De uitvinding van de Cirkel

Johan Gielis

Geniaal bvba, Nottebohmstraat 8, B-2018 Antwerpen

1. Inleiding

Al heel jong ontdekken kinderen het verschil tussen een vierkant, een driehoek en een cirkel. Ze leren dit aan de hand van tekeningen en diverse objecten. Zo kunnen ze gaandeweg vormen en patronen leren onderscheiden in de wereld rondom hen. Later, reeds in het lager onderwijs, worden gaandeweg meerdere figuren aangeleerd en leren ze oppervlakte en omtrek van enkele figuren te berekenen. In het middelbaar onderwijs echter zullen ze leren dat een euclidische driehoek niet die plastic driehoek is die ze als kleuter leerden kennen, en een echte meetkundige kubus komt niet overeen met die houten blokken. Een CD-tje is niet echt een cirkel en de stam van een boom is wel rond, maar geen Echte cirkel. Wereldse vormen zijn vierkantig, driehoekig, cirkelvormig, maar geen Echte vierkanten, driehoeken of cirkels. Erger dus, van dan af worden vormen gereduceerd tot abstracte objecten, die niet eens in een wereldse vorm bestaan! Als Galileo Galilei zegt dat het boek van de natuur geschreven is in de taal van de meetkunde, van driehoeken, vierkanten en cirkels, is dit wel heel optimistisch.

Een driehoek heeft drie hoeken en drie rechte zijden, en een vierkant heeft vier precies rechte hoeken en vier rechte zijden en de kleinste afwijking van deze regels levert andere vormen op. De meetkunde is dan van iets herkenbaars verworden tot een taal die weliswaar nuttig is, al was het maar om te leren logisch te denken, maar die niets met de echte wereld te maken heeft. Een cirkel is het meest volmaakte object, zonder zijden noch hoeken. In meer abstracte zin zijn vormen met dihedrale D_n of cyclische symmetrie Z_n subgroepen van O(2). Pas later, in de lessen natuurkunde, of in hoger onderwijs, leren we dat wiskunde - en meetkunde in het bijzonder - zeer geschikt zijn om *modellen* over de werkelijkheid te construeren. Hierbij horen dan de analyse, in bijzonderheid differentiaalvergelijkingen. Het succes van de wiskunde om de werkelijkheid in modellen te beschrijven is werkelijk heel groot. De fysicus Eugene Wigner spreekt dan over de « unreasonable effectiveness of mathematics »

Echter, niettegenstaande belangrijke inspanningen van wiskundeleraren, zijn tegen die tijd talrijke kinderen en adolescenten de draad allang kwijt. In het middelbaar en in het hoger onderwijs is voor de meeste leerlingen de cursus wiskunde (inclusief meetkunde) nauwelijks meer dan een noodzakelijk kwaad, zelfs in wetenschappelijke richtingen, vraag dat maar aan biologen. Ongetwijfeld is één van de hoofdredenen dat de visualisatie die zo belangrijk was bij de ontwikkeling van het kind, in het hoger onderwijs niet langer wordt nagestreefd.

Ik meen echter dat er een nieuwe, interessante manier is om diverse van deze problemen op te lossen. Een aanpak waarbij het verband tussen meetkunde en natuurlijke (en cultuur-) vormen kan worden gelegd, waarbij verschillende meetkundige vormen terug te brengen zijn tot één enkele, eenvoudige formule, die kan worden gebruikt in het middelbaar onderwijs. Deze formule toont hoe verschillende vormen, zoals veelhoeken of kegelsneden, speciale gevallen zijn. Alles begint bij cirkel en vierkant [1].

