

Dictaat
Inleiding Complexe Functietheorie
voor TN

behorende bij het gelijknamige college met
vakcode wi2143TN

G. Sweers

versie van juli 2003

Inhoud

1	Inleiding	1
1.1	Enkele begrippen	1
1.1.1	Complexe getallen	1
1.1.2	Open en gesloten	2
1.1.3	Krommen	3
1.1.4	Samenhang	5
1.1.5	Limiet en continuïteit in \mathbb{C}	5
1.1.6	Uniform	6
1.2	Reeksen	8
1.2.1	Standaard convergentiecriteria	9
1.2.2	De limes superior van een reële rij	9
1.2.3	Een sterker convergentie criterium	11
1.3	Machtreeksen	13
2	Differentiëren in \mathbb{C}	19
2.1	De definitie	19
2.2	Machtreeksen en differentieerbaarheid	23
2.3	Cauchy-Riemann	25
2.4	Afbeeldingen	28
3	Integreren in \mathbb{C}	33
3.1	De integraal over een kromme	33
3.2	Een logaritme met complexe getallen	37
3.3	Hoofdstelling van de complexe integratie	40
3.4	Het Residu	43
3.4.1	Definitie en gebruik	43
3.4.2	Het berekenen	46
3.5	Gevolgen van de formule van Cauchy	52
3.5.1	Eigenschappen analytische functies	52
4	Harmonische functies	55
4.1	Analytisch en harmonisch	55
4.2	Een oplossing voor een cirkelvormig gebied	57
4.3	Een oplossing op andere gebieden	61
4.4	Het maximum principe	66
5	Potentiaalstomingen in 2 dimensies	67
5.1	Model	67
5.1.1	Reële formulering	67
5.1.2	Complexe formulering	68
5.1.3	Betekenis complexe potentiaal	69

5.2	Model met singuliere punten	71
5.2.1	Puntbron	71
5.2.2	Een gebied met meerdere bronnen/putten	72
5.2.3	Een dipool	72
5.2.4	Stroming in een strip	74
5.2.5	Stationair temperatuurprofiel	75
6	Opgaven	79
	Literatuur	86
	Index	88

De veranderingen ten opzichte van de versie van 2001 bevinden zich voornamelijk in de tekst op de bladzijden 5 tot en met 25.

Het deel rondom reeksen en machtreeksen is explicieter geworden en verder zijn er een aantal opgaven toegevoegd.

1. INLEIDING

1.1 Enkele begrippen

We nemen aan dat de lezer bekend is met complexe getallen en enige vaardigheid bezit in het rekenen ermee. In deze inleiding zullen we enkele aanvullende afspraken maken en kennismaken met complexe machtreeksen. Voor de volledigheid beginnen we met een lijst van zowel nieuwe als oude zaken.

- Verzamelingen van getallen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ de natuurlijke getallen,} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ de gehele getallen,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{Z} \text{ met } m \neq 0 \right\} \text{ de rationale getallen,} \\ \mathbb{R} &= \text{de reële getallen, 'limieten van begrensde rijen in } \mathbb{Q}\text{'}. \end{aligned}$$

- Het symbool oneindig: ∞ . Dit is geen getal maar vaak handig bij vele notaties. Verder is het een struikelblok voor de simplistische rekenaar.

1.1.1 Complexe getallen

Voor de complexe getallen wordt het symbool i ingevoerd. De verzameling \mathbb{C} van complexe getallen bestaat uit alle objecten van de vorm $x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. De optelling en vermenigvuldiging van $x + iy, u + iv \in \mathbb{C}$ worden als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v), \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

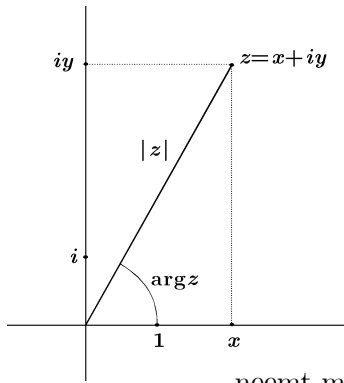
Opmerking: Met deze definitie zien we dat

$$(x + i0) + (u + i0) = (x + u) + i0 \quad \text{en} \quad (x + i0) \cdot (u + i0) = xu + i0$$

de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging in \mathbb{R} leveren wanneer we x met $x + i0$ identificeren. Zo kunnen we \mathbb{C} als uitbreiding van \mathbb{R} zien. Schrijft men iy in plaats van $0 + iy$ en i in plaats van $i1$ dan volgt op formele wijze dat

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = -1 + i0 = -1.$$

Voor complexe getallen zijn de volgende begrippen en schrijfwijzen ingevoerd:



	$z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$
reële deel	$\operatorname{Re} z = x$
imaginaire deel	$\operatorname{Im} z = y$
complex geconjugeerde	$\bar{z} = x - iy$
modulus	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$
argument	$\arg z = \varphi \in [-\pi, \pi)$ zodanig dat $z = z (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Voor $z = 0$ is het argument niet eenduidig gedefinieerd. Vaak neemt men overigens het argument in $[0, 2\pi)$.

