Week 01 - ribWBKII

Theorie: Stelsel lineaire vergelijkingen
Onderwerp: Gauss Eliminatiemethode en Substitutiemethode

Stelsel lineaire vergelijkingen of eerstegraadsvergelijkingen

a. Wordt toegepast voor het bepalen van een snijpunt van twee elkaar snijdende lijnen.
b. Hiervoor twee methoden om tot een oplossing te komen
   a. Eliminatiemethode
   b. Substitutiemethode

Definitie
Het bij elkaar horend aantal eerstegraadsvergelijkingen waaraan de onbekenden gelijktijdig moeten voldoen, heet een stelsel van lineaire vergelijkingen (in x en y).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

a, b en c zijn constanten en x en y zijn de onbekenden.

Theorie eliminatiemethode
a. werk breuken weg
b. pas de volgorde van de termen zo aan dat gelijksoortige termen onder elkaar staan.
c. Vermenigvuldig beide regels zodanig dat de coefficienten voor één van de onbekenden hetzelfde en tegengesteld zijn, zodat na optelling van beide regels de onbekende geëlimineerd is.
d. Reken de waarde van de overgebleven onbekende uit.
e. Substitueer de gevonden waarde in de andere regel en reken de waarde uit van de andere onbekende.

Theorie substitutiemethode
a. Gebruik één van de vergelijkingen om de ene onbekende uit te drukken in de andere.
b. Substitueer deze onbekende in de andere vergelijking en los deze op.
c. Bereken met deze oplossing de waarde van de andere onbekende.

Indentiek/afhankelijk
a. Is een geval waaraan oneindig veel oplossingen aan voldoen, er is namelijk maar één vergelijking na substitutie of eliminatie waarmee twee onbekenden moeten worden opgelost.

Strijdig

a. Is een geval waarin geen oplossing is waaraan beide vergelijkingen aan voldoen.

Theorie bij een stelsel van meer dan 2 vergelijkingen

a. Bij gebruik van de eliminatiemethode moet het stelsel herleid worden tot een stelsel waarin twee vergelijkingen zitten met twee onbekenden.

Voorbeeld #1

Eliminatiemethode

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right| \quad \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ -2x + 3y = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ -y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6 = 10 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Voorbeeld #2

Eliminatiemethode

$$\begin{cases} t/3 + s/5 = 5 \\ 3s - 5t = 15 \end{cases} \left| \begin{matrix} 15 \\ 1 \end{matrix} \right| \quad \begin{cases} 5t + 3s = 75 \\ -5t + 3s = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 5t + 3s = 75 \\ 6s = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} 5t + 45 = 75 \\ s = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 6 \\ s = 15 \end{cases}$$

Voorbeeld #3

Eliminatiemethode

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 18 \\ x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \right| \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ -x_2 = -2 \\ x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_2 = 2 \\ 2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6 + 2 = 10 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x1 = 1 \\ x2 = 2 \\ x3 = -2 \end{cases}$$

OF

Gauss eliminatiemethode

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 4 & 5 & -2 & 18 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \downarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$-x_2 = -2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2$
$-3x_3 = 6 \quad \rightarrow \quad x_3 = -2$
$2x_1 + 6 + 2 = 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$

Met de TI-83/84

De matrixeditor gebruiken

Druk op:

2nd [matrix] ◄

```
NAMEN WISK EDIT
1:[A] 3×4
2:[B] 1×1
3:[C] 1×1
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

Druk op:

Enter

3 enter 4 enter

2 enter 3 enter -1 enter 10 enter
4 enter 5 enter -2 enter 18 enter
0 enter 1 enter -3 enter 8 enter

```
MATRIX[A] 3 ×4
[ 2      3      -1     -
[ 4      5      -2     -
[ 0      1      -3     -
```

```
MATRIX[A] 3 ×4
- 3      -1      10     ]
- 5      -2      18     ]
- 1      -3      8      ]
```

```
1,4=10
```

Druk op:

2nd matrix ►▲▲▲▲▲ enter

```
NAMEN MATH EDIT
0↑cummSom(
A:rijEchVorm(
B:redRijEchVorm(
C:rijWissel(
D:rij+(
E:*rij(
F:*rij+(
```

