Week 03 - ribWBKII
Theorie: Sommeren
Onderwerp: Oppervlakte onder de grafiek

Riemann-som

Definitie:

$\sum_{k=m}^{n} f(k)$ Is de som van de getallen f(k) die ontstaat als k achtereenvolgens de waarden;
m, m+1, m+2,……..,(n ≥ m) doorloopt.

In formulevorm luidt deze definitie

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ... + f(n) \quad (n \geq m)$$

Voorbeeld#1

$$\sum_{k=1}^{6} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

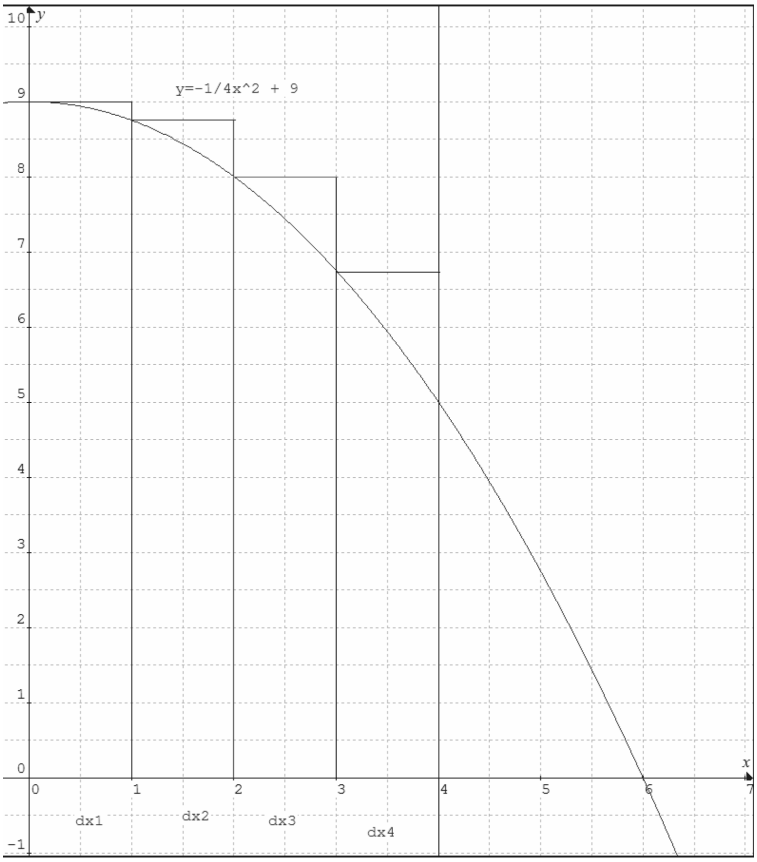
$$\sum_{k=-2}^{3} 3^k = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40\frac{4}{9}$$

$$\sum_{k=3}^{6} (k^2 - 1) = (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + (5^2 - 1) + (6^2 - 1) = 82$$

Gevraagd:
Bij benadering de oppervlakte van het gebied dat wordt begrensd door de grafiek van f, de X-as en de verticale lijnen x = 0 en x = 4 (zie figuur hieronder).

Omdat de grafiek van f geen rechte lijn is, kunnen we de gevraagde oppervlakte niet direct berekenen.

f(x) = -1/4x^2 + 9



Oplossing
We verdelen het interval [0,4] in vier gelijke deelintervallen en benaderen vervolgens de oppervlakte door de som van de oppervlakten van de rechthoekjes boven elk van de deelintervallen te berekenen

O = (-1/4 * 0^2 + 9) * 1 + (-1/4 * 1^2 + 9) * 1 + (-1/4 * 2^2 + 9) * 1 + (-1/4 * 3^2 + 9) * 1 = 32,5

Als Riemann-som: $\sum_{k=0}^{3}(-\frac{1}{4}k^2+9)*\Delta x$ voor Δx = 1 op interval [0,4]