□

Opgave 1 Bewijs de volgende (on)gelijkheden voor $z, w \in \mathbb{C}$:

i. $|z|^2 = \bar{z}z$.

ii. $\bar{z}w + z\bar{w} = 2\operatorname{Re} z \operatorname{Re} w + 2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$

► driehoeks-
ongelijkheid

iii. de driehoeksongelijkheid:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

□

1.1.2 Open en gesloten

► omgeving van
een punt

• voor $a \in \mathbb{C}$ en $r \in \mathbb{R}^+$ definiëren we de r -omgeving van a door

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}.$$

► open

• een deelverzameling $D \subset \mathbb{C}$ heet *open* als er bij iedere $a \in D$ een $r > 0$ bestaat zodanig dat $B_r(a) \subset D$.

► complement

• voor $D \subset \mathbb{C}$ definiëren we zijn *complement* door $D^c = \{z \in \mathbb{C}; z \notin D\}$.

► gesloten

• een deelverzameling $D \subset \mathbb{C}$ heet *gesloten* als D^c open is.

• voor $D \subset \mathbb{C}$ definiëren we gesloten verzameling \bar{D} door

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}; B_r(z) \cap D \neq \emptyset \text{ voor alle } r > 0\}.$$

• voor $a \in \mathbb{C}$ en $r \in \mathbb{R}^+$ heet $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$ de *gesloten* r -omgeving van a .

► rand

• de *rand* ∂D van D definiëren we door

$$\partial D = \bar{D} \cap \overline{D^c}.$$

Om verwarring tussen \mathbb{C} en \mathbb{R}^2 te vermijden zullen we soms de volgende notatie gebruiken bij $D \subset \mathbb{C}$:

$$D_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in D\}.$$

1.1.3 Krommen

- als $x(\cdot), y(\cdot)$ continue functies van het interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ naar \mathbb{R} zijn, $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R})$ (zie voetnoot¹), dan heet de functie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

- kromme* een *kromme*. We zeggen $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{C})$.

Opmerking: De tekening van de beeldverzameling

$$K = \gamma[a, b] = \{x(t) + iy(t) ; a \leq t \leq b\}$$

in het complexe vlak lijkt op wat men een kromme zou willen noemen. Aan deze beeldverzameling zien we niet meer in welke richting, hoe vaak of hoe snel K doorlopen wordt. De ‘snelheid’ waarmee de beeldverzameling doorlopen wordt zal meestal van weinig belang zijn. Soms noemt men daarom ook wel deze beeldverzameling de kromme. De richting en hoe vaak de ‘kromme’ door de beeldverzameling loopt zal wel belangrijk worden en dat is een reden om de functie γ kromme te noemen in plaats van de deelverzameling K van \mathbb{C} .

- als $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$, (zie voetnoot²) dan heet $\gamma(\cdot)$ een *gladde kromme*. Dit hoeft niet te betekenen dat de beeldverzameling K onze voorstelling van glad beantwoordt.
- de *lengte* ℓ van een gladde kromme definiëren we door

$$\ell = \int_{t=a}^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

(dit komt overeen met onze intuïtieve voorstelling van de lengte)

- de kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heet een *stuksgewijs gladde kromme* als deze kromme bestaat uit een aaneenschakeling van een eindig aantal gladde krommen. Preciezer geformuleerd, er zijn gladde krommen

$$\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{C} \text{ voor } k \in \{1, \dots, n\}$$

met $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ zodanig dat

$$\gamma(t) = \gamma_k(t) \text{ als } t \in [a_{k-1}, a_k].$$

- de kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heet *enkelvoudig* als deze buiten eventueel

¹ De verzameling van alle continue functies van $[a, b]$ naar \mathbb{R} wordt genoteerd met $C([a, b]; \mathbb{R})$, soms afgekort tot $C([a, b])$ of zelfs $C[a, b]$.

² De verzameling van alle continu differentieerbare functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt genoteerd door $C^1([a, b]; \mathbb{R})$. De functie f is continu differentieerbaar op $[a, b]$ als er een functie $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ bestaat zodanig dat

$$g(t) = \begin{cases} \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{voor } t = a & \text{(de rechterafgeleide van } f \text{ in } a), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} & \text{voor } t \in (a, b) & \text{(de afgeleide van } f \text{ in } t), \\ \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} & \text{voor } t = b & \text{(de linkerafgeleide van } f \text{ in } b). \end{cases}$$

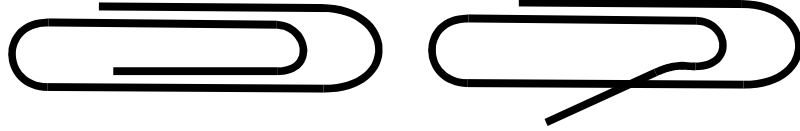
Vaak wordt $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ afgekort tot $C^1[a, b]$.

samenvallende eindpunten geen zelfdoorsnijding heeft; dwz.

$$\gamma : (a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$$

zijn beide injectief.



beeld van een enkelvoudige resp. niet-enkelvoudige kromme

- *gesloten kromme*
- *Jordan-kromme*

- de kromme $\gamma(\cdot)$ heet *gesloten* als $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- de kromme $\gamma(\cdot)$ heet een *Jordan-kromme* als deze enkelvoudig en gesloten is.
- door een Jordan-kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wordt $\mathbb{C} \setminus \gamma[a, b]$ in twee delen verdeeld, het inwendige en het uitwendige van de beeldverzameling $\gamma[a, b]$.