2. Lamé-ovalen en supercirkels

Hoewel cirkel en een vierkant altijd als twee compleet verschillende figuren worden voorgesteld, kunnen ze worden beschreven door één enkele wiskundige vergelijking. Vertrekkende vanuit de vergelijking van een cirkel $x^2+ y^2 = 1$ moeten we eigenlijk weinig meer doen dan het kwadraat te vervangen door n, dat dan staat voor elk reëel getal. Omdat dan ook oneven machten mogelijk zijn moeten dan wel absolute waardestrepen worden gebruikt, anders krijgen we vormen die gekke dingen gaan doen. De algemene formule wordt dan :

$$|x|^n + |y|^n = 1 \qquad (1)$$

De prachtige resultaten zijn de zogenaamde supercirkels [2,3]. Het is duidelijk dat de cirkel dan maar 1 speciaal geval is van een oneindig grote verzameling van supercirkels, namelijk voor n = 2. Als n erg groot wordt duikt een vierkant op, maar wiskundig is het omschreven vierkant enkel bepaald als n naar oneindig gaat. Als een exponent kleiner dan 2 wordt gekozen krijgen we bijvoorbeeld het ingeschreven vierkant voor n = 1, of een asteroïde voor n = 2/3. Voor n = 0 krijgen we gewoon het assenkruis. De algemene naam voor deze figuren is Supercirkels, hier met hoofdletter. Alle vormen met exponent n groter dan 2 zijn dan supercirkels, als n kleiner is dan 2 krijgen we zogenaamde subcirkels. De cirkel (n = 2) lijkt de precieze overgang tussen deze twee groepen. Maar in feite is n=1 de overgang tussen supervormen met n en supervormen met exponent 1/n, of tussen convexe en concave figuren.

Het is fascinerend als je in je verbeelding tracht het assenkruis wiskundig te vervormen door n van nul tot oneindig te laten variëren langsheen alle reële getallen. Dit geeft aan deze vormen een heel dynamisch karakter. Aanvankelijk zie je hoe zich vanuit een assenkruis een asteroïde ontwikkelt, die zich dan verder ontwikkelt tot het ingeschreven vierkant. Dan blazen de zijden van dit vierkant zich op om dan over te gaan tot de cirkel. Als je dan deze cirkel verder laat groeien zal je aanvankelijk een tussenvorm zien tussen cirkel en vierkant, maar al snel, wanneer n groter dan 10 wordt, begint de vorm heel snel op een vierkant te gelijken (zie figuur 1, rij 5 voor m=4).

Ook bij ellipsen met een korte en een lange as met vergelijking $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ kunnen we de vergelijking op een gelijkaardige manier aanpassen als voor de cirkel, en het kwadraat vervangen door een algemene exponent n. De vergelijking van de superellips is dan:

$$|(x/a)|^n + |(y/b)|^n = 1 \qquad (2)$$

Zo kan je vanuit het assenkruis een ellips vervormen tot een ruit (voor n = 1) en tot een rechthoek voor $n \to \infty$. De superellipsformule is echter meer algemeen omdat die ook de mogelijkheid omvat dat a gelijk is aan b, en dan is de supercirkelformule (1) een speciaal geval van de meer algemene superellipsformule (2). De vormen die men door deze superellipsformule kan bekomen noemt men ook wel Lamé-ovalen.

3. Over Supereieren

Supercirkels en superellipsen zijn al lang bekend, eigenlijk al vanaf het midden van de 19e eeuw. Maar het blijft voor mij een mysterie waarom zo een belangrijke ontdekking, namelijk dat cirkel en vierkant zo nauw verwant zijn, zelfs bijna hetzelfde (het enige verschil is de waarde van n), zo weinig aandacht heeft gekregen. Na Gabriel Lamé is er zeer weinig informatie te vinden over supercirkels. Enkel in de jaren zestig en zeventig van de 20e eeuw was er een bepaalde interesse in supercirkels, vanuit architectonisch oogpunt. En deze periode is dan vooral verbonden met de naam Piet Hein, een Deense dichter-wiskundige-genie [3]. De Superellips-Piet-Hein is in Denemarken even bekend als de Zilvervloot-Piet-Hein in Nederland.

Toen in de late jaren vijftig een bepaald plein in Stockholm, Sergel’s Square, aan heraanleg toe was stonden de architecten voor een probleem. Het was een rechthoekig plein, en centraal moest een winkelcentrum komen. Als het winkelcentrum ellipsvormig zou worden, zou de oppervlakte te beperkt zijn. Als het rechthoekig zou worden gebouwd is het winkelcentrum weliswaar zo groot mogelijk, maar zou het verkeer sterk belemmerd worden; auto’s en autobestuurders houden namelijk helemaal niet van rechte hoeken.

