

# Hoofdstuk 9

## *Afgeleiden*

Marnix Van Daele

Marnix.VanDaele@UGent.be

Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica  
Universiteit Gent

# Toename van een functie

Zij  $y = f(x)$  gedefinieerd in de omgeving van een waarde  $x$ .  
De **toename** (of **aangroeiing**) van  $y = f(x)$  in  $x$  is gedefinieerd als

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Voorbeeld : voor  $y = x^2$  is

$$\Delta y = \Delta(x^2) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2(\Delta x)x + (\Delta x)^2$$

Opmerking :  $y = f(x)$  is continu in  $x_0$  betekent :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

# Afleidbaarheid in een punt

$y = f(x)$  is **afleidbaar in**  $x_0 \in \text{def}(f)$  als

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ bestaat en eigenlijk is.}$$

Deze limiet, notatie  $f'(x_0)$ , heet **de afgeleide** van  $f$  in  $x_0$

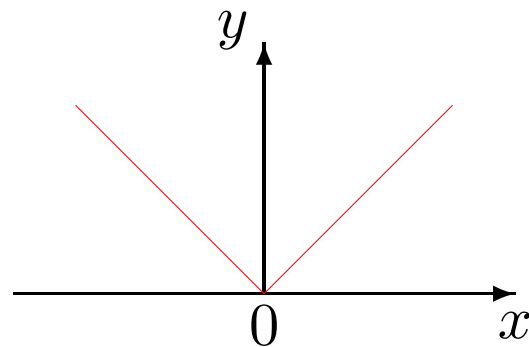
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiet  $\iff$  afgeleide  $f'(x_0)$