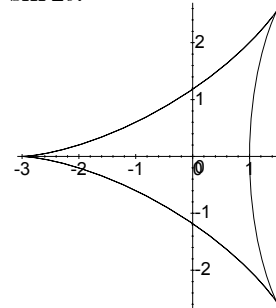
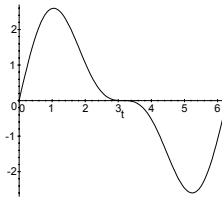
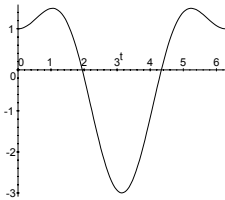
□

Opgave 2 Onderzoek tot welke klassen de kromme $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ behoort als $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ met

$$x(t) = 2 \cos t - \cos 2t,$$

$$y(t) = 2 \sin t + \sin 2t.$$

Als hulp volgen enkele schetsen.



de functie $t \rightarrow x(t)$, de functie $t \rightarrow y(t)$, $\{(x(t), y(t)); 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

□

Opgave 3 Stel $\gamma_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ en $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zijn gladde krommen met $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

i. Laat zien dat $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{als } -1 \leq t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{als } 0 < t \leq 1 \end{cases}$ een stuksgewijs gladde kromme is.

ii. Laat zien dat $\tilde{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t^3) & \text{als } -1 \leq t \leq 0 \\ \gamma_2(t^3) & \text{als } 0 < t \leq 1 \end{cases}$ een gladde kromme is.

iii. Geef een stel γ_1, γ_2 zodat γ niet glad is.

1.1.4 Samenhang

- ▶ *samenhangend*
 - een open deelverzameling $D \subset \mathbb{C}$ heet *samenhangend* als elk tweetal punten in D door een kromme met beeldverzameling $K \subset D$ verbonden kunnen worden.
- ▶ *gebied*
 - een deelverzameling $G \subset \mathbb{C}$ heet een *gebied* als
 - i. $G \neq \emptyset$,
 - ii. G is open,
 - iii. G is samenhangend.
- ▶ *enkelvoudig samenhangend*
 - een gebied $D \subset \mathbb{C}$ heet *enkelvoudig samenhangend* als het inwendige van elke Jordan-kromme in D ook weer in D ligt.

子 亦 有

De bijstaande karakters zijn achtereenvolgens enkelvoudig samenhangend, niet samenhangend en samenhangend (maar niet enkelvoudig).

1.1.5 Limiet en continuïteit in \mathbb{C}

Net zoals voor reële functies definiëren we de begrippen limiet en continuïteit, en net zoals voor reële getallen bestaat het begrip limiet zowel voor ‘rijtjes’ als voor functies. In het onderstaande is D een deelverzameling van \mathbb{C} .

- ▶ *limiet van een rij* **Definitie 1.1.1** De rij $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ met $z_n \in \mathbb{C}$ heeft een limiet $\ell \in \mathbb{C}$ als: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat als $n > N$ dan $|z_n - \ell| < \varepsilon$.

We noteren $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$.

- ▶ *limiet van een functie* **Definitie 1.1.2** De functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heeft in $w \in D$ een limiet $\ell \in \mathbb{C}$ als: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $z \in D$ als $0 < |z - w| < \delta$ dan $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

We noteren $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \ell$.

- ▶ *continue functie* **Definitie 1.1.3** De functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heet continu in $w \in D$ als: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $z \in D$ als $|z - w| < \delta$ dan $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

Met andere woorden: $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heet continu in $w \in D$ als $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$.

□

Opgave 4 Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 - \left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^2 & \text{voor } z \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Laat zien dat deze functie niet continu is in de oorsprong. _____

1.1.6 Uniform

► *uniform*

Tenslotte nog het begrip *uniform*. Vaak beschouwen we limieten of continuïteit van functies of uitdrukkingen die van meerdere variabelen of van een parameter afhangen. Het zal belangrijk blijken te zijn om te weten of en hoe de continuïteit van de plaats of hoe de convergentie van de parameter of de andere variabelen afhangt. Bijvoorbeeld alle functies $f_n : x \mapsto n \sin(x)$ op \mathbb{R} voor $n \in \mathbb{N}$ zijn begrensd, want $|n \sin x| \leq n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, maar ze zijn niet uniform begrensd: er is geen grens die voor al deze functies tegelijkertijd geldt.

