \, d\bar{z}$$

dus:

$$I_{\bar{y}} = \int_{0}^{12} \bar{z}^2 * \frac{5}{4}(12 - \bar{z}) \, d\bar{z} = \int_{0}^{12} 15\bar{z}^2 - \frac{5}{4}\bar{z}^3 \, d\bar{z}$$

$$I_{\bar{y}} = \left[5\bar{z}^3 - \frac{5}{16}\bar{z}^4 \right]_0^{12} = 5 * 12^3 - \frac{5}{16} * 12^4 = 2160 \, \text{cm}^4$$

5.d. Voor het statisch moment van driehoek OAB t.o.v. de $\bar{z}$ -as geldt:



$$S_{\bar{z}} = S_{\bar{z},\Delta OBC} - S_{\bar{z},\Delta ABC}$$

$$S_{\bar{z}} = \int_{\Delta OBC} \bar{y}\, dA - \int_{\Delta ABC} \bar{y} dA$$

$$S_{\bar{z}} = \int_0^{18} \bar{y} * h_{OB}(\bar{y})\, d\bar{y} \quad - \quad \int_{15}^{18} \bar{y} * h_{AB}(\bar{y})\, d\bar{y} \,,$$

voor $h_{OB}(\bar{y})$ en $h_{AB}(\bar{y})$ geldt:

$$h_{OB}(\bar{y}) = \frac{12}{18}\bar{y} = \frac{2}{3}\bar{y}$$

$$h_{AB}(\bar{y}) = \frac{12}{3}(\bar{y} - 15) = 4\bar{y} - 60$$

dus:

$$S_{\bar{z}} = \int_0^{18} \bar{y} * \frac{2}{3}\bar{y}\, d\bar{y} \quad - \quad \int_{15}^{18} \bar{y} * (4\bar{y} - 60)\, d\bar{y}$$

$$S_{\bar{z}} = \int_0^{18} \frac{2}{3}\bar{y}^2\, d\bar{y} \quad - \quad \int_{15}^{18} (4\bar{y}^2 - 60\bar{y})\, d\bar{y}$$

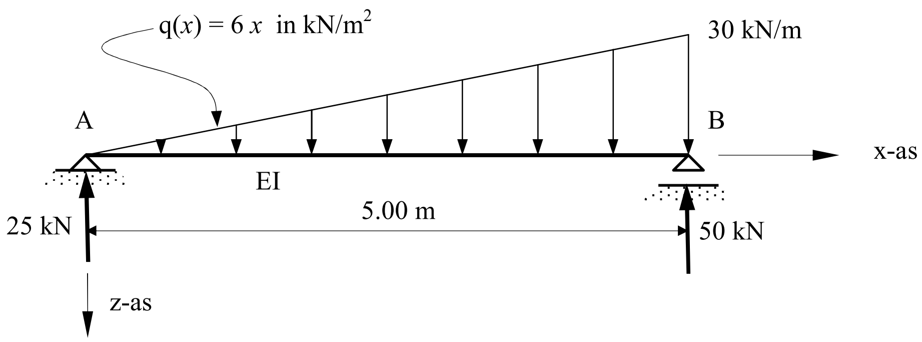
$$S_{\bar{z}} = \left[\frac{2}{9}\bar{y}^3\right]_0^{18} \quad - \quad \left[\frac{4}{3}\bar{y}^3 - 30\bar{y}^2\right]_{15}^{18}$$

$$S_{\bar{z}} = \left[\frac{2}{9}18^3 - 0\right] \quad - \quad \left[\left(\frac{4}{3}18^3 - 30 * 18^2\right) - \left(\frac{4}{3}15^3 - 30 * 15^2\right)\right] = 990\,\text{cm}^3$$

De $\bar{y}$ -coördinaat van het zwaartepunt van driehoek OAB is:

$$\bar{y}_Z = \frac{S_{\bar{z}}}{A} = \frac{990\,\text{cm}^3}{\frac{1}{2} * 15\text{cm} * 12\text{cm}} = 11\text{cm}$$

6.a.



De dwarskracht volgt uit de evenwichtsrelatie (eenheden zijn voor de eenvoud weggelaten, lengten in m krachten in kN):

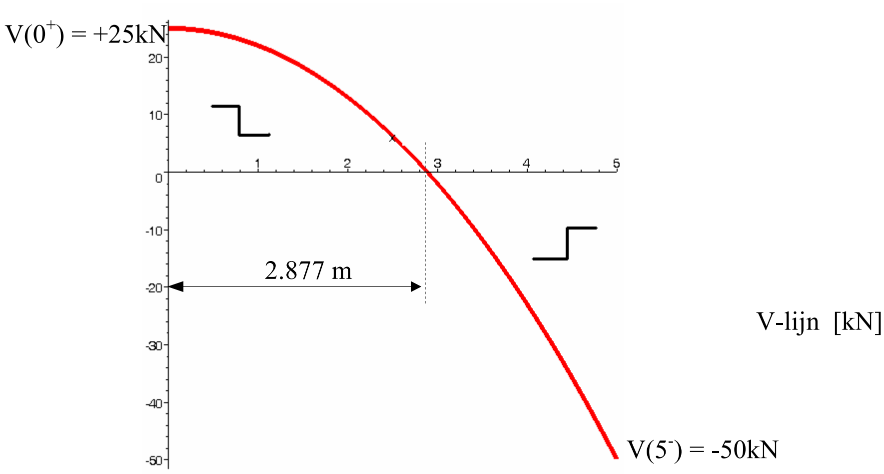
$$\mathrm{V}'(x) = -q(x) = -6x$$

dus:

$$\mathrm{V}(x) = \int -6x\,dx = -3x^2 + \mathrm{V}_0$$

De intergratieconstante V_0 volgt uit de oplegreactie bij punt A of B, de dwarskracht net even rechts van steunpunt A ($x\downarrow 0$) is 25 kN, dus: $V_0 = 25$. Voor V(x) geldt dus:

$$\mathrm{V}(x) = -3x^2 + 25\,.$$ [3]



6.b. De momentenlijn volgt uit de evenwichtsrelatie:

$$\mathrm{M}'(x) = \mathrm{V}(x)$$

dus:

$$\mathrm{M}(x) = \int -3x^2 + 25\,dx = -x^3 + 25x + \mathrm{M}_0$$

De intergratieconstante M_0 volgt uit de momenten bij punt A of B, het moment bij steunpunt A is 0 kNm, dus: $M_0 = 0$. Voor M(x) geldt dus:

$$\mathrm{M}(x) = -x^3 + 25x$$ [4]

[3] De V(x) kan ook door bepaald integreren worden verkregen:

$$\mathrm{V}(x) = \mathrm{V}(0) - \int_0^x q(\tilde{x})\,d\tilde{x} = 25 - \int_0^x 6\tilde{x}\,d\tilde{x} = 25 - \left[3\tilde{x}^2\right]_0^x = 25 - (3x^2 - 0) = -3x^2 + 25\,.$$

[4] De M(x) kan ook door bepaald integreren worden verkregen:

$$\mathrm{M}(x) = \mathrm{M}(0) + \int_0^x \mathrm{V}(\tilde{x})\,d\tilde{x} = 0 + \int_0^x (-3\tilde{x}^2 + 25)\,d\tilde{x} = \left[-\tilde{x}^3 + 25\tilde{x}\right]_0^x = -x^3 + 25x\,.$$

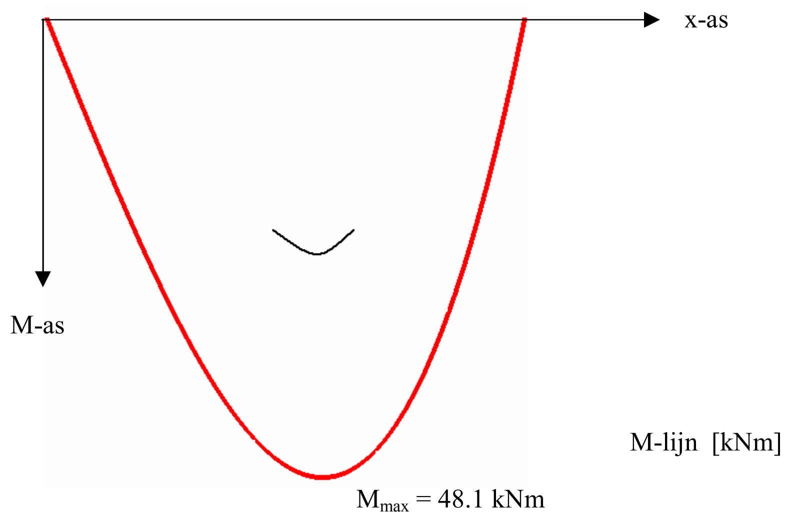
De extremen van M bevinden zich op de plaatsen waar $M'(x) = V(x) = 0$ ofwel:

$$-3x^2 + 25 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2.887 \text{ m}$$

M heeft voor x = 2.887 m een maximum, want M' wisselt van plus naar min (M wisselt dus van stijgend naar dalend),

$$M_{max} = -2.887^3 + 25 * 2.887 = 48.1 \text{ kNm.}$$



6.c. Voor de hoekverandering φ en zakking w geldt:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \left(\frac{M}{EI}\right)(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \varphi_A + \int_0^x \frac{M(\tilde{x})}{EI}\, d\tilde{x} = \varphi_A + \frac{1}{EI}\int_0^x M(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$\varphi(x) = \varphi_A + \frac{1}{EI}\int_0^x (-\tilde{x}^3 + 25\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$\varphi(x) = \varphi_A + \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{4}\tilde{x}^4 + \frac{25}{2}\tilde{x}^2\right]_0^x$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{25}{2}x^2\right) + \varphi_A \qquad (1)$$

$$w(x) = w(0) - \int_0^x \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x} = 0 - \int_0^x \varphi(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{25}{6}x^3\right) - \varphi_A * x \qquad (2)$$