Of als

$$\sum_{k=1}^{4} f(x_k)*\Delta x \text{ voor } \Delta x = 1$$

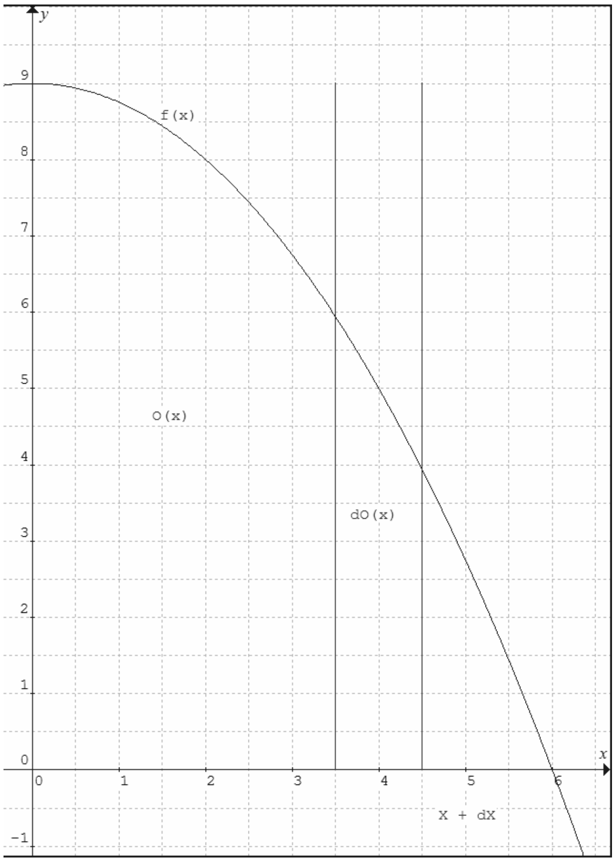
We kunnen de benadering nog meer verfijnen door interval [0,4] in acht gelijke deelintervallen te verdelen.

$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k)*\Delta x = 31{,}625 \text{ voor } \Delta x = ½$$

Als wij dus het aantal deelintervallen onbeperkt laten toenemen, wordt de lengte Δx van de deelintervallen steeds kleiner.

$$O_{a,b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f(x_k) * \Delta x$$

Met andere woorden; de som in de limiet voor n nadert naar oneindig is gelijk aan de werkelijke oppervlakte O op interval [a,b].



Bij voldoende kleine Δx benaderen we de toename ΔO(x) door de oppervlakte van de rechthoek met breedte Δx en hoogte f(x).

$\Delta O(x) \approx f(x) * \Delta x$ **OF** $f(x) = \dfrac{\Delta O(x)}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta O(x)}{\Delta x} = f(x) \rightarrow$

$$\frac{dO(x)}{dx} = f(x)$$

dus O(x) is de primitieve van f

$$O(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Voor x = 0 geldt:

O(0) = 0, zodat

O(0) = F(0) + C = 0

Hieruit volgt;

C = - F(0)

Zodat:

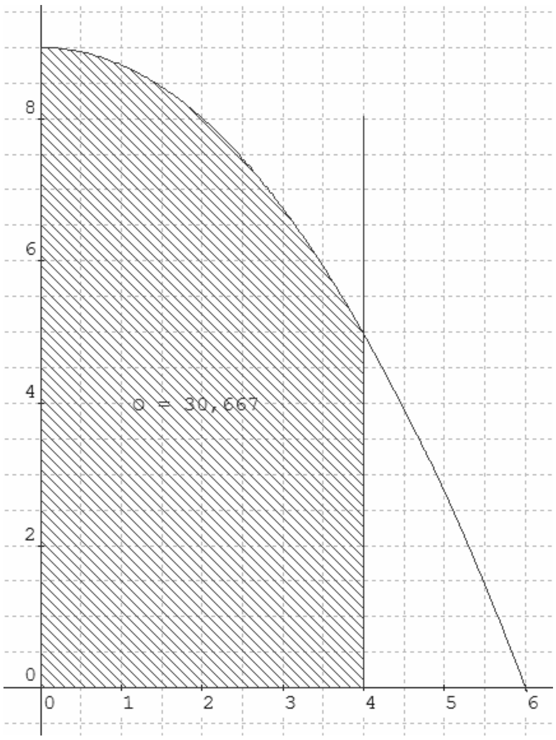
O(x) = F(x) – F(0)

Voor x = 4 geldt:

O(4) = $O_{0,4}$ = F(4) – F(0)