Twee voorbeelden bij het begrip uniform zullen we hieronder beschrijven. Allereerst het begrip uniforme limiet.

Definitie 1.1.4 Stel $f_i : D \rightarrow B$ voor $i \in I$ zijn functies. Hier is D het domein, B het bereik en I een indexverzameling.

We zeggen dat $\lim_{z \rightarrow w} f_i(z) = \ell_i$ uniform voor $i \in I$ als: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $i \in I$ als $0 < |z - w| < \delta$ dan geldt dat $|f_i(z) - \ell_i| < \varepsilon$.

In het uniforme geval is δ alleen van ε afhankelijk terwijl bij $\lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q$ (zonder uniformiteit) de δ zowel van q als van ε afhankelijk kan zijn. In wiskundige steno³:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q \quad \text{voor alle } q \in I \text{ betekent:} \\ \forall q \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{q,\varepsilon} > 0 \text{ zodanig dat } \forall z \text{ geldt} \\ 0 < |z - w| < \delta_{q,\varepsilon} \Rightarrow |f_q(z) - \ell_q| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q \quad \text{uniform voor } q \in I \text{ betekent:} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ zodanig dat } \forall z, \forall q \in I \text{ geldt} \\ 0 < |z - w| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_q(z) - \ell_q| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tenslotte nog de definitie van uniforme continuïteit. Hierbij beschouwen we geen familie van functies maar willen we dat de functie f in elk punt van zijn definitiegebied ‘dezelfde modus’ van continuïteit heeft.

Definitie 1.1.5 Beschouw een functie $f : D \rightarrow B$ met D het domein en B het bereik in \mathbb{R} of \mathbb{C} .

De functie f heet uniform continu op D als:

³ \forall = voor alle; \exists = er is.

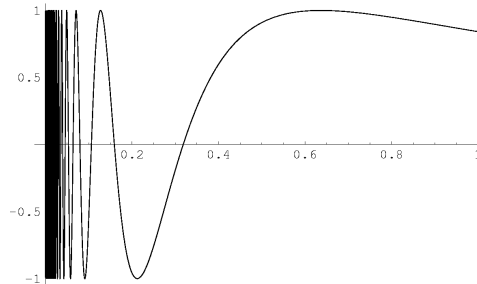
► *uniform
continu*

voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat geldt
voor alle $z, w \in D$ als $|z - w| < \delta$ dan $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

□

Voorbeeld 1

De functie $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ is wel continu maar is niet uniform continu.



De continuïteit volgt omdat f de samenstelling van twee bekende continue functies is:

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ op het halfopen interval } (0, 1], \text{ en}$$

$$t \mapsto \sin t \text{ op het interval } [1, \infty).$$

Om te laten zien dat de functie niet uniform continu is geven we een bewijs uit het ongerijmde. Dat wil zeggen we nemen aan dat de uitspraak wel juist is en laten zien dat daaruit een onwaarheid volgt.

Volgens de aanname is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een δ zodat enz. Dus ook voor $\varepsilon = \frac{1}{2}$ is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $z, w \in (0, 1]$ met $|z - w| < \delta$ geldt dat $|f(z) - f(w)| < \frac{1}{2}$. Waarom dat $\varepsilon = \frac{1}{2}$ een handige keuze is ziet u als volgt.

Kies $n \in \mathbb{N}$ zo groot dat $\left| \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi(n+\frac{1}{2})} \right| < \delta$. Een directe berekening laat zien dat dit mogelijk is. Kieszen we vervolgens $z = \frac{1}{2\pi n}$ en $w = \frac{1}{2\pi(n+\frac{1}{2})}$ dan vinden we dat $|z - w| < \delta$ en ook

$$|f(z) - f(w)| = \left| \sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) - \sin\left(\frac{1}{2\pi(n+\frac{1}{2})}\right) \right| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Dit is in tegenspraak met de aanname. _____

□

Opgave 5 Bewijs voor de functie f in (1.1) de volgende uitspraken:

- i. voor alle $x \in (0, 1]$ geldt $\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = 0$;
- ii. voor alle $y \in (0, 1]$ geldt $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x + iy)| = 2$;
- iii. niet geldt: $\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = 0$ uniform voor $x \in (0, 1]$.

□

Opgave 6 Is de functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{x}$ uniform continu?
Is de functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ uniform continu? _____

□

Opgave 7 Beschouw de functies $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f_n(x) = x^n$. Er geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Geldt deze limiet uniform? _____

1.2 Reeksen

- *reeks* Een object van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ met $\beta_n \in \mathbb{C}$ heet een *reeks*. Convergentie voor reeksen in \mathbb{C} wordt gedefinieerd op dezelfde wijze als voor reeksen in \mathbb{R} .