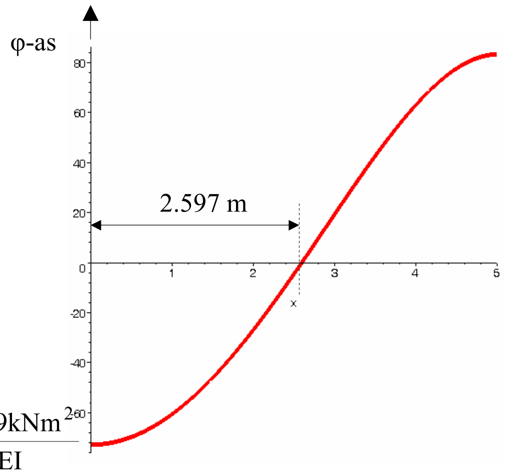
De hoekverandering φ_A volgt uit randvoorwaarde w_B = w(5) = 0 en vergelijking (2):

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{20}5^4 - \frac{25}{6}5^2\right) = -\frac{875}{12EI}$$

Het bovenstaande in (1) en (2) geeft:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{875}{12} \right)$$

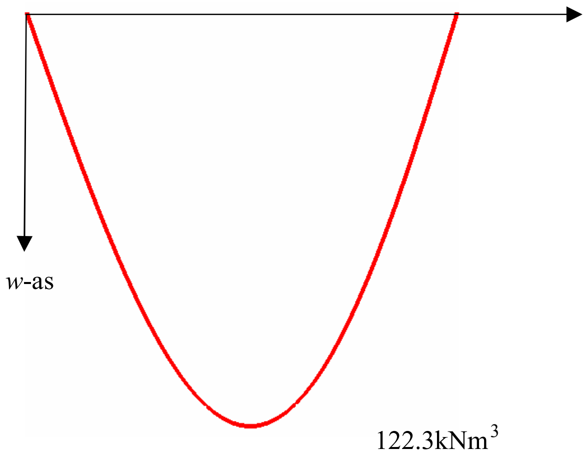
$$w(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{25}{6}x^3 + \frac{875}{12}x \right)$$



$$\varphi_B = \frac{83.3\mathrm{kNm}^2}{\mathrm{EI}}$$

$$\varphi_A = \frac{-72.9\mathrm{kNm}^2}{\mathrm{EI}}$$

φ-lijn hier in $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{EI}}\right]$



w- lijn [m]

$$w_{\max} = \frac{122.3\mathrm{kNm}^3}{\mathrm{EI}}$$

7.a. Voor de druksterkte ($\underline{x}$) bij een afzonderlijke proef geldt:

$\underline{x} \sim N(\ \mu = 40\ \mathrm{N/mm}^2\ ,\ \sigma = 5\ \mathrm{N/mm}^2\ )$

dus de kans dat afzonderlijke druksterkte kleiner is dan 37 N/mm² is:

$$\mathrm{P}(\ \underline{x} < 37\ \mathrm{N/mm}^2\ ) =$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{x} - \mu}{\sigma} < \frac{37 - 40}{5} \right) =$$

$$\mathrm{P}(\ \underline{z} < -0.6\ ) = 0.2743\ .$$

7.b. Voor de gemiddelde druksterkte ($\underline{x}_{\text{gem}}$) geldt:

$$\underline{x}_{\text{gem}} \sim N\left(\mu = 40\mathrm{N/mm}^2\ ,\quad \sigma = \frac{5\ \mathrm{N/mm}^2}{\sqrt{\text{aantal onafhankelijke proeven}}} \right)$$

$\underline{x}_{gem} \sim N(\mu = 40 \text{ N/mm}^2,\ \sigma = 1 \text{ N/mm}^2)$

de kans dat de gemiddelde druksterkte kleiner is dan 37 N/mm^2 is:

$P(\underline{x}_{gem} < 37 \text{ N/mm}^2) =$

$P\left(\dfrac{\underline{x}_{gem} - \mu}{\sigma} < \dfrac{37-40}{1}\right) =$

$P(\underline{z} < -3) = 0.0013$.

8.4.2 Toegepaste Wiskunde II, van vrijdag 12 mei 2006.

1.a. $\int (3x^2 + 2x + 1)dx = 3 * \frac{1}{3}x^3 + 2 * \frac{1}{2}x^2 + x + C = x^3 + x^2 + x + C$

1.b. $\int (x + \sqrt{x})dx = \int \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

2. $\int_{-1}^{1} \left(6x^5 - 2x + 1\right) dx = \left[x^6 - x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \left(1^6 - 1^2 + 1\right) - \left((-1)^6 - (-1)^2 + (-1)\right) = (\ 1\ ) - (\ -1) = 2$.