```
redRijEchVorm(
```

Druk op :

2nd matrix enter enter

```
redRijEchVorm([A
]
     [[1  0  0  1  ]
      [0  1  0  2  ]
      [0  0  1  -2]]
```

[1 0 0 1] vertegenwoordigt $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ of $x_1 = 1$
[0 1 0 2] vertegenwoordigt $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 2$ of $x_2 = 2$
[0 0 1 -2] vertegenwoordigt $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = -2$ of $x3 = -2$

Voorbeeld #4

Eliminatiemethode

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 9 \\ 3x + 5y + 6z = 17 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -2 \\ \\ \end{array} \right| \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 17 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -3 \\ \\ \end{array} \right|$$

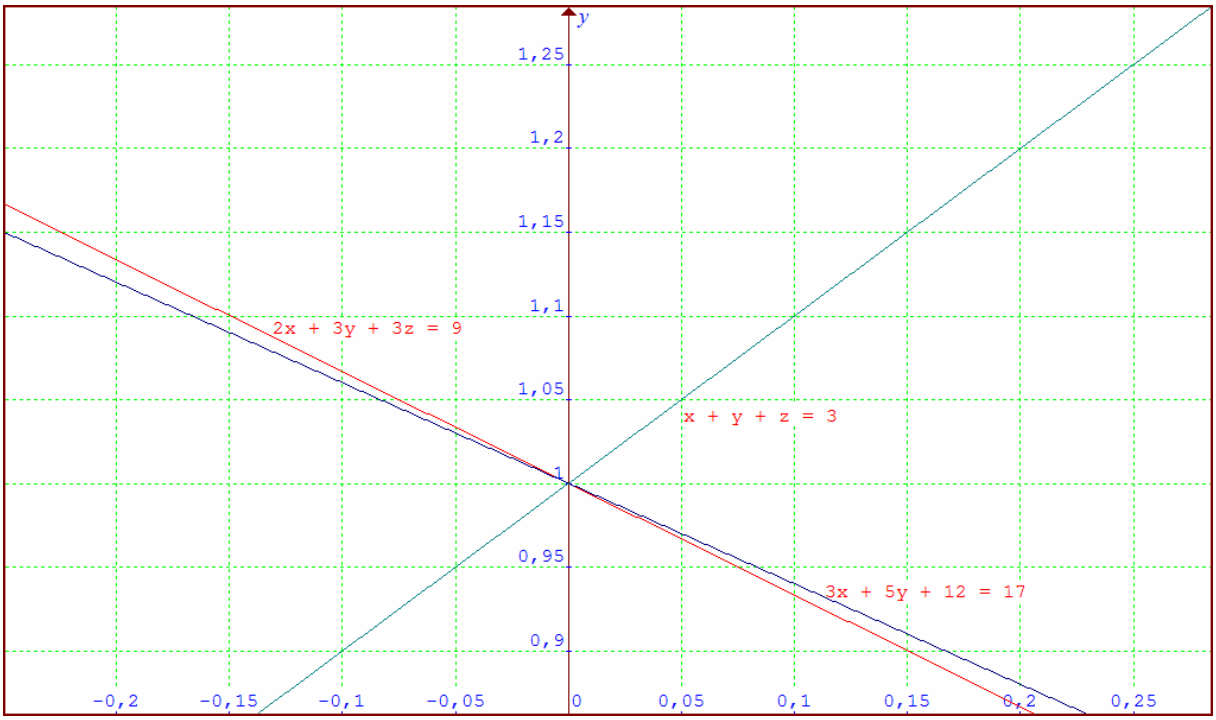
$$\begin{cases} -3x - 3y - 3z = -9 \\ y + z = 3 \\ 2y + 3z = 8 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -2 \\ \\ \end{array} \right| \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

<u>Gauss eliminatiemethode</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 9 & \downarrow & \\ 3 & 5 & 6 & 17 & & \downarrow \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & \downarrow \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}$$

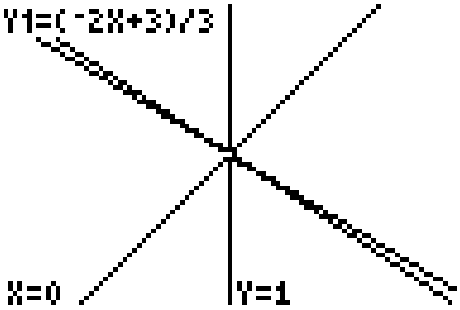


Met de TI-83/84

De matrixeditor gebruiken