rechterlimiet  $\iff$  rechterafgeleide  $f'_R(x_0)$

linkerlimiet  $\iff$  linkerafgeleide  $f'_L(x_0)$

# Voorbeeld : $f(x) = |x|$

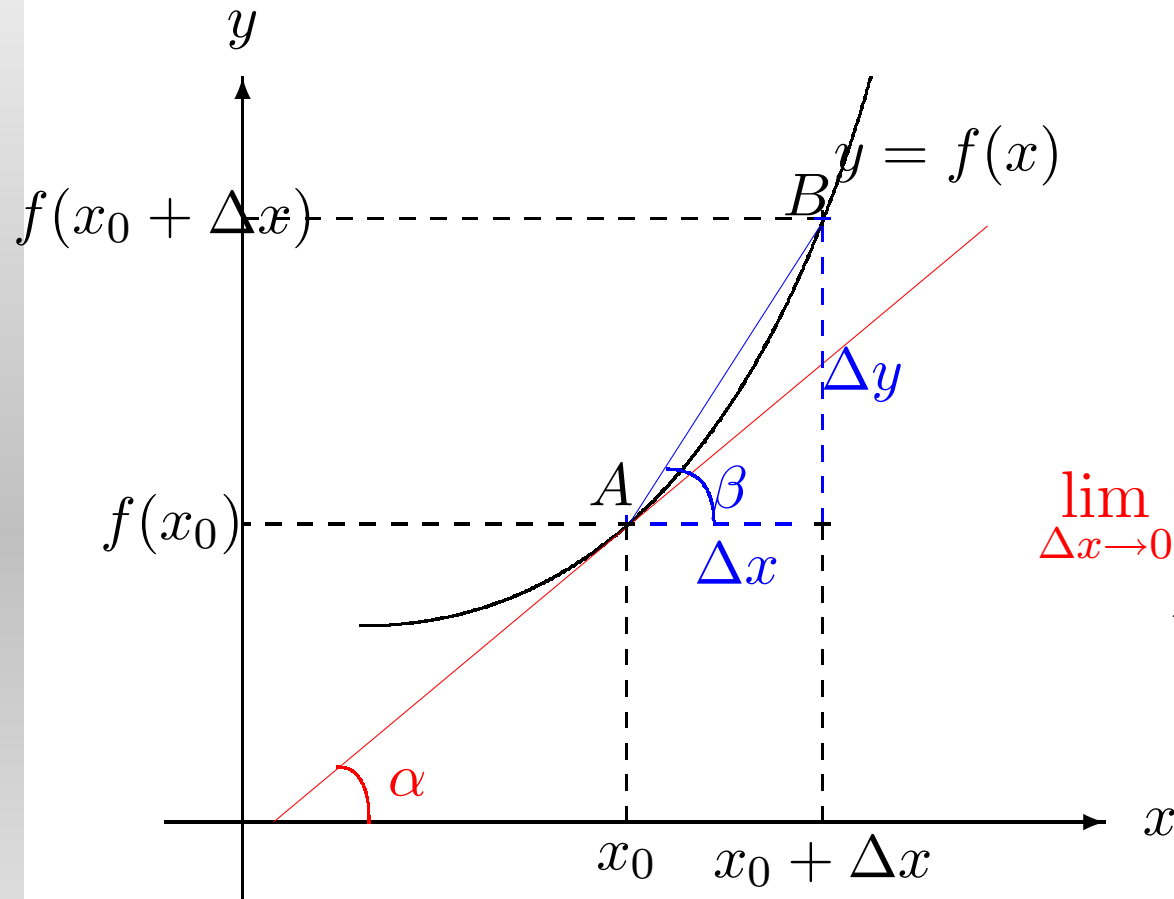


Vermits  $f'_L(0) \neq f'_R(0)$  bestaat  $f'(x_0)$  niet, m.a.w.  $|x|$  is niet afleidbaar in  $x = 0$ .

- $f'_L(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1$
- $f'_R(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$

**Intuitief : een afgeleidbare functie is een vloeiende getekende functie**

# Meetkundige betekenis



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$  is de rico van de raaklijn aan  $y = f(x)$  in  $x_0$  :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Afleidbaarheid in een interval

$y = f(x)$  is afleidbaar in het open interval  $]a, b[$  als ze afleidbaar is in elk punt van dit interval.

$y = f(x)$  is afleidbaar in het gesloten interval  $[a, b]$  als ze afleidbaar is in  $]a, b[$ , rechts-afleidbaar is in  $a$  en links-afleidbaar is in  $b$ .

Analoge definities gelden voor halfopen intervallen.

# De afgeleide functie

Beschouw de verzameling van punten  $x_0$  waarvoor  $f'(x_0)$  bestaat. De **afgeleide functie** van  $y = f(x)$  is bepaald door

$$x \mapsto f'(x)$$

Notaties :

$$f'(x)$$

$$Df(x) \quad (\text{Cauchy})$$

$$\frac{dy}{dx} \quad (\text{Leibniz})$$

$$\dot{y} \quad (\text{Newton als } x = \text{tijd } t)$$

$f'(\dots)$  betekent afleiden naar de onafhankelijke veranderlijke ...

# Afgeleide van de $n$ -de orde

De afgeleide functie bezit meestal opnieuw een afgeleide : de tweede afgeleide van de oorspronkelijke functie , of **de afgeleide van de tweede orde**.

Notaties :

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

...

**afgeleide van de  $n$ -de orde**

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

# Stijgen en dalen, extrema

Zij  $y = f(x)$  afleidbaar in  $x_0$ .

$$\begin{aligned} y = f(x) \text{ is stijgend in } x_0 &\iff \Delta f(x_0) \geq 0 \text{ a.s.a. } \Delta x > 0 \\ &\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \\ &\iff f'(x_0) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = f(x) \text{ is dalend in } x_0 &\iff \Delta f(x_0) \leq 0 \text{ a.s.a. } \Delta x > 0 \\ &\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \\ &\iff f'(x_0) \leq 0 \end{aligned}$$