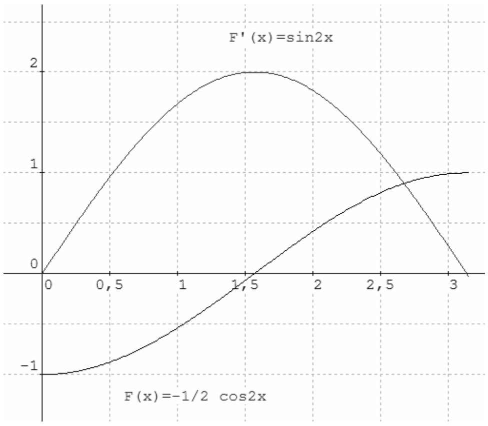
Dit is gelijk aan:

$$O_{0,4} = \int_0^4 (-\tfrac{1}{4}x^2 + 9)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + 9x\right]_0^4 = (-\frac{1}{12}*4^3 + 9*4) - (-\frac{1}{12}*0^3 + 9*0) = -\frac{16}{3} + 36 = 30\frac{2}{3}$$



Voorbeeld#2

Gevraagd:
De oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f(x) = sin2x, interval [0, ½ π]

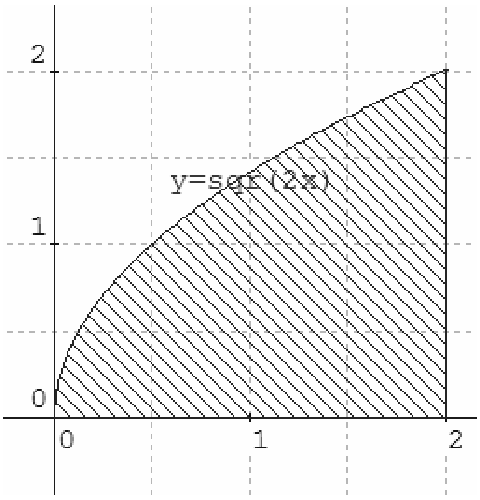


Oplossing:

$$O_{0,\frac{1}{2}\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2x dx = [-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = (-\frac{1}{2}\cos(2*\frac{\pi}{2})) - (-\frac{1}{2}\cos(0)) = (\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 1$$

Voorbeeld#3

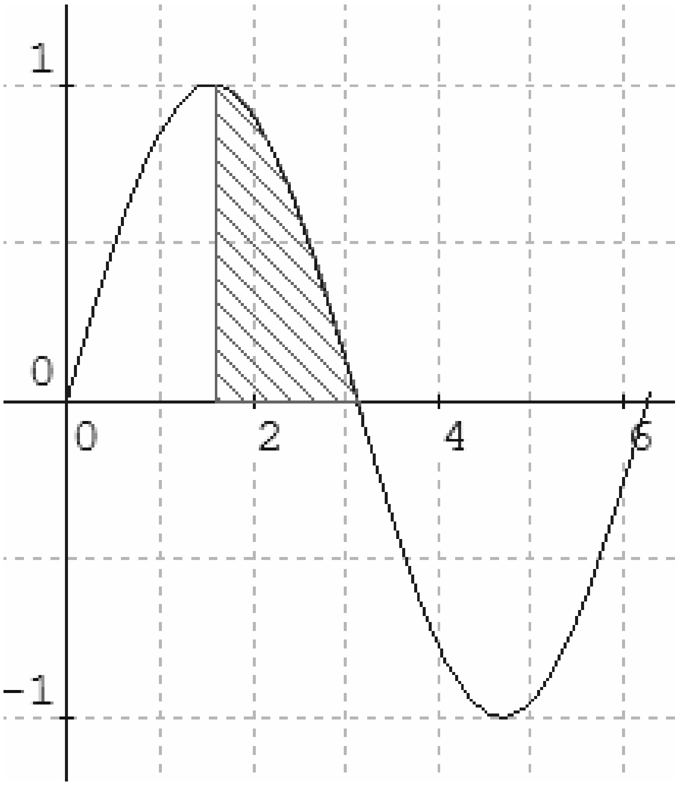
Gevraagd:
Bereken de oppervlakte O van het gebied onder de grafiek van $f(x) = \sqrt{2x}$ op interval [0,2]



$$O_{0,2} = \int_0^2 \sqrt{2x}dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{2x}\right]_0^2 = (\frac{2}{3}*2*\sqrt{2*2}) - (\frac{2}{3}*0*\sqrt{2*0}) = {}^{8}\!/_{3} = 2\frac{2}{3}$$

Voorbeeld#4

Gevraagd:
Bereken de oppervlakte O van het gebied onder de grafiek van f(x)=sin x op interval [1/2π, π]



$$O = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos\frac{1}{2}\pi) = 1 + 0 = 1$$