De architecten hadden een oplossing, een soort tussenvorm tussen rechthoek en ellips, maar zoals dat gaat in de architectuur werd dat dan een aaneenschakeling van boogjes en rechte stukjes (en dat is ook nog nu zo met de meest gesofisticeerde tekenpakketten). Eén van de architecten was bevriend met Piet Hein en vertelde hem hierover. Piet Hein stelde de oplossing voor in de vorm van een superellips, die de voordelen van rechthoek en ellips in één enkele vergelijking combineert. En zo kreeg Sergel’s Square zijn uiteindelijke superelliptische vorm, met een bijna-rechthoekig winkelcentrum met optimale grootte, en een bijna-elliptische baan er omheen zodat het verkeer zo vlot mogelijk zou kunnen verlopen.

4. Superkwadrieken

Piet Hein ontwikkelde later nog diverse voorwerpen gebaseerd op deze superelliptische vorm. Superelliptische tafels in restaurants hebben het voordeel groot te zijn, maar toch zonder vervelende hoeken waar iedereen tegen aanloopt. Het meest bekend echter zijn Piet Hein's supereieren. Dit zijn drie dimensionale superellipsen, zogenaamde superellipsoïden met een ei-achtig vorm, met dit grote voordeel dat ze echt rechtop kunnen staan zonder om te vallen. Dit wordt veroorzaakt door het *Flachpunkt* van deze vormen. Meer algemeen spreekt men bij deze driedimensionale vormen men over superbollen, superellipsoïden of superkwadrieken. Dergelijke vormen hebben belangrijke toepassingen in computeromgevingen, zowel grafische systemen als beeldherkenning en computervisie, omdat superkwadrieken een bijzonder compacte beschrijving van vormen mogelijk maakt. Deze superkwadrieken worden verkregen door het bolproduct van twee superellipsvormen [4]. De basis hiervoor is de omzetting in poolcoördinaten. Eén bepaalde parametrizatie van superellipsen in poolcoördinaten werd uitgewerkt in [5, 6].

$$r := \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\left|\cos(\phi)\right|\right)^{n} + \left(\left|\sin(\phi)\right|\right)^{n}}} \qquad (3)$$

Men kan deze basisformule voor supercirkels en superellipsen op verschillende manieren verder veralgemenen. Vooreerst hoeven de exponenten n niet gelijk te zijn. Door de exponenten n verschillend te nemen op cosinus en sinus, respectievelijk als n_2 en n_3 verhoogt zeker de flexibiliteit, omdat men dan bij een pseudo-vierkant, of vierkant, de aanliggende zijden kan laten verschillen van elkaar, de ene zijde bijvoorbeeld recht, de aanliggende zijde inbuigend. Door de exponent n_1 worden hier nog extra mogelijkheden toegevoegd.