$$y = f(x) \text{ heeft extremum in } x_0 \iff f'(x_0) = 0$$

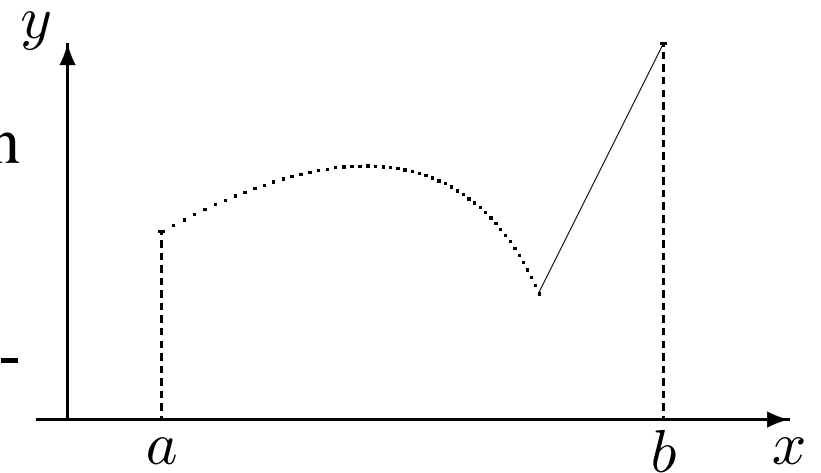
# Opmerking

Bepaal de punten in  $[a, b]$  waarin  $y = f(x)$  een extremum bereikt

**Kritische punten** : punten waarin de functie mogelijk een extremum heeft.

De kritische punten zijn

- als  $f(x)$  afleidbaar is : punten waarin  $f'(x) = 0$
- punten waarin  $f(x)$  niet afleidbaar is
- $a$  en  $b$



# De regel van de l'Hospital

Als  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  afleidbaar zijn in  $x_0$  en  $f(x_0) = 0$  en  $g(x_0) = 0$ , waarbij  $g'(x_0) \neq 0$ , dan is

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

# Afgeleide van constante functie

$$\frac{da}{dx} = 0 \text{ als } a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{da}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = 0$$

# Afgeleide van veeltermfunctie

$$\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1} \text{ als } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h x^{n-2} + \dots + h^{n-1} \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

# Afgeleide van log-functie

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln x}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( \frac{x+h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \ln \left( \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) \\ &\stackrel{\frac{h}{x}=k}{=} \ln \left( \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k x}} \right) \\ &= \ln \left( \left( \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

# Afleidingsregels

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)f_2(x)] = \frac{df_1(x)}{dx}f_2(x) + f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\frac{df_1(x)}{dx}f_2(x) - f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}}{f_2^2(x)}$$

# Goniometrische functies

$$\begin{aligned}\frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d \cos x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \sin x\end{aligned}$$

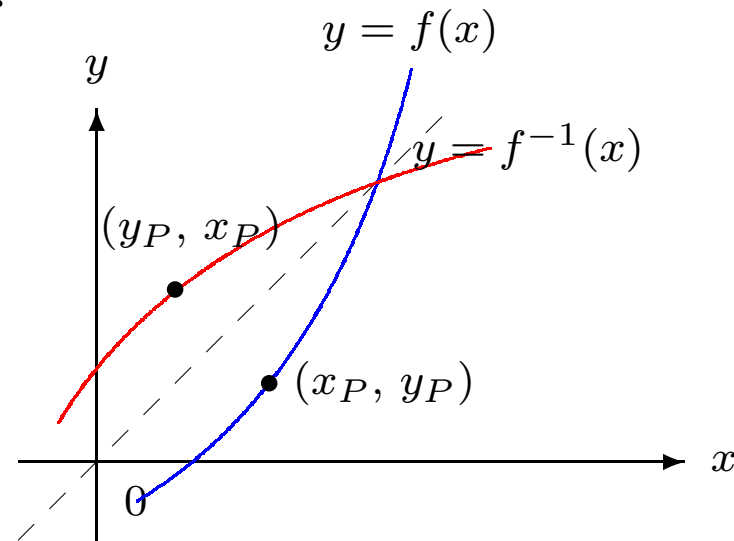
# Goniometrische functies

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{d \sin x}{dx \cos x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

# Inverse functie

Zij  $y = f(x)$  inverteerbaar over een bepaald interval. Dan voldoet  $y$  in dat interval aan

$$x = f^{-1}(y).$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}}$$

# De exponentiële functie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}}$$

$$y = e^x \iff x = \ln y \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d \ln y}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$\implies \frac{de^x}{dx} = e^x$$

# Cyclometrische functies

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}}$$

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d \sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\implies \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# Cyclometrische functies

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}}$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$$

$$\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d \cos y}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\implies \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# Cyclometrische functies

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}(y)}{dy}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y \quad x \in \mathbb{R}, y \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$\frac{d\operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\operatorname{tg} y}{dy}} = \frac{1}{\cos^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

$$\iff \frac{d\operatorname{arctan} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

# Kettingregel

Zij  $y = y(u)$  en  $u = u(x)$ . Dan is  $y = y(u(x))$  een functie van  $x$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Als  $u(x)$  afleidbaar is, zal  $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \rightarrow 0$  zodra  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(u(x + \Delta x)) - y(u(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{y(u(x) + \Delta u) - y(u(x))}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