Definitie 1.2.1 We nemen $\beta_n \in \mathbb{C}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

- *convergente reeks* Een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ heet convergent als $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \beta_n$ bestaat.
- *absoluut convergente reeks* Een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ heet absoluut convergent als $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k |\beta_n|$ bestaat.

- *divergente reeks* Een reeks die niet convergent is heet *divergent*.

De limiet $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \beta_n$ wordt vaak ook geschreven als $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$. Ditzelfde symbool voor zowel het 'object' reeks als zijn mogelijke limiet levert hoogstens een schijntegenstelling:

- de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ bestaat (als 'object' van bovenstaande vorm);
- de limiet $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ bestaat niet (het is geen getal in \mathbb{C}).



Opgave 8 Bewijs de volgende beweringen.

i. $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

De logische omkering⁴ die hierbij hoort is de volgende:

als $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \text{ bestaat niet, of,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \neq 0 \text{ (limiet bestaat wel en is niet gelijk aan 0)} \end{array} \right\}$, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ divergent.

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$ is convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent.

iii. $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \beta_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \beta_n$ zijn convergent. _____



Opgave 9 Geef een rij $\beta_n \in \mathbb{C}$ zodat geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is divergent. _____



Opgave 10 Geef een rij $\beta_n \in \mathbb{C}$ zodat geldt:

$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent en $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$ is divergent. _____



Opgave 11 Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ divergent of convergent? _____

⁴De logische omkering van "als A, dan B" is "als niet B, dan niet A". Bijvoorbeeld: "als het sneeuwt dan is het koud" heeft dezelfde betekenis als "als het niet koud is dan sneeuwt het niet".



Opgave 12 Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ divergent of convergent? _____

1.2.1 Standaard convergentiecriteria

Bij reeksen met reële getallen heeft men waarschijnlijk al van het quotiëntkenmerk en het wortelkenmerk gehoord. Ook voor complexe getallen kan men dergelijke resultaten gebruiken als men daarbij de tweede regel van de eerste opgave op baldzijde 8 in het oog houdt:

► *quotiënt-
kenmerk*

Hulpstelling 1.2.2 (quotiëntkenmerk)

Stel β_n is een rij complexe getallen en $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_{n+1}/\beta_n|$ bestaat.

- Als $\ell < 1$, dan convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.
- Als $\ell > 1$, dan divergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

► *wortel-
kenmerk*

Hulpstelling 1.2.3 (wortelkenmerk)

Stel β_n is een rij complexe getallen en $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta_n|}$ bestaat.

- Als $\ell < 1$, dan convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.
- Als $\ell > 1$, dan divergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Een zware eis voor het toepassen van een van beide criteria is het bestaan van de betreffende limiet. We zullen zien dat we het wortelkenmerk kunnen aanpassen om dit probleem te vermijden. Daarvoor zullen we de limiet vervangen door de limsup.

1.2.2 De limes superior van een reële rij

De begrippen limiet en maximum zouden de lezer vertrouwd moeten zijn. Een uitbreiding van het begrip maximum is het supremum.

► *supremum*

Definitie 1.2.4 Stel A is een deelverzameling van \mathbb{R} . Het supremum van A is de kleinste bovengrens van A , dat wil zeggen:

$$a = \sup A \text{ als } \begin{cases} \text{voor alle } x \in A \text{ geldt } x \leq a \text{ (bovengrens), en} \\ \text{als } b < a \text{ dan is er een } x \in A \text{ met } b < x \text{ (kleinste).} \end{cases}$$

► *infimum*

Opmerking: De grootste ondergrens van een deelverzameling van \mathbb{R} heet *infimum*.

□

Voorbeeld 2

Het supremum van het open interval $(1, 5)$ is 5. Merk op dat deze verzameling geen maximum heeft. Voor het gesloten interval $[1, 5]$ geldt

$$\text{maximum} = \text{supremum} = 5.$$

Het supremum van $\left\{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$ is 1.

Het supremum van \mathbb{N} is alleen in oneigenlijke zin gedefinieerd: ∞ . Het supremum van de lege verzameling is ook alleen in oneigenlijke zin gedefinieerd: $-\infty$. —

Limiet en supremum worden op de volgende wijze voor een rij reële getallen gecombineerd tot limsup:

► *limes superior* **Definitie 1.2.5** Zij $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een begrensde rij reële getallen. De limes superior van deze rij definieert men door

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} b_k \right).$$

Voor reële rijen $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die niet naar boven begrensd zijn definieert men (in oneigenlijke zin)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

► *limes inferior* **Opmerking:** Er bestaat ook een *limes inferior*:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} b_k \right).$$

Opmerking: Stel $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is een naar boven begrensd reële rij. De daaruit geconstrueerde rij $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$, is dalend:

$$\sup_{k \geq n} b_k = \max \left(b_n, \sup_{k \geq n+1} b_k \right) \geq \sup_{k \geq n+1} b_k.$$

Als $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bovendien naar onderen begrensd is dan wordt $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ ook door dezelfde grens naar onderen begrensd. Daarmee wordt $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ een dalende begrensd rij. Omdat elke begrensd monotone rij een limiet heeft zien we dat elke begrensd rij een (eindige) limsup heeft.