```
redRijEchVorm([A
]
[[1  0  0  -5.5E-1...
 [0  1  0  1       ...
 [0  0  1  2       ...
```

1x = 0	of	x = 0
1y = 1	of	y = 1
1z = 2	of	z = 2



<u>Ga dit zelf na !</u>

Substitutiemethode

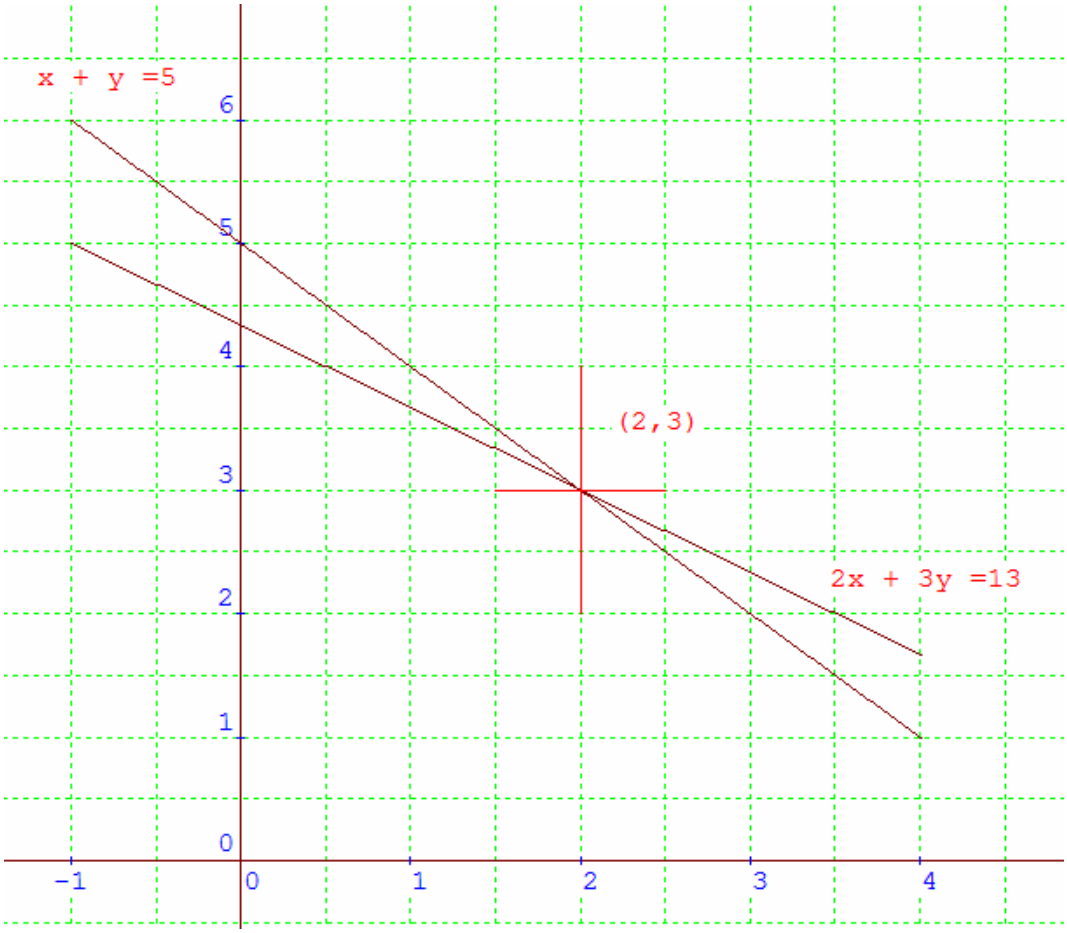
Voorbeeld#5

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ 2(5-y) + 3y = 13 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ 10 + y = 13 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$



Indentiek

$$\begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ 3p = 11 + 2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ 3p - 2q = 11 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right| \quad \begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ -6p + 4q = -22 \end{cases}$$

p ∞ en q ∞ (oneindig veel oplossingen)

of

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 22 & -2 \\ 3 & 2 & 11 & \downarrow \end{array} \right) \qquad \left(\begin{matrix} 6 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

$6p - 4q = 22$
$0p - 0q = 0$ ► aantal oplossingen oneindig.

Strijdig