# Kettingregel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$y = \sin u \quad \text{met} \quad u = x^2 \implies y(u(x)) = \sin x^2$$

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = \frac{d}{du} (\sin u) \frac{dx^2}{dx} = 2x \cos x^2$$

$$\frac{d}{du} (\sin u) = \cos u = \cos x^2 \qquad \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

# Functions in parameterform

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad t \in [t_a, t_b]$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{f}_2(t)}{\dot{f}_1(t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

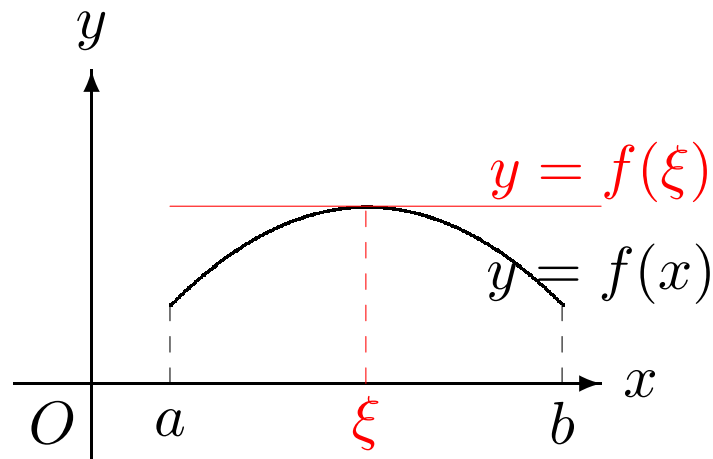
Opmerking :  $y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

# De stelling van Rolle

Veronderstel dat  $y = f(x)$  afleidbaar is in  $[a, b]$ . Als bovendien  $f(a) = f(b)$ , dan bestaat er ten minste één punt  $\xi \in ]a, b[$  waarvoor  $f'(\xi) = 0$ .

Bewijs :



- Is  $f$  constant , dan

$$f'(\xi) = 0, \forall \xi \in [a, b]$$

- Is  $f$  niet constant, dan ,

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

met  $x_m, x_M \in [a, b]$  en met  $f(x_m) = m$  en  $f(x_M) = M$ .

Kies  $\xi = x_m$  als  $x_m \notin \{a, b\}$  en  $\xi = x_M$  als  $x_M \notin \{a, b\}$ .

Dan is  $f'(\xi) = 0$

# Middelwaardestelling van Cauchy

Zijn  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  continu in  $[a, b]$  en afleidbaar in  $]a, b[$  en is  $g'(x)$  verschillend van 0 in  $[a, b]$ , dan bestaat er een

$\xi \in ]a, b[$  waarvoor

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$$\text{Bewijs : } h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (g(a) - g(b))f(x) + (f(b) - f(a))g(x) + f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

$$\implies h'(x) = (g(a) - g(b))f'(x) + (f(b) - f(a))g'(x)$$

# Middelwaardestelling van Cauchy

Zijn  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  continu in  $[a, b]$  en afleidbaar in  $]a, b[$  en is  $g'(x)$  verschillend van 0 in  $[a, b]$ , dan bestaat er een

$\xi \in ]a, b[$  waarvoor

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bewijs :  $h'(x) = (g(a) - g(b)) f'(x) + (f(b) - f(a)) g'(x)$