□

Voorbeeld 3

Bereken $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ met $b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$. We vinden

$$\begin{aligned} \{b_n\}_{n=1}^{\infty} &= \left\{ -2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \frac{9}{8}, -\frac{10}{9}, \frac{11}{10}, -\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, -\frac{14}{13}, \frac{15}{14}, -\frac{16}{15}, \dots \right\}, \\ \{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n=1}^{\infty} &= \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{15}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{16}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Omdat de limiet van deze laatste rij 1 is, volgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} b_k \right) = 1. —$$



Opgave 13 Bereken

- i. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$,
- iii. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left((-2)^{4-n} + e^{i\frac{\pi}{2}n} \right)$,
- ii. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{2}\pi n \right)$,
- iv. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (-1 + \arctan n)$.

En wat verwacht u bij $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin n$? _____

Tenslotte nog een paar verbanden tussen limsup en limiet.

Hulpstelling 1.2.6 Gegeven zijn twee begrensde rijen reële getallen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- i. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat, dan geldt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- ii. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, dan geldt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Opmerking: Als beide rijen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet hebben, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Voor de limsup geldt zo iets meestal niet. Neem bijvoorbeeld $a_n = (-1)^n$ en $b_n = (-1)^{n+1}$. Dan geldt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \cdot 1 = 1$, terwijl $a_n b_n = -1$ impliceert dat $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -1$. We zien dus dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$



Opgave 14 Bewijs de twee uitspraken van deze hulpstelling. _____

1.2.3 Een sterker convergentiecriterium

We kunnen nu de uitbreiding van het wortelkenmerk formuleren:

► *uitgebreide wortelkenmerk*

Stelling 1.2.7 (uitgebreide wortelkenmerk) Stel β_n is een rij complexe getallen. Definieer $\ell \in [0, \infty]$ door $\ell := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta_n|}$.

- Als $\ell < 1$, dan convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.
- Als $\ell > 1$, dan divergeert $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Opmerking: Voor $\ell = 1$ is niet zonder meer een conclusie voor convergentie te trekken. Bekijk maar eens de rijen met $\beta_n = \frac{1}{n+1}$ en $\beta_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Opmerking: Elke rij niet-negatieve reële getallen, dus ook de reële rij $\left\{ \sqrt[n]{|\beta_n|} \right\}_{n=0}^{\infty}$ met β_n als boven, heeft een limsup in $[0, \infty]$. Daarmee is dit uitgebreide wortelkenmerk een veel sterker resultaat dan het gewone wortelkenmerk.

Bewijs: Het eerste deel. Als $\ell < 1$ dan nemen we $\ell_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ell$ en merken op dat ook geldt $\ell_0 < 1$. Uit de definitie van limsup volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $\sqrt[n]{|\beta_n|} < \ell_0$. Dan volgt dat

$$|\beta_n| < \ell_0^n \text{ voor alle } n \geq N$$

en dus voor alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |\beta_k| &\leq |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \sum_{k=N}^n \ell_0^k \leq \\ &\leq |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \sum_{k=N}^{\infty} \ell_0^k = \\ &= |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \frac{\ell_0^N}{1 - \ell_0}. \end{aligned}$$

Stijgende begrensde rijen zijn convergent⁵ en dus is $\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|$ convergent en daarmee is $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ absoluut convergent en dus ook gewoon convergent.

Het tweede deel. Als $\ell > 1$ dan is er een deelrij $\{\beta_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ zodat $\sqrt[n_k]{|\beta_{n_k}|} > 1$ en dus $|\beta_{n_k}| > 1$. Dan geldt niet $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ en dus is $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ divergent.

► *deelrij*

Overigens noemt men $\{\beta_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ een *deelrij* van $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ als $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$. Bijvoorbeeld $\{4^k\}_{k=0}^{\infty}$ is een deelrij van $\{(i\sqrt{2})^n\}_{n=0}^{\infty}$. Om dat te zien kiest men $n_k = 4k$. □

□

Opgave 15 Bij welke onderstaande reeksen geeft het uitgebreide wortelkenmerk uitsluitsel over convergentie of divergentie?

$$\begin{array}{lll} i. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}, & iv. \sum_{n=0}^{\infty} n i^n, & vii. \sum_{n=0}^{\infty} i^n, \\ ii. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{i^n}, & v. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}, & viii. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \\ iii. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{2^n}, & vi. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{n^2}, & ix. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{n}. \end{array}$$

□

Opgave 16 Bepaal bij de resterende reeksen hierboven alsnog convergentie of divergentie. _____

⁵Zoek in uw analyse of calculus-boek naar *Monotonic Sequence Theorem*.