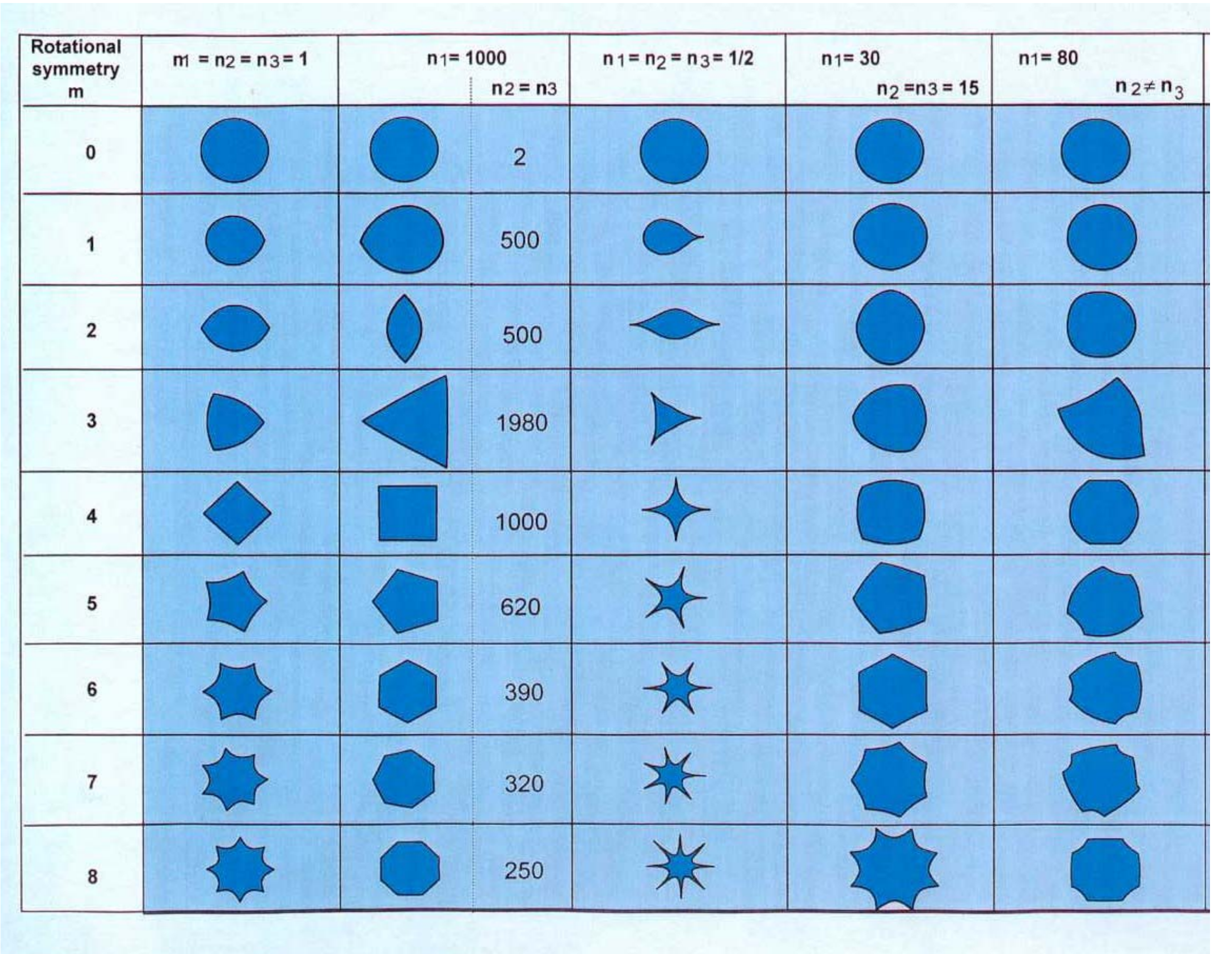
$$r := \frac{1}{\sqrt[n1]{\left(\left|\cos(\phi)\right|\right)^{n2} + \left(\left|\sin(\phi)\right|\right)^{n3}}} \qquad (4)$$

5. Supercirkels bij verschillende verdelingen van het vlak

Een tweede veralgemening betreft de verdeling van het vlak. Bij vierkant en superellipsen in het algemeen, is het vlak verdeeld in vier kwadranten, en dit is ook zo bij vlakke doorsneden van superbollen en superellipsoïden. Dit is is in feite één van de grootste tekortkomingen van superkwadrieken, omdat ze andere symmetrieën niet eenvoudig kunnen weergeven. Maar het vlak kan wel degelijk in meerdere sectoren worden verdeeld. Een verdeling in drie sectoren van 120° bijvoorbeeld maakt het mogelijk om super- en subdriehoeken te maken. Zo ook kunnen diverse andere superveelhoeken worden gemaakt.

