RuG

Werken met getallen
(en verzamelingen en oneindigheid)

Prof. dr. H.W. Broer

Instituut voor Wiskunde en Informatica

Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen

met dank aan Jan van Maanen en Pauline Vos

AVV college “Science Topics”, 1 april 2005

Wat moet je kunnen?

- Voorbeelden benoemen van getalsystemen met grondtal $\neq 10$
- Het belang van de *nul* en het *positiestelsel* benoemen
- Verwoorden van verschil tussen *cardinaliteit* en *ordinaliteit*
- Redeneren met begrippen als *aftelbaar* en *oneindig,* ihb met het *Hilbert Hotel*
- Verschillen tussen de *rationale, reëele, algebraïsche* en *transcendente getallen* benoemen;
  bewijzen dat $\sqrt{2}$ niet rationaal, maar wel algebraïsch is
- Verschil benoemen tussen de begrippen: *oneindig, aftelbaar, overaftelbaar* en *consistent*
- Redeneren met de *diagonaalmethode* en *Gödels Onvolledigheidsstelling*

RuG

Centrale begrippen

- getal (definitie vanuit de logica)
- verschillende getalverzamelingen (natuurlijk, rationaal, irrationaal, reëel, algebraïsch, transcendent)
- (over)aftelbaar; cardinaliteit
- diagonaalmethode
- onvolledigheidsstelling (Gödel)

RuG

Getallen en hun schrijfwijze

- natuurlijke getallen (0,1,2,3,...)
- Arabische cijfers (oorspr. uit India)
- Romeinse cijfers
  XVIII + XXXVI =
- Positiestelsel met grondtal 10
- Grondtal 60 – seconden, minuten
- Grondtal 20 – Frans "*quatre-vingt*" = 80

RuG

Getalverzamelingen

- natuurlijke getallen (0,1,2,3,…)
- gehele ("integer") getallen
  (de vorige met daarbij …, -3,-2,-1)
- rationale getallen
  (de vorige met daarbij de breuken $\frac{teller}{noemer}$)
- even oefenen….

RuG

$$\frac{2}{7} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{8}{28}$$

De reële getallen (1)

- De decimalen van breuken zijn eindig ($\frac{1}{4}=0{,}25$) of repeterend ($^1/_3= 0{,}33333....$)
- niet alle getallen zijn als breuk te schrijven
- voorbeeld 1: een getal met een oneindige decimale ontwikkeling die niet netjes repeteert

  1.101001000100001000001…

- voorbeeld 2: $\sqrt{2}$

  $\sqrt{2}= 1.4142135623731…$

RuG

Is √2 als breuk te schrijven?

- Veronderstel: √2 is t gedeeld door n, $\sqrt{2} = {}^{t}/_{n}$
- Vereenvoudig ${}^{t}/_{n}$ zo ver mogelijk
  dan hebben ze geen gemeenschappelijke deler meer

- $({}^{t}/_{n})^2 = 2$, dus $t^2 : n^2 = 2$ ofwel $t^2 = 2n^2$
- dan is t^2 even, dus t is even
- dan is t^2 te delen door 4 ofwel $t^2 = 4$ x
- De regel $t^2 = 2n^2$ wordt nu 4x = $2n^2$
- dan is n^2 even, dus n is even.

- Ik vind dus eerst dat t even is, en daarna ook dat n even is. Dit is in tegenspraak met stap 2.
- Conclusie: de veronderstelling is FOUT.
  √2 kan niet als breuk geschreven worden.

RuG

De reële getallen (2)

- algebraïsche getallen zijn oplossing van een geheel-tallige vergelijking in x

$$x^2 - 2 = 0 \qquad x^3 - 6x^2 + 7x = 0$$

- voorbeelden: $\sqrt{2}$ (= 1.414213..)
  of $\sqrt{2}+3$ (= 4.414213..)

- Getallen als

  π (= 3.14159265358979... voor cirkelrekenen)

  e (= 2.71828182845905... voor exponenten en logaritmen)

  zijn niet algebraïsch, maar *transcendent*.

RuG

David Hilbert

- 1862 geboren in Königsberg (toen: D.)
- 1895 Hoogleraar in Göttingen (D.)
- Getaltheorie, nulpunten axiomatiek
- 1900 – lijst van belangrijke onopgeloste wiskundeproblemen (na 100 jaar nog steeds 3 onopgelost)
- Overl. 1943

RuG

Het Hilbert-hotel

Het hotel met kamers 1,2,3, … ∞ zit helemaal vol.