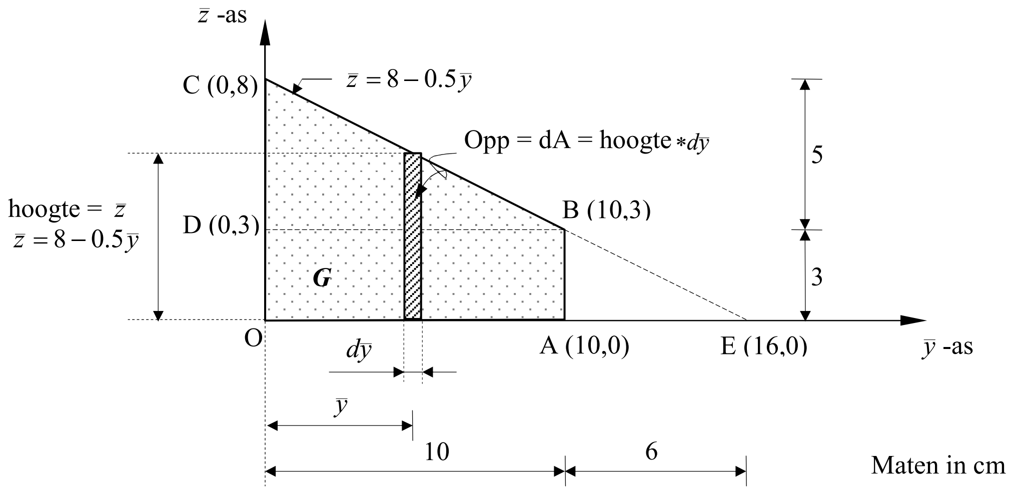
3. Bepaling van x, y en z m.b.v. Gauss eliminatie methode:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 17 \end{array}\right] \begin{array}{cc} -2 & -3 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \\ \downarrow \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 1 * z = 2 & \Leftrightarrow & z = 2 \\ 1 * y + 1 * 2 = 3 & \Leftrightarrow & y = 1 \\ 1 * x + 1 * 1 + 1 * 2 = 3 & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 0,\ \ y = 1 \ \text{ en } \ z = 2.$$

4.a.



Het statisch moment van doorsnede G, figuur OABC t.o.v. de $\bar{z}$ -as ($S_{\bar{z}}$) is de som van alle oppervlakte momentjes $\bar{y} * dA$ (arm $*$ oppervlakte) t.o.v. de z-as. In integraalvorm wordt dat:

$$S_{\bar{z}} = \int_G \bar{y} * dA$$

met $dA = \bar{z} * d\bar{y} = (8 - 0.5\bar{y}) * d\bar{y}$ dus:

$$S_{\bar{z}} = \int_0^{10} \bar{y} * (8 - 0.5\bar{y})\, d\bar{y}\,. \qquad \square$$

4.b. Het statisch moment van doorsnede OABC t.o.v. de $\bar{z}$ -as:

$$S_{\bar{z}} = \int_0^{10} \bar{y} * \left(8 - \frac{1}{2}\bar{y}\right) d\bar{y} = \int_0^{10} \left(8\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{y}^2\right) d\bar{y} = \left[4\bar{y}^2 - \frac{1}{6}\bar{y}^3\right]_0^{10}$$

$$S_{\bar{z}} = 4 * 10^2 - \frac{1}{6} * 10^3 = 233.3 \text{ cm}^3\,.$$

Controle:

$$S_{\bar{z}} = S_{\bar{z},\,\text{rechthoek OABD}} + S_{\bar{z},\,\Delta\,\text{BCD}} = 10 * 3 * 5 + \frac{1}{2} * 10 * 5 * \frac{10}{3} = 233.3\,\text{cm}^3$$ [5]).

4.c. Voor het traagheidsmoment van figuur OABC t.o.v. de $\bar{z}$ -as geldt:

$$I_{\bar{z}} = \int_{\text{OABC}} \bar{y}^2\, dA = \int_0^{10} \bar{y}^2 * \left(8 - \frac{1}{2}\bar{y}\right) d\bar{y} = \int_0^{10} \left(8\bar{y}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^3\right) d\bar{y}$$

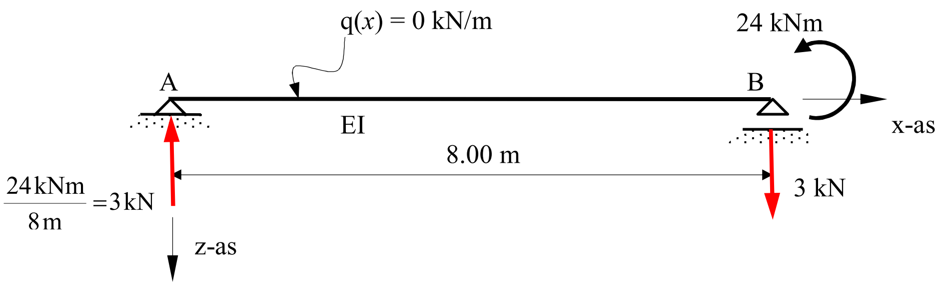
$$I_{\bar{z}} = \left[\frac{8}{3}\bar{y}^3 - \frac{1}{8}\bar{y}^4\right]_0^{10} = \frac{8}{3} * 10^3 - \frac{1}{8} * 10^4 = 1417 \text{ cm}^4$$

Controle:

$$I_{\bar{z}} = I_{\bar{z},\,\text{rechthoek OABD}} + I_{\bar{z},\,\Delta\,\text{BCD}}$$

$$I_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{12} * 3 * 10^3 + 3 * 10 * 5^2\right) + \left(\frac{1}{36} * 5 * 10^3 + \frac{1}{2} * 10 * 5 * \left(\frac{10}{3}\right)^2\right) = 1417\,\text{cm}^4$$

5.