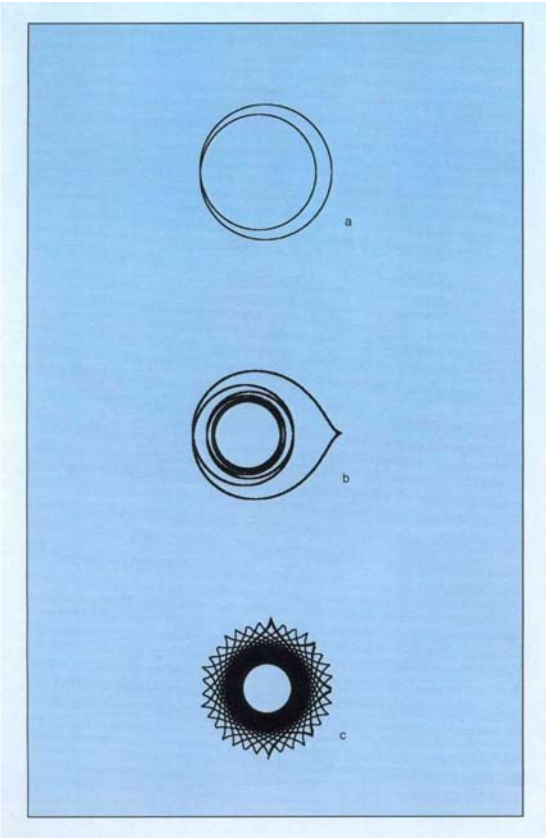
Deze transformatie omvat de berekening van superellipsen voor bepaalde waarden van ϕ , en deze waarden worden dan getekend op een andere hoek. De waarde van de vorm berekend op 90° ($2\pi/4$) in een superellips (m=4) wordt dan getekend op $2\pi/m$. In het geval van een zeshoek dus op 60°. Hierdoor wordt het rechthoekige assenstelsel uit- en invouwbaar als een waaier. In het boek “De uitvinding van de Cirkel” [1] wordt hiervoor een hele elegante analytische vorm gegeven, Supercirkelformule, of Superformule genoemd.

Dit biedt heel grote mogelijkheden. In de analytische vergelijking wordt het aantal sectoren in het vlak bepaald door m. Als het vlak verdeeld wordt in 1 sector van 360° (m=1) kunnen we superéénhoeken maken, bij een verdeling van het vlak in 2 stukken van 180° (m=2) kunnen we supertweehoeken maken. Ook de klassieke regelmatige veelhoeken duiken dan op als één welbepaalde vorm. In Figuur 1 worden een aantal voorbeelden getoond voor verschillende waarden van m en $n_{1,2,3}$.



Figuur 1: Veelhoeken met exponenten $n_{1,2,3}$ verschillend of gelijk bij een verdeling van het vlak in diverse sectoren m.

De formule kan nog algemener worden gemaakt. We kunnen het vlak namelijk ook verdelen in een niet-geheel aantal sectoren waarbij m een rationaal of irrationaal getal kan zijn. Op deze manier kunnen we 1.5-hoeken maken met m = 3/2. Een 3/2-hoek heeft 3 hoeken op 2 omwentelingen, een 5/2-hoek heeft 5 hoeken op 2 omwentelingen. Een pentagram of ster-vijfhoek is hiervan een voorbeeld; om de figuur in 1 vloeiende beweging te tekenen moet je twee keer rond gaan. Een 21/13-hoek sluit pas volledig na 13 omwentelingen en heeft 21 hoeken. De getallen 3/2 en 5/2 geven dan de precieze niet-gehele symmetrie weer van de figuur. Ook hier kunnen we super- en subveelhoeken definiëren. De superellipsen van Lamé en Piet Hein zijn dan 4/1 hoeken.



Figuur 2: Niet-geheelhoeken: a: halfhoek (m=1/2); b: één-achtstehoek (m=1/8) en c: een π-hoek (m=π).

Veelhoeken waarbij de verdeling van het vlak in een rationale verhouding gebeurt, zullen altijd ergens wel sluiten, maar als we een irrationaal getal gebruiken, zal de figuur nooit sluiten. En op deze manier kunnen dan e-hoeken, π-hoeken, $\sqrt{2}$-hoeken, en hoeken volgens de Gulden Snede worden gemaakt. Al deze vormen kunnen we maken met enkel reële getallen, en ze kunnen bovendien dynamisch in mekaar overvloeien, net als bij de supercirkel.