$$h(x) = (g(a) - g(b)) f(x) + (f(b) - f(a)) g(x) + f(a) g(b) - f(b) g(a)$$

Rolle : er bestaat een  $\xi \in ]a, b[$  waarvoor  $h'(\xi) = 0$

$$\implies (g(b) - g(a)) f'(\xi) = (f(b) - f(a)) g'(\xi).$$

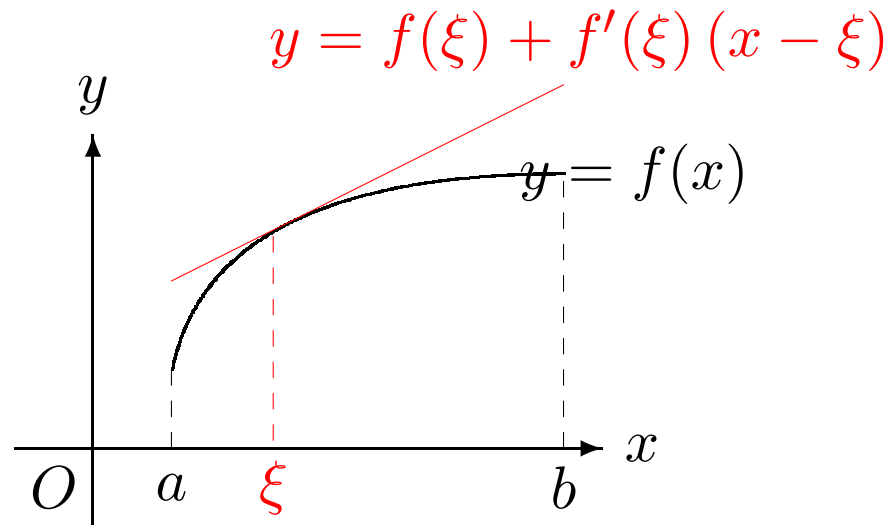
$g'(\xi) \neq 0$ , want  $g'(x) \neq 0$  in  $[a, b]$

$g(b) - g(a) \neq 0$  (zoniet Rolle :  $\exists d \in ]a, b[: g'(d) = 0$ )

# Middelwaardestelling van Lagrange

Veronderstel dat  $y = f(x)$  afleidbaar is in  $[a, b]$ . Dan bestaat er minstens één punt  $\xi \in ]a, b[$  waarvoor  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Bewijs :



MWS van Cauchy :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$$g(x) = x :$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

# Gevolgen van MWS

- Is  $y = f(x)$  afleidbaar in  $[a, b]$  met  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[$ , dan is  $f(x)$  constant in  $[a, b]$ .

Bewijs : neem een willekeurig punten  $x$  in  $[a, b]$ .

$$\text{MWS Lagrange : } \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = 0 \implies f(x) = f(b)$$

- Is  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  afleidbaar in  $[a, b]$  met  $f'(x) = g'(x), \forall x \in ]a, b[$ , dan is  $f(x) - g(x)$  constant in  $[a, b]$ .

Bewijs : vorig gevolg toegepast op  $y = f(x) - g(x)$

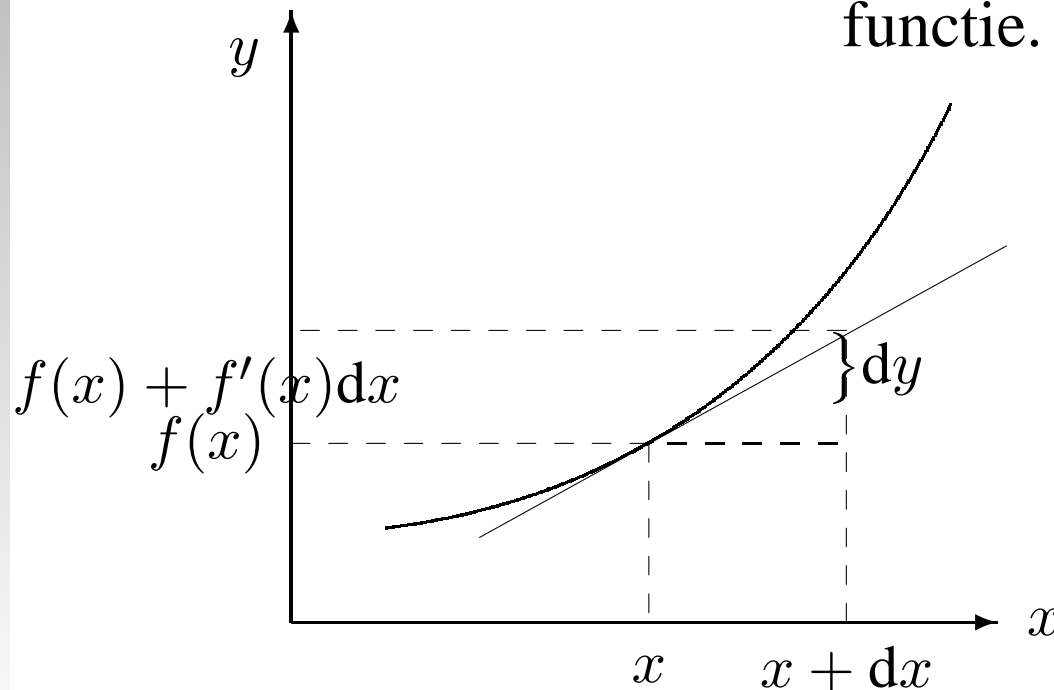
# Differentiaal

Leibniz notatie :  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  waaruit  $dy = f'(x) dx$