1.3 Machtreksen

► *machtreks*

Vele functies die een rol spelen in de mathematische fysica zijn gedefinieerd in de vorm van een machtreks. Een *machtreks* in z is een uitdrukking van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $a_n \in \mathbb{C}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We zullen enkele elementaire eigenschappen van machtreksen onderzoeken. Machtreksen worden gebruikt bij het ‘expliciet’ oplossen van differentiaalvergelijkingen.

► *verschoven machtreks*

Ook kan men een *verschoven machtreks* tegenkomen. Met $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ ziet een verschoven machtreks in z er als volgt uit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

□

Voorbeeld 4

► *meetkundige reeks*

De meest bekende machtreks is die met $a_n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dit is de *meetkundige reeks* met reden z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$ geldt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \geq 1$ is deze reeks divergent.

Bewijs: Dit kan men als volgt laten zien. Neem $M \in \mathbb{N}$ en bereken:

$$(1 - z) \sum_{n=0}^M z^n = (1 - z) (1 + z + z^2 + \dots + z^M) = 1 - z^{M+1}.$$

Een deling geeft

$$\sum_{n=0}^M z^n = \frac{1 - z^{M+1}}{1 - z} \quad \text{als } z \neq 1,$$

en de limiet nemen levert

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{als } |z| < 1.$$

Een noodzakelijk voorwaarde voor het bestaan van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Daaruit volgt dat $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M z^n$ niet bestaat voor $|z| \geq 1$. □ _____

□

Opgave 17 Bepaal voor welke $z \in \mathbb{C}$ de volgende reeksen convergeren en bereken de limiet voor die z .

- i. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$
- iii. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$
- v. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (z - 2)^n,$
- ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n,$
- iv. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n,$
- vi. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}.$

Hierboven staan drie ‘gewone’ machtreksen en twee verschoven machtreksen. In het laatste onderdeel staat geen machtreks in z , wel een machtreks in e^z . _____

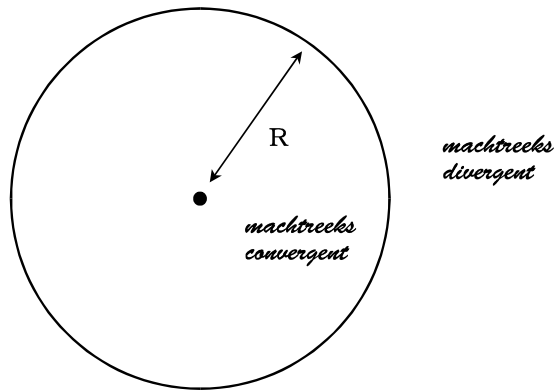
► *formule van Cauchy-Hadamard* **Stelling 1.3.1** We beschouwen de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $a_n \in \mathbb{C}$ voor $n \in \mathbb{N}$. We definiëren $R \in [0, \infty]$ op de volgende wijze:

$$\begin{aligned} \text{als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= 0 & \text{dan } R &= \infty, \\ \text{als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \ell \in \mathbb{R}^+ & \text{dan } R &= \ell^{-1}, \\ \text{als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \infty & \text{dan } R &= 0. \end{aligned}$$

Er geldt:

- i. als $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < R$ dan convergeert de reeks absoluut;
- ii. als $z \in \mathbb{C}$ met $|z| > R$ dan divergeert de reeks.

► *convergentiestraal* R heet de convergentiestraal van de machtreeks.



Deze stelling doet geen uitspraak over de convergentie van de machtreeks als $|z| = R$.

Opmerking: Bij iedere machtreeks is het convergentiegebied dus cirkelvormig. Binnen die cirkel convergeert de machtreeks, erbuiten divergeert de machtreeks en vooral snog kan op de cirkelrand zowel divergentie als convergentie optreden. Convergentieonderzoek op de rand is vaak erg technisch en zullen we hier nauwelijks onderzoeken.

Opmerking: Men kan laten zien dat als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat, deze limiet gelijk is aan $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Deze laatste uitdrukking bestaat in $[0, \infty]$ voor elke rij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ in \mathbb{C} terwijl de eerste limiet, net als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, niet hoeft te bestaan. We komen hierop terug in het volgende voorbeeld.

Bewijs: Volgens het uitgebreide wortelkenmerk (zie bladzijde 11) is deze machtreeks convergent als $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$ en divergent als $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$. Volgens de rekenregels bij limsup geldt indien $\ell \in [0, \infty)$ dat:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|z^n|} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z^n|} = \ell |z|.$$

Voor $\ell = 0$ volgt $\ell |z| = 0$ en is de machtreeks divergent voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Voor $0 < \ell < \infty$ geldt dat de reeks is convergent als $|z| < \ell^{-1} = R$ en divergent als $|z| > \ell^{-1} = R$.

Tenslotte, als $\ell = \infty$ en $z \neq 0$ geldt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \infty$ en is daarmee de reeks divergent. \square

□

Voorbeeld 5

Bereken het convergentiegebied van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} (z - i)^n$.