Dit maakt de meetkunde veel flexibeler en aantrekkelijker in vergelijking met de klassieke, starre meetkunde. Piet Hein zei over zijn superellipsen dat « ze ons bevrijden uit de dwangbuis van eenvoudigere eerste en tweedegraadsvergelijkingen, de rechte en de kegelsneden ». Deze algemene formule gaat echter nog verschillende stappen verder dan de supercirkelformule van Piet Hein. De formule kan ook worden beschouwd als een transformatie van het vlak of de ruimte waarbij het assenstelsel als een waaier kan worden open- of toe geplooid, bepaald door m, terwijl de schikking van getallen op de coördinaatsassen ongewijzigd blijft in vergelijking met het orthogonaal stelsel.

Door deze transformatie zijn er bovendien een aantal invarianties. Zo blijven voor gegeven vormfactoren ($n_{1,2,3}$) de oppervlakte en het traagheidsmoment van figuren gelijk, ongeacht de waarde van m. In Figuur 1 hebben bijvoorbeeld de vormen in kolom 2 dezelfde oppervlakte, met uitzondering van de nulhoek of cirkel (m = 0).

5. Allemaal eenheidscirkels

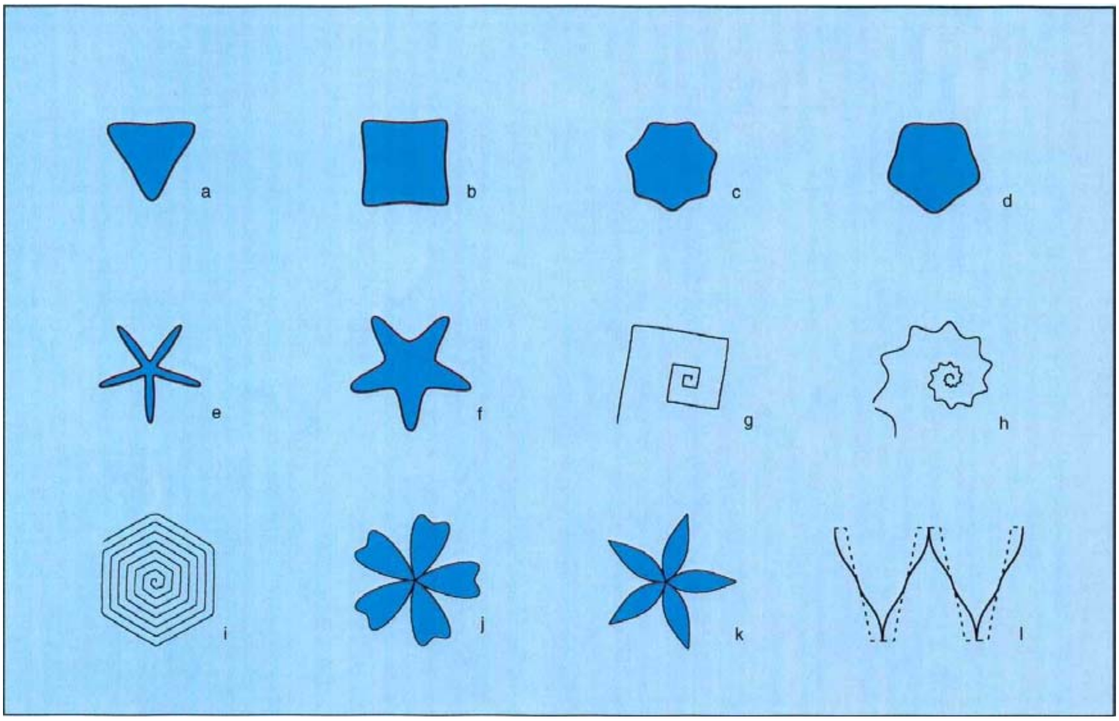
Vooraleer in te gaan op de mogelijkheden voor het onderwijs, moet toch benadrukt worden dat een gigantische veelheid aan vormen nu voorkomt uit één enkele formule. En het zijn allemaal eenheidscirkels in een welbepaalde metriek. Hierdoor kan je eenvoudig aantonen dat alle supervormen Cirkels zijn met alle punten op gelijke afstand van het centrum. Alle punten op een supercirkel liggen dan op afstand 1 van het centrum. De zogenaamde Minkowski *Lp* metrieken zijn hiervan een voorbeeld, met de taximetriek, de Euclidische metriek en de maxmetriek als speciale gevallen. Deze Minkowski metrieken kunnen nog verder worden veralgemeend, omdat de algebraische afstand van een punt op alle supervormen precies is gekend met de nieuwe techniek (zie [1] en figuur 1). Net als de cirkel en de ellips, zijn de klassieke Minkowski-metrieken dan speciale gevallen van onze meer algemene benadering.