$dy$  : de **differentiaal** van  $y = f(x)$

Als  $x$  toeneemt met  $dx$  neemt  $y$  **langs de raaklijn** toe met  $f'(x) dx$ .

Is  $dy$  overal gedefinieerd, dan heeft men een **differentieerbare** functie.



De differentiaal is het hoofddeel van de functie-toename als de toename  $dx$  klein is.

# Newton-Raphson methode

Gevraagd : zoek een nulpunt van  $f(x) = 0$  in  $[a, b]$

Zij  $f$  afleidbaar in  $]a, b[$

raaklijn in  $x_0$  :  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

snijpunt  $x_1$  met  $x$ -as :  $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

# Newton-Raphson methode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Convergeert de rij  $x_0, x_1, x_2, \dots$  naar een zekere  $\alpha$  waarvoor

$$f(\alpha) = 0 ?$$

Hoe snel is de eventuele convergentie ?

Antwoord :

- als  $x_0$  dicht genoeg ligt bij de te zoeken  $\alpha$  is er steeds convergentie , m.a.w. **lokale convergentie**
- De **orde van convergentie** is **kwadratisch**, d.w.z. er bestaat een constante  $C$  waarvoor

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|^2 .$$

# Newton-Raphson methode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Bepaal  $\alpha = 0.703467422498$  van  $x - e^{-x/2} = 0$  met  $x_0 = 1$ .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{-x_n/2}} = \frac{e^{-x_n/2} (x + 2)}{2 + e^{-x_n/2}}$$

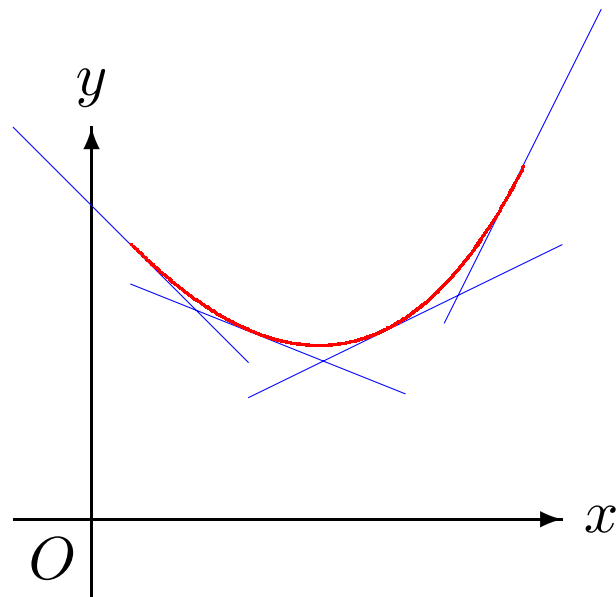
$n$	$x_n$	$ x_{n+1} - \alpha / x_n - \alpha ^2$
0	1	
1	0.6980896128	0.061
2	0.7034655390	0.065
3	0.7034674224	0.065
4	0.7034674225	

# Het teken van $f''(x)$

$f(x)$   $\iff$  positief of negatief

$f'(x)$   $\iff$  stijgen of dalen

$f''(x)$   $\iff$  ?