Uit de evenwichtsvergelijkingen $\sum$ M=0 en $\sum$ V=0 volgen de oplegreacties:

$V_A * 8.00$ m - 24 kNm = 0 $\quad \Rightarrow \quad V_A = \dfrac{24}{8} = 3$ kN (↑)

$V_B = 3$ kN (↓).

De dwarskrachtenlijn volgt vrijwel direct uit de oplegreacties: $V(x) = 3$ kN. $V(x)$ kan natuurlijk ook verkregen worden uit (eenheden zijn voor de eenvoud weggelaten, lengten in m krachten in kN):

$$V'(x) = -q(x) = 0$$

dus:

$$V(x) = C_1$$ [6])

[5] Het statisch moment $S_{\bar{z}}$ is natuurlijk ook gelijk aan: $S_{\bar{z}} = S_{\bar{z},\Delta\text{OEC}} - S_{\bar{z},\Delta\text{AEB}}$.

[6] Integratieconstante C_1 kan ook m.b.v. $M_A = 0$ kNm en $M_B = 24$ kNm worden bepaald:

$V(x) = C_1$

dus $M(x) = C_1 x + C_2$

$M(0) = C_2 = 0$ en $M(8) = C_1 * 8 = 24$ dus $C_1 = 3$.

De integratieconstante C_1 volgt uit de oplegreactie bij punt A of B, de dwarskracht net even rechts van steunpunt A (x↓ 0) is 3 kN, dus: $C_1 = 3$. Voor V(x) geldt dus:

$$V(x) = 3 .$$

De momentenlijn volgt uit de evenwichtsrelatie:

$$M'(x) = V(x) = 3$$

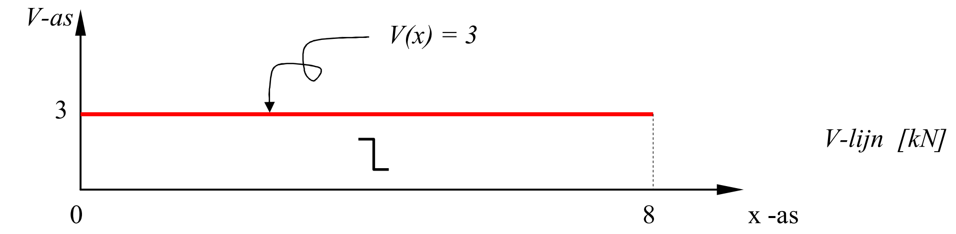
dus:

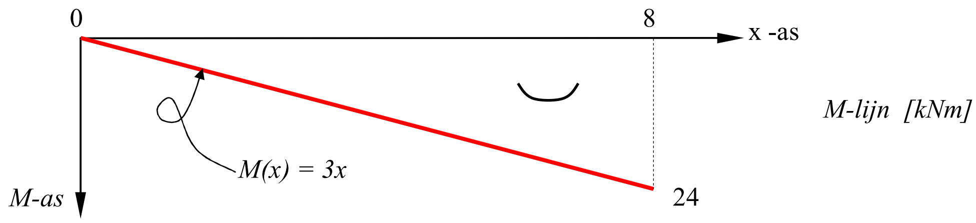
$$M(x) = 3x + C_2$$

Integratieconstante C_2 volgt uit de momenten bij punt A of B, het moment bij steunpunt A is 0 kNm, dus: $C_2 = 0$. Voor M(x) geldt dus:

$$M(x) = 3x .$$

Het wordt niet gevraagd, maar V- en M-lijn worden hier toch voor alle duidelijkheid gegeven.