$$\begin{cases} s = 1 - t \\ -3t = 3s + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} s + t = 1 \\ -3s - 3t = 2 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right| \begin{cases} 3s + 3t = 3 \\ -3s - 3t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3s + 3t = 3 \\ 0 + 0 = 5 \end{cases}$$ ► er zijn geen oplossingen

Of

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & \downarrow \end{array} \right) \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} \right)$$

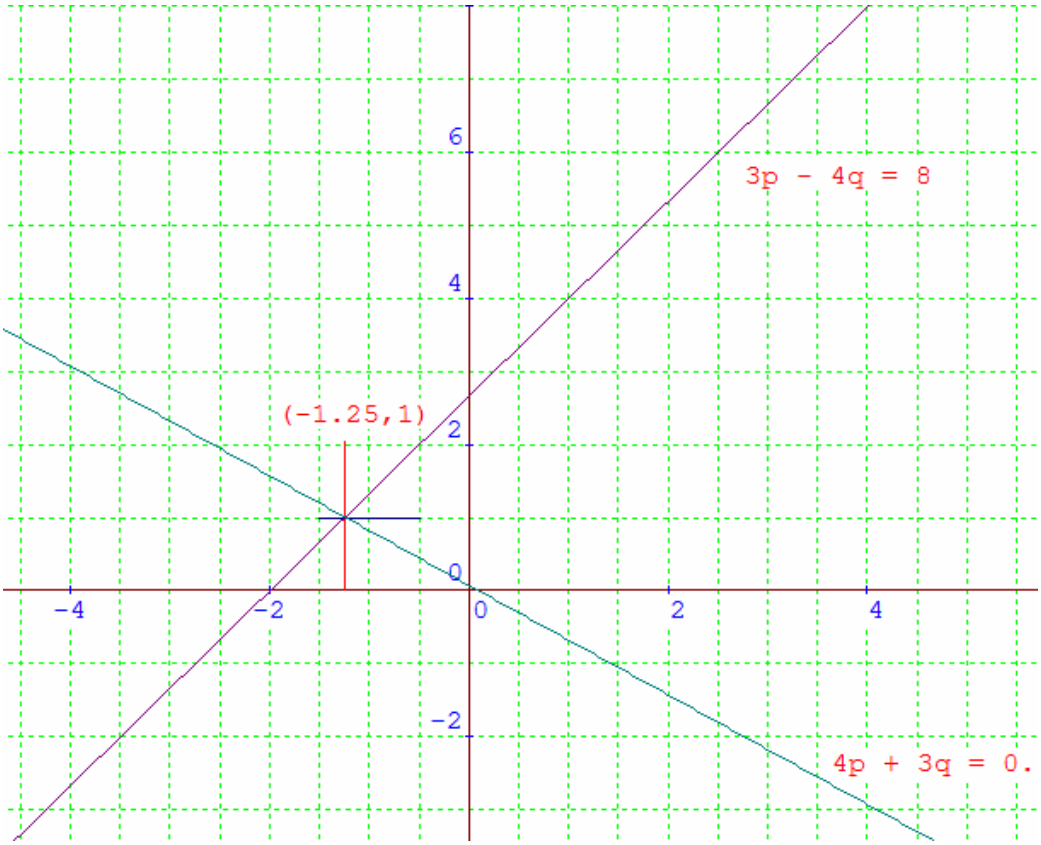
$1s + 1t = 1$
$-0s - 0t = 5$ ► er zijn geen oplossingen

Voorbeeld#6

$$\begin{cases} 3p - 4q = 8 \\ 4p + 3q = ¼` \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right| \quad \begin{cases} 9p - 12q = 24 \\ 16p + 12q = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 4q = 8 \\ 25p \quad = 25 \end{cases}$$

$3 * 1 - 4 * q = 8 \rightarrow -4q = 5 \rightarrow q = -5/4 = -1{,}25$
$p = 1$

of

$$\left(\begin{matrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & ¼ \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right. \right) \left(\begin{matrix} 3 & 4 & 8 \\ 25 & 0 & 25 \end{matrix} \right)$$

q = -1,25
p = 1