- Er komt een nieuwe gast…
- Er komt een bus met 40 mensen aan..
- Er komt een Hilbert-bus (met ∞ passagiers) aan..
- Het hotel heeft een Hilbert-parkeerplaats. Op elke plaats arriveert een Hilbert-bus …

RuG

Het Hilbert-hotel (2)

- Het hotel heeft een Hilbert-parkeerplaats. Op elke plaats arriveert een Hilbert-bus ...

bus 1	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5	p.6	p.7	p.8	p.9
bus 2	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5	p.6	p.7	p.8	p.9
bus 3	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5	p.6	p.7	p.8	p.9
bus 4	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5	p.6	p.7	p.8	p.9
bus 5	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5	p.6	p.7	p.8	p.9

Het Hilbert-hotel (3)

- Het hotel heeft een Hilbert-parkeerplaats. Op elke plaats arriveert een Hilbert-bus ...

- Alternatieve oplossing:
  - Nummer de bussen. Nummer de stoelen in elke bus.
  - Beschouw het hotel ook als 'bus', met nummer 0.
  - Rits de cijfers van het busnummer met de cijfers van het stoelnummer om een nieuw getal te maken. Hiermee maken we het nieuwe kamernummer.
  - Dus de gast in kamer 1729 verhuist naar 1070209. De passagier op stoel 8234 van bus 56719 gaat naar kamer 5068721394 van het hotel.

RuG

Oneindigheid als probleem

- Het aantal natuurlijke getallen groter gelijk 3
  {3, 4, 5, 6,...}
  is gelijk aan het aantal natuurlijke getallen
  {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

- Het aantal even getallen is gelijk aan het aantal natuurlijke getallen.

- Er zijn evenveel veelvouden van 17
  {17, 34, 51, 68, 85, 102, .. }
  als natuurlijke getallen.

RuG

Tel de rationale getallen

- Een oneindige verzameling waarvoor je een genummerde lijst kunt maken heet **aftelbaar**.
- De rationale getallen zijn aftelbaar.

- Er zijn dus evenveel rationale getallen als natuurlijke getallen.
- Bewijs zie p. 328, fig 10.6

RuG

Oneindigheid als oplossing

- Een schrijver wil zijn autobiografie schrijven. Hij doet een jaar over het beschrijven van zijn eerste levensdag. Kan hij het boek afkrijgen?

- In het Hilbert-hotel gaan om 12.00 uur de ruiten van kamers 1-10 stuk. De glazenzetter begint bij kamer 1 en vervangt één ruit per kwartier.
Om 13.00 uur gaan de ruiten van de kamers 11-20 stuk. En elk uur tien verdere ruiten. Kan de glazenzetter alle ramen vervangen?

RuG

Machten van 10

- Efficiënte schrijfmethode voor hele kleine en hele grote getallen

- $1000 = 10^3$
- $1000000000 = 10^9$
- $0.000000001 = 10^{-9}$

- Zie:

http://microcosm.web.cern.ch/microcosm/P10/english/welcome.html

http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/

RuG

Deel II

Werken met getallen
(en verzamelingen en oneindigheid)

Voorbeelden van paradoxen

- Epimenides was van Kreta.
- Hij zei: *"Alle Kretenzers liegen."*

Alternatief:

- *Deze zin is onwaar.*

RuG

Paradox van de barbier

Problemen bij het definiëren van verzamelingen

- De barbier van het dorp scheert alle mannen, die zichzelf niet scheren, en geen anderen.
- Vraag: scheert hij zichzelf?

- Indien hij zichzelf <u>niet</u> scheert, dan moet hij door de barbier (zichzelf) geschoren worden.
- Indien hij zichzelf scheert, dan klopt de definitie van de barbier niet meer.

Cardinaliteit en ordinaliteit

- Ordinaliteit:
  - Geeft een nummer in een volgorde
  - Voorbeeld: Huisnummers – als één huis in de straat gesloopt wordt, veranderen de huisnummers niet.

- Cardinaliteit:
  - Telt het aantal elementen in een verzameling
  - Voorbeelden:
    - het aantal studenten in deze zaal is 43
    - Het aantal natuurlijke getallen is *aftelbaar oneindig*

RuG

Over-aftelbaar

lijstnr	verzameling
1	{2,7,9}
2	{1,5,11,12,124}
3	{3,33,333,3333}
4	{ ….

- Neem alle verzamelingen van natuurlijke getallen:

  {2,7,9} {1,5,11,12,124} {3,33,333,3333} {….}

  Dit is één oneindige verzameling van verzamelingen.
  Kan hiervoor een genummerde lijst bestaan?
- Veronderstel dat je een genummerde lijst kunt maken en kijk naar die lijst.
- Elk lijstnummer duidt een bijbehorende verzameling aan. Kijk of het lijstnummer erin zit.
- Neem de verzameling X van díe lijstnummers, die niet IN hun bijbehorende verzameling zitten (de definitie van verzameling X).