Voor de hoekverandering φ en zakking w geldt:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{EI} M(x) = \frac{1}{EI} 3x$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} * \frac{3}{2} x^2 \; + C_3 .$$

Op voorhand is de hoekverandering nergens bekend, dus integreren we φ naar x en bepalen w. Uit $w(0) = 0$ en $w(8) = 0$ volgen de integratieconstanten:

$$w'(x) = -\varphi(x) = -\frac{1}{EI} * \frac{3}{2} x^2 \; - C_3$$

$$w(x) = -\frac{1}{EI} * \frac{1}{2} x^3 \; - C_3 x + C_4 .$$

De C_3 en C_4 volgen uit $w_A = w(0) = 0$ en $w_B = w(8) = 0$:

$$C_4 = 0$$

$$-\frac{1}{EI} * \frac{1}{2} 8^3 \; - C_3 * 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_3 = -\frac{32}{EI} .$$

Voor de hoekverandering φ en de zakking w geldt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}x^2 - 32\right)$$ [7])

$$w(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{1}{2}x^3 + 32x\right) \quad .$$

---

[7]Controle: $\varphi(0) = -\frac{32}{\mathrm{EI}}$, $\varphi(8) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}*8^2 - 32\right) = \frac{64}{\mathrm{EI}}$, $w(4) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{1}{2}*4^3 + 32*4\right) = \frac{96}{\mathrm{EI}}$ en dit komt overeen met $\varphi_{\mathrm{A}} = -\frac{\mathrm{ML}}{6\mathrm{EI}} = -\frac{24*8}{6\mathrm{EI}} = -\frac{32}{\mathrm{EI}}$, $\varphi_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{ML}}{3\mathrm{EI}} = \frac{24*8}{3\mathrm{EI}} = \frac{64}{\mathrm{EI}}$ en $w_{\mathrm{midden}} = \frac{\mathrm{ML}^2}{16\mathrm{EI}} = \frac{24*8^2}{16\mathrm{EI}} = \frac{96}{\mathrm{EI}}$.

Formuleblad Toegepaste Wiskunde ribWBK11t & ribWCT11t deel II.

Merkwaardige producten:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Rekenregels voor machten:

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.

Rekenregel voor wortels:
Als $a \geq 0$ en $b \geq 0$ dan geldt:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

ABC-formule:

De oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{of} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Reststelling:
Als $f(x)$ een veelterm is met $f(a)=0$, dan is $f(x)$ deelbaar door $x-a$, ofwel: $f(x) = q(x) \times (x-a)$, waarin $q(x)$ een veelterm is.

Eigenschappen van logaritmen:
Voor $a > 0$, $b > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$, $p > 0$ en $p \neq 1$ geldt:

${}^{g}\log(g^{\alpha}) = \alpha$

$g^{{}^{g}\log(a)} = a$

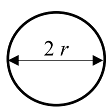
${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$\alpha \times {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{\alpha})$

${}^{p}\log(a) = \dfrac{{}^{g}\log(a)}{{}^{g}\log(p)}$.

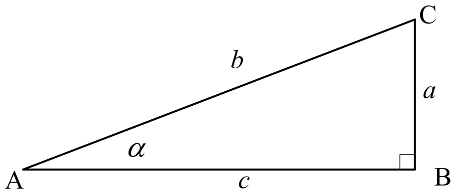
Cirkel:



omtrek cirkel $= 2\pi r$

oppervlakte cirkel $= \pi r^2$

Goniometrie:



$\sin(\alpha) = \dfrac{a}{b}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{c}{b}$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{c}$.

Enkele eigenschappen:

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$ en α in radialen

$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ en α in radialen

$\sin(\alpha) = \sin(2\pi k + \alpha)$ en α in radialen en $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$ en α in radialen

$\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$ en α in radialen

$\cos(\alpha) = \cos(2\pi k + \alpha)$ en α in radialen en $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$.

Som- en verschilformules:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Sinus- en cosinusregel:
In elke driehoek ABC geldt, de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

de cosinusregel:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Radialen (Rad) en graden (°):
1 rad is de grootte van een middelpuntshoek, waarvan de booglengte gelijk is aan de straal;

$1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ$.

Rekenregels voor differentiëren:
De functies u en v zijn differentieerbare functies en c is een constante:

$$c' = 0$$
$$\left(c\,u(x)\right)' = c\,u'(x)$$
$$\left(u(x) + v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)$$
$$\left(u(x)\,v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) \;+\; u(x)\,v'(x)$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) \;-\; u(x)\,v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$
$$u\left(v(x)\right)' = u'\left(v(x)\right) \times v'(x).$$

Standaardafgeleiden	
$f(x)$	$f'(x)$
x^{α}	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^{x}	e^{x}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Opmerking:
$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \approx 2.71828\,.$$

Integreren:
Eigenschappen van een onbepaalde integraal:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad\Leftrightarrow\quad F'(x) = f(x)$$
$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \;=\; \int \left(f(x) + g(x)\right) dx$$
$$\int c\,f(x)\,dx \;=\; c\int f(x)\,dx \qquad \text{mits } c \neq 0$$
$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Eigenschappen van een bepaalde integraal:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Stamintegralen	
$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^{α}	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad \text{mits } \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^{x}	$e^{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$

Kansrekening & Statistiek:

$$0! = 1$$
$$n! = 1 * 2 * \ldots * (n-1) * n$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt:
$E(\underline{x} + \underline{y}) = E(\underline{x}) + E(\underline{y})$
$\sigma(\underline{x}+\underline{y}) = \sqrt{\sigma^2(\underline{x}) + \sigma^2(\underline{y})}\,.$