Dat maakt van deze formule dan meteen ook een conversieformule. De meetlat waarmee je meet wordt door een hoekafhankelijke metriek aangepast. Je kan de afstanden van een figuur meten met een Euclidische meetlat. De intelligentie die de waarden inleest voor een zeester, kan dan meteen de precieze parameters van de formule weergeven. Maar je kan ook met een rekbare meetlat gaan meten. De intelligentie die de meetresultaten krijgt weet precies hoe de meetlat is uitgerekt in bepaalde richtingen, en kan daardoor ook de waarden invullen in de formule. Deze intelligentie kan een computer zijn. Je kan op de twee manieren gaan meten, het resultaat blijft hetzelfde.

6. Een natuurlijke formule

Als we de begrippen vierkant en driehoekig dan werkelijk meetkundige parameters kunnen toekennen die ook kleine afwijkingen toelaten, krijgen ook ineens die vorm van die plastic driehoeken en de houten blokken uit de kindertijd opeens zin en betekenis binnen een logisch en meetkundig kader. Vooral omdat blijkt dat het Euclidisch vierkant, of de perfecte cirkel ook maar speciaal gevallen zijn van een meer algemene formule, waarin ook natuurlijke vormen naadloos passen. Minkowski-metrieken die tot nog toe enkel een vooral theoretische betekenis hadden, met uitzondering van drie speciale gevallen, krijgen nu een direct verband met de wereld rondom ons.

Vierkantige stengels, of vijftallig-symmetrische zeesterren, kunnen op deze wijze in een vormformule worden ingepast. De figuur 3 maakt dit duidelijk. De bovenste rij figuren 3a-d zijn doorsneden van diverse plantenstengels. De vorm van de stengel hangt sterk samen met de wijze waarop bladeren zijn gerangschikt rond de stengel. Vierkante stengels komen o.m. voor bij vierkante bamboes, bij lipbloemigen (dovenetel en verschillende kruiden als salie, munt en tijm). Zelfs de jonge stengels van teak-bomen zijn vierkant en meerhoekige stengels komen bijvoorbeeld voor bij bramen, reuzenbalsemien, paardestaarten (*Equisetum*) en bosrank (*Clematis*). Andere uitstekende voorbeelden vinden we zeker in vetplanten. Zeestervormen (figuur 3e en 3f) worden nu ook door één enkele formule gegeven, net als de superellipsen. De vormen 3a tot 3f verschillen onderling slechts in drie (3) getallen. In het boek 'De uitvinding van de Cirkel', worden honderden foto's van natuurlijke vormen getoond, zowel uit organische als anorganische natuur.



Figuur 3: Natuurlijke veelhoeken in poolcoördinaten: doorsneden van stengels, zeesterren, schelpen en bloemen (zie hoofdtekst). In 3l zijn de trigoniometrische functies van 3j en 3k weergegeven in X,Y-coördinaten.

Als conversieformule, of als metriek, kan je de Superformule ook gaan toepassen op andere vergelijkingen, zoals spiraalfuncties (Figuur 3g, 3h en 3i) of trigoniometrische functies (Figuur 3j, 3k en 3l), die zijn ingeschreven in een bepaalde superveelhoek. Elke functie heeft namelijk een grafische representatie – niet noodzakelijk in poolcoördinaten - voor elke mogelijke supervorm.

De logaritmische spiraal wordt vaak als één van de meest vooraanstaande voorbeelden wordt gebruikt om de band tussen biologie en wiskunde. Deze functie levert het verband tussen de reeks van Fibonacci en de schelpen van Nautilus soorten. Met onze conversieformule kan de logaritmische spiraal ook hoekafhankelijk worden vervormd. En dan blijkt dat de meeste schelpen wel dergelijke uitstulpingen hebben -kammen of varices genaamd (Figuur 3h), en niet volgens een perfecte logaritmische spiraal groeien. Echte bloemen zijn ingeschreven in superveelhoeken (Figuur 3j en 3k). Planten en bloemen, zeesterren en schelpen maken ons duidelijk dat de natuur is op een SuperCirkelvormige manier gekromd.