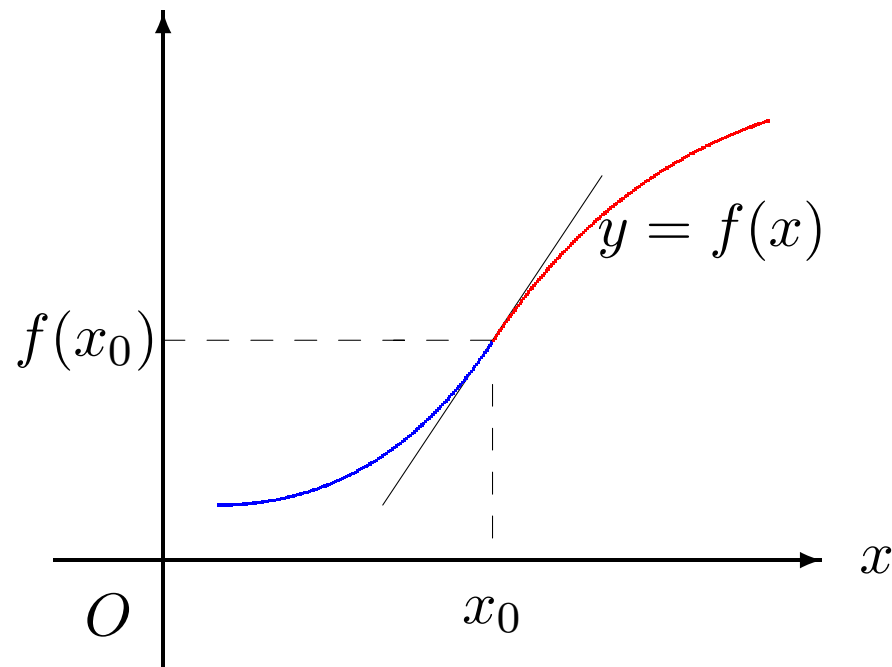
$f''(x) > 0$   $\iff$   $f'(x)$  stijgt

$\iff$  de rico's van de raaklijnen stijgen

$\iff$  de raaklijnen stijgen meer en meer

# Buigpunt van een kromme

Is  $f''(x_0) = 0$  en wisselt  $f''(x)$  in  $x_0$  van teken, dan zegt men dat  $y = f(x)$  een **buigpunt** heeft in  $x_0$ .



Heeft  $y = f(x)$  een buigpunt in  $x_0$ , dan snijdt de raaklijn er de kromme.

In punten die geen buigpunten zijn, raakt de raaklijn de kromme.

# Functie-onderzoek

1.  $\text{def}(f)$
2. Wanneer is  $f(x) > 0$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) < 0$  ?
3. H.A., V.A., S.A. + ligging t.o.v. H.A. en S.A.
4. Wanneer is  $f'(x) > 0$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $f'(x) < 0$  ?
5. Wanneer is  $f''(x) > 0$ ,  $f''(x) = 0$ ,  $f''(x) < 0$  ?
6.  $f(x)$  in elk bijzonder punt  $x$ .
7. Vat de resultaten samen in een tabel.
8. Maak een schets. Win eventueel extra informatie in, zoals bvb. de vergelijkingen van raaklijnen in buigpunten.

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

1. def( $f$ )

def( $f$ ) =  $\mathbb{R}$  en  $f(x)$  is even

2. Wanneer is  $f(x) > 0$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) < 0$  ?

$f(x) > 0$  vermits  $\exp(x) > 0$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c|c} x & \\ \hline f(x) & + \end{array}$$

3. H.A., V.A., S.A. + ligging t.o.v. H.A. en S.A.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

Vermits  $f(x) > 0$  ligt de grafiek boven de H.A.  $y = 0$ .

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

4. Wanneer is  $f'(x) > 0$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $f'(x) < 0$  ?

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

Kritisch punt :  $x = 0$

$x$	0		
$f(x)$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

5. Wanneer is  $f''(x) > 0$ ,  $f''(x) = 0$ ,  $f''(x) < 0$  ?

$$f''(x) = (-2 + 4x^2) e^{-x^2}$$

Kritische punten :  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  en  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\nearrow$	$\curvearrowleft$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\curvearrowright$

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

6.  $f(x)$  in elk bijzonder punt  $x$ .

$$(0, 1) \quad \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}} \right) \approx (\pm 0.71, 0.61)$$







$$(\pm 1, e^{-1}) \approx (\pm 1, 0.36) \quad (\pm 2, e^{-4}) \approx (\pm 2, 0.02)$$

Raaklijnen in buigpunten :

$$y = \sqrt{\frac{2}{e}} x + 2 \sqrt{\frac{1}{e}} \quad \text{en} \quad y = -\sqrt{\frac{2}{e}} x + 2 \sqrt{\frac{1}{e}}$$

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

## 7. Samenvattende tabel

$x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$				max			

# Voorbeeld : $y = e^{-x^2}$

8. Schets :