RuG

*Over-*aftelbaar (2)

lijstnr	verzameling
1	{2,7,9}
2	{1,5,11,12,124}
3	{3,33,333,3333}
4	{ ….

- Verzameling X bestaat uit díe lijstnummers, die niet IN hun bijbehorende verzameling zitten.
- Verzameling X bestaat uit natuurlijke getallen, en moet dus óók een lijstnummer hebben, zeg x.
- Vraag: zit x in X ?
  - Indien x niet in X zit: dan moet x in X zitten
    (X bevat díe lijstnummers, die niet in hun bijbehorende verzameling zitten)
  - Indien x in X zit: dan kan x niet in X zitten
    (X bevat alleen díe lijstnummers, die niet in hun bijbehorende verzameling zitten)
- Dit leidt tot een paradox: de veronderstelling kan niet kloppen. Conclusie: de verzameling van alle verzamelingen van natuurlijke getallen is niet aftelbaar.

RuG

Verschillende soorten oneindig

- Aftelbaar oneindig: je kunt het in een lijst zetten. Voorbeelden:
  - Natuurlijke getallen
  - De tafel van 7
  - Rationale getallen
- Over-aftelbaar oneindig: je kunt het niet in een lijst zetten. Voorbeelden:
  - De verzameling van alle verzamelingen van nat. getallen
  - De reële getallen

lijstnr	verzameling
1	{2,7,9}
2	{1,5,11,12,124}
3	{3,33,333,3333}
4	{ ….

RuG

Georg Cantor

- 1845 geboren in
  St Petersburg (R.)
  vader katholiek/Deens
  moeder protestant/Russisch
- 1856 verhuisd Darmstadt (D.)
- Studie in Zürich en Berlijn
- 1874 getrouwd, 6 kinderen
- Benoeming Univ. Halle
- Grondlegger van de
  verzamelingentheorie
- Strijd met L. Kronecker ea.
- Psychiatrisch patiënt, overleden 1918

RuG

Zijn de reële getallen aftelbaar?

- De reële getallen zijn **overaftelbaar.** Bewijs met Cantors diagonaalmethode (pag 330).
- Veronderstel dat de reële getallen aftelbaar zouden zijn. Dan kun je ze dus nummeren.
- Maak de lijst waar ze <u>allemaal</u> in staan.
- ....

RuG

Zijn de reële getallen aftelbaar? (2)

- ....
- De lijst waar ze allemaal in staan ziet er bijv zó uit:

1	0,82419267...
2	0,04765424...
3	0,12945978......
4	0,63243546...

- We maken nu één nieuw reëel getal:
  neem de diagonaalelementen + 1, dus 0,9505...
  Dit getal staat niet in de lijst, want het verschilt van elke getal in de lijst!
- Onze veronderstelling leidt tot een TEGENSPRAAK.
  Dan is de veronderstelling dus niet correct.

RuG

Hoeveel reële getallen zijn er?

- Er zijn evenveel reële getallen op het interval [0-1] als op het interval [0-1000]

- Er zijn evenveel punten in een 1x1-vierkantje als in een voetbalveld

RuG

Axiomatisering

- 0 is een getal
- de directe opvolger van een getal is ook een getal
- 0 is opvolger van geen enkel getal
- verschillende getallen hebben verschillende opvolgers
- als een bewering voor 0 geldt, en als die bewering voor de opvolger van een getal geldt zodra ze voor het getal zelf geldt, dan geldt die bewering voor alle natuurlijke getallen

RuG

Kurt Gödel

- Geboren 1906 in Brno (toen Oostenrijk)
- 1923-29 Studie wiskunde Wenen
- 1930 docent Wenen
- 1931 beroemde onvolledigheidsstelling
- 1938 getrouwd
- 1940 emigratie USA (hij was niet joods)
- Princeton
- 1972 overleden

RuG

De rekenkunde is onvolledig

- Dit is de beroemde “stelling van Gödel”
- Er zullen altijd ware uitspraken zijn, die binnen een wiskundig systeem, hoe uitgebreid ook, noch bewijsbaar noch onbewijsbaar zijn.
- Idee van het bewijs:
  - je kunt alle wiskundige beweringen nummeren.
  - Je kunt een bewering construeren, die over zichzelf ‘zegt’ dat dat zij onbewijsbaar is
- Het bewijs (pp. 351-352) is mogelijk met een diagonaal-argument.

RuG

Atkins:

- wiskunde is een product van de menselijke geest
- wiskunde is bij uitstek een geschikte beschrijvingsmethode voor onze natuur

RuG

Fractals

- Spelen met oneindige herhaling
- Herhaal dezelfde stap eindeloos, maar op een kleiner deel

- Zie www.arcytech.org\java\fractals\lsystems.html

RuG