7. Toepassingen in het onderwijs

Naast een nieuwe benadering van natuurlijke vormen, kan deze aanpak een aantal van de problemen die in de inleiding werden geschetst, helpen oplossen. Wel is opgemerkt dat wat beschreven is geen vaste weg is of kan zijn. Eerder zie ik de beschreven ideeën als een leidraad. De ideeën in dit artikel kunnen op verschillende manieren worden aangebracht, op diverse moeilijkheidsgraden en ze kunnen naadloos worden geïntegreerd met bestaande wiskundige technieken.

Enkele belangrijke aandachtspunten:

1. De bijzondere eenvoud van de techniek. De Superformule is nauwelijks moeilijker dan de Stelling van Pythagoras, met een combinatie van trigoniometrische basisfuncties sinus en cosinus en machtsverheffing. Diverse vormen krijgen een precieze meetkundige weergave, zoals zeester of schelpvormen. Elke vorm wordt gereduceerd tot zijn wiskundige of meetkundige essentie.
2. De veelheid van mogelijkheden : men kan nu meetkunde-onderwijs geven met een emmer vol met zeesterren, bloemen, bladeren, schelpen. …. Men kan een meetkundige tuin aanleggen, met planten met bijzonder opvallende meetkundige vormen. Men kan de leerlingen wijzen op vormen uit architectuur en design, en het verband met natuurlijke vormen.
3. Deze vormen kunnen op een eenvoudige manier worden weergegeven op een rekenmachine met grafische weergave. De gebruikte figuren werden gemaakt met MathCad, dus ook elk geavanceerd programma kan worden gebruikt, ook programma's zoals Derive. Men kan ook software ontwikkelen waarbij in de computer de precieze vorm kan worden aangepast.

4. De vormen kunnen op een dynamische manier in elkaar overvloeien door een verandering van de parameters van de vergelijking langsheen de as van de reële getallen te laten variëren.

Mijns inziens kan deze aanpak de interesse voor de wiskunde behoorlijk verhogen met talrijke mogelijkheden in onderzoek en techniek. Door het dynamische karakter van het geheel wordt meetkunde letterlijk meer kneedbare materie. De techniek kan worden aangeleerd in nauwelijks enkele lesuren, in een themales. De formules zijn eenvoudig in te brengen in een rekenmachine met grafische weergave. Er zijn overlappingen mogelijk met de lessen biologie, esthetische vorming, en alle vakken waarin vormen of patronen op enige wijze voorkomen. In het technisch onderwijs is er nu trouwens al een eindwerk gemaakt rond de superformule en optimalisatie [7].

8. Referenties

1. **J. Gielis,** *De uitvinding van de Cirkel*. Geniaal bvba/Maklu NV (2001; ISBN 90-6215-792-0)
2. **G. Loria**, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*. B.G.Teubner, Leipzig-Berlin. (1910).
3. **M. Gardner,** *Mathematical Carnival,* Knopf 1975; Mathematical Association of America 1989, hoofdstuk 18.
4. **A. Jacklic, A. Leonardis en Solina F.**, *Segmentation and recovery of superquadrics* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).
5. **H. Löfelman en E. Gröller,** *Parametrizing Superquadrics***.** Technical Report. Institut für Computergrafik, Technische Universiteit Wenen, Oostenrijk (1994).
6. **B. Beirinckx,** *Supervormen, wortels en bamboe*. Ingenieursthesis, Karel De Grote Hogeschool, Antwerpen (1997).
7. **J. De Vos**, *Optimaal voor optimalisatie* - *Optimalisatie in de natuur en verpakkings-materiaal*, Eindwerk 6 BIOT, Afdeling Biotechnieken, Provinciaal Instituut voor Tuinbouwonderwijs PITOM, Mechelen (2002).