$\sqrt{n}$ - wet:
Bij een serie n onafhankelijke van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som $\underline{s} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n$ en het gemiddelde $\underline{x}_{gem} = (\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)/n$

$E(\underline{s}) = n\,E(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{s}) = \sqrt{n} * \sigma(\underline{x})$

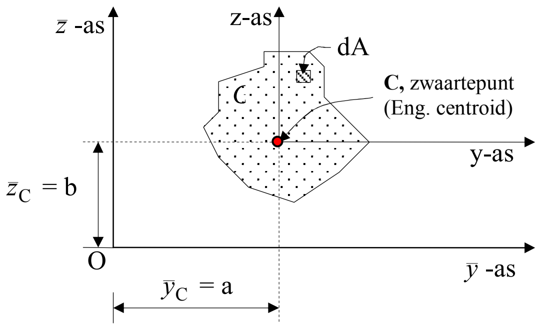
$E(\underline{x}_{gem}) = E(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{x}_{gem}) = \frac{\sigma(\underline{x})}{\sqrt{n}}$

Normale verdeling
Voor een toevalsvariabele $\underline{x}$ die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ ofwel $\underline{x} \sim N(\mu, \sigma)$ geldt:

$$P(\underline{x} \le g) = P\left(\frac{\underline{x}-\mu}{\sigma} < \frac{g-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$P\left(\underline{z} < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$$

waarin $\underline{z}$ standaard normaal verdeeld is, d.w.z.: $\underline{z} \sim N(0,1)$.

Toegepaste Mechanica
Zwaartepunt en traagheidsgrootheid



Het statisch moment van *G* t.o.v. y-, z-, $\bar{y}$ - en $\bar{z}$ -as:

$$S_y = \int_G z \, dA = 0$$

$$S_z = \int_G y \, dA = 0$$

$$S_{\bar{y}} = \int_G \bar{z} \, dA = A * \bar{z}_C = A * b$$

$$S_{\bar{z}} = \int_G \bar{y} \, dA = A * \bar{y}_C = A * a \, .$$

Traagheidsmoment (= kwadratisch oppervlaktemoment) t.o.v. y-, z-, $\bar{y}$ - en $\bar{z}$ -as:

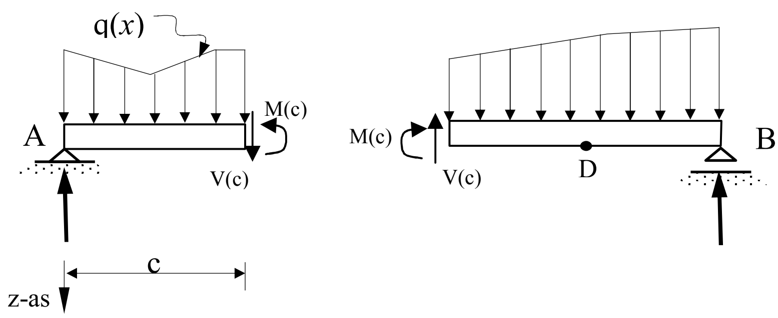
$$I_y = \int_G z^2 \, dA$$

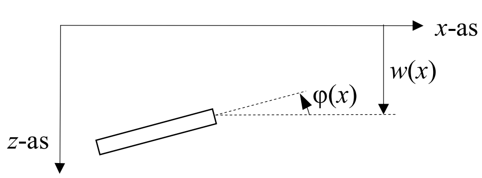
$$I_z = \int_G y^2 \, dA$$

$$I_{\bar{y}} = \int_G \bar{z}^2 \, dA = I_y + A * \bar{z}_C^2 = I_y + A * b^2$$

$$I_{\bar{z}} = \int_G \bar{y}^2 \, dA = I_z + A * \bar{y}_C^2 = I_z + A * a^2 \, .$$

Liggers





Tekenafspraak.

Evenwichtsrelaties voor een klein elementje geeft:

Differentiaalvorm:

$$V'(x) = -q(x)$$
$$M'(x) = V(x)\,.$$

Onbepaalde integraal:

$$V(x) = -\int q(x)\,dx$$
$$M(x) = \int V(x)\,dx\,.$$

Bepaalde integraal:

$$V(d) = V(c) - \underbrace{\int_c^d q(x)\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van belastingsvlak}\\ \text{tussen c en d}}}$$

$$M(d) = M(c) + \underbrace{\int_c^d V(x)\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van dwarskrachtenvlak}\\ \text{tussen c en d}}}\,.$$

de laatste uitdrukking (eigenlijk $\sum_{\text{t.o.v. } x=d} M = 0$) zou ook nog geschreven kunnen worden, als:

$$M(d) = M(c) + \underbrace{V(c) * (d-c)}_{\substack{\text{Moment t.g.v. V(c)}\\ \text{dwarskracht*afstand}}} - \underbrace{\int_c^d q(x) * (d-x)\,dx}_{\substack{\text{statisch moment q-vlak}\\ \text{van c tot d t.o.v. } x=d}}\,.$$

Constitutieve relatie

Differentiaalvorm:

$$\varphi'(x) = \frac{M(x)}{EI}\,.$$

Onbepaalde integraal:

$$\varphi(x) = \int \frac{M(x)}{EI}\,dx\,.$$

Bepaalde integraal (*eerste stelling van het momentenoppervlak*):

$$\varphi(d) = \varphi(c) + \underbrace{\int_c^d \frac{M(x)}{EI}\,dx}_{\substack{\text{oppervlakte van M/EI vlak}\\ \text{tussen c en d}}}\,.$$

Kinematische relatie

Differentiaalvorm:

$$\mathrm{w}'(x) = -\varphi(x)\ .$$

Onbepaalde integraal:

$$\mathrm{w}(x) = -\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bepaalde integraal:

$$\mathrm{w(d)} = \mathrm{w(c)}\ -\ \underbrace{\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{oppervlakte van het } \varphi\text{-vlak} \\ \text{tussen c en d}}}$$

of zo, deze uitdrukking noemt men de *tweede stelling van het momentenoppervlak*

$$\mathrm{w(d)} = \mathrm{w(c)}\ -\ \underbrace{\varphi(\mathrm{c}) * (\mathrm{d} - \mathrm{c})}_{\substack{\text{Kwispeleffect} \\ \text{hoekverdraaiing}*\text{afstand}}}\ -\ \underbrace{\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \frac{\mathrm{M}(x)}{\mathrm{EI}} * (\mathrm{d} - \mathrm{x})\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{statisch moment M/EI-vlak} \\ \text{van c tot d t.o.v. } x=\mathrm{d}}}\ .$$

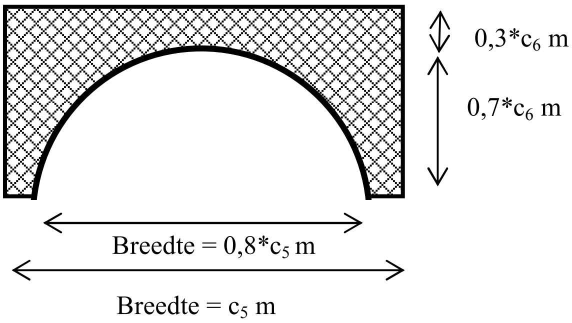
9 Huiswerkopdracht bij het vak TOEGEPASTE WISKUNDE II

Parameters in de opdrachten kunnen afhankelijk zijn van je studienummer, een code bestaande uit zeven cijfers, waarvan het eerste cijfer een nul is, de andere zes kunnen variëren van 0 tot en met 9. Het gaat nu om deze laatste zes cijfers, als er nullen in voorkomen vervang deze door een 6. Je hebt nu de volgende code:

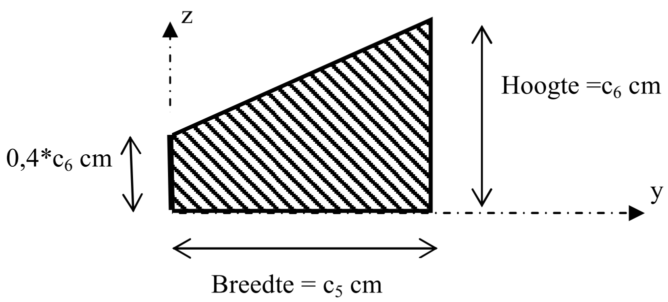
$c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6$ met c_i is 1, 2, 3, ...,9.

Vraagstuk 1:

Gegeven het nevenstaande prefab betonnen element. De dikte van het element is 0,5m en het verloop van de boog is parabolisch. Bereken het aantal kubieke meters beton dat voor dit element benodigd is m.b.v. integraalrekening.



Vraagstuk 2: Gegeven een driehoek. De driehoek stelt een doorsnede van een bepaald profiel voor en heeft breedte c_5 en hoogte c_6.
Bereken het Statisch moment (S) en het traagheidsmoment (I) t.o.v. de y-as en de z-as door gebruik te maken van integraalrekening.



Vraagstuk 3: Maak een serie vergelijkingen waarmee op elk punt in een ligger de dwarskracht, het moment, de hoekverdraaiing en de doorbuiging kan worden berekend. Afhankelijk van uw studentnummer dient U één van de vijf varianten uit te werken. Teken aan de hand van de gevonden vergelijkingen de dwarskrachtenlijn, de momentenlijn en de doorbuigingslijn. Kies zelf een buigstijfheid EI die voldoet aan de doorbuigingseis l/250

1. Uitkragende ligger met puntlast op einde (c_6 = 0 of 1)
2. Uitkragende ligger met q-last (c_6 = 2 of 3)
3. Ligger op twee steunpunten met puntlast in het midden (c_6 = 4 of 5)
4. Ligger op twee steunpunten met q-last (c_6 = 6 of 7)
5. Ligger op twee steunpunten met moment aan één zijde (c_6 = 8 of 9)