Voor het uitgebreide wortelkenmerk berekenen we $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-2)^n}{n^2} (z - i)^n \right|}$:

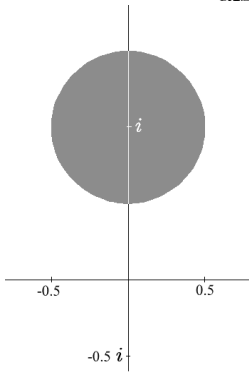
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-2)^n}{n^2} (z - i)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} |z - i| = 2 |z - i|.$$

Dus $R = \frac{1}{2}$ en de reeks convergeert voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z - i| < \frac{1}{2}$ en divergeert als $|z - i| > \frac{1}{2}$. Het convergentiegebied wordt gevraagd en dus moeten we nog

$w = z - i \in \mathbb{C}$ met $|w| = \frac{1}{2}$ onderzoeken. In dit geval is dat niet zo lastig als je je herinnert dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert⁶:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n^2} w^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Omdat absolute convergentie gewone convergentie impliceert, vinden we dat de reeks convergeert voor alle $w \in \mathbb{C}$ met $|w| = \frac{1}{2}$. Tenslotte, na weer ‘verschuiven’, zien we dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} (z - i)^n$ convergeert dan en alleen dan als $|z - i| \leq \frac{1}{2}$.



□

Voorbeeld 6

Bereken de convergentiestraal van $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n!}$.

Willen we dit als een nette machtreeks schrijven, namelijk $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n!} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, dan zullen we a_k als volgt moeten definiëren

$$\begin{aligned} a_k &= 1 && \text{als } k = n! \text{ voor een even } n \in \mathbb{N}, \\ a_k &= -1 && \text{als } k = n! \text{ voor een oneven } n \in \mathbb{N}, \\ a_k &= 0 && \text{anders.} \end{aligned}$$

Dan $\ell = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n!]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$ en dus $R = \frac{1}{\ell} = 1$.

Ook kunnen we direct het uitgebreide wortelkenmerk gebruiken:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n z^{n!}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |z|^{(n-1)!} = \begin{cases} \infty & \text{als } |z| > 1, \\ 1 & \text{als } |z| = 1, \\ 0 & \text{als } |z| < 1. \end{cases}$$

□

Voorbeeld 7

Bereken de convergentiestraal van $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\cos n) z^n$.

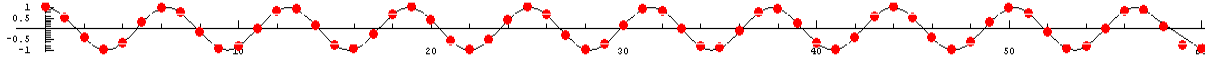
⁶Voor de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is het voldoende om te laten zien dat deze reeks begrensd is. Dat gaat bijvoorbeeld als volgt:

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^k \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{k} \leq 2.$$

Opnieuw gebruikt men het uitgebreide wortelkenmerk:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2^n (\cos n) z^n|} = 2|z| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\cos n|}. \quad (1.2)$$

Vervolgens kan men opmerken dat er oneindig veel n zijn met $|\cos n| > \frac{1}{2}$.



Men kan zelfs laten zien dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$|\cos n| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{of} \quad |\cos(n+1)| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{of} \quad |\cos(n+2)| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Inderdaad, omdat $1 < \frac{1}{2}\pi < 2$, geldt voor iedere $t \in \mathbb{R}$ dat t , of $t+1$, of $t+2$ binnen de intervallen $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\pi - \frac{1}{4}\pi, k\pi + \frac{1}{4}\pi]$ ligt. Voor x binnen deze intervallen geldt $|\cos x| \geq \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dan

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|\cos k|} &\geq \sup_{k \in \{n, n+1, n+2\}} \sqrt[k]{|\cos k|} = \\ &= \max \left(\sqrt[n]{|\cos n|}, \sqrt[n+1]{|\cos(n+1)|}, \sqrt[n+2]{|\cos(n+2)|} \right) \geq \\ &\geq \max \left(\sqrt[n]{|\cos n|}, \sqrt[n]{|\cos(n+1)|}, \sqrt[n]{|\cos(n+2)|} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en er volgt

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\cos n|} \leq 1$$

en met (1.2) dat $R = \frac{1}{2}$. _____

Gevolg 1.3.2 De machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ hebben dezelfde convergentiestraal.



Opgave 18 Bewijs Gevolg 1.3.2 met behulp van het uitgebreide wortelkenmerk. _____



Opgave 19 Bepaal het convergentiegebied van de volgende reeksen binnen \mathbb{C} en geef een schets van dit gebied. U hoeft zich niet om convergentie op de rand van het gebied te bekommeren.

- | | | |
|---|---|--|
| i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$; | v. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$; | ix. $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh(n) z^n$; |
| ii. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n$; | vi. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+z)^n$; | x. $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh(\sqrt{n}) z^n$; |
| iii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$; | vii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (e^z)^n$ | xi. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$; |
| iv. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{(n^2)}$; | viii. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n$; | xii. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} z^{n!}$. |
- _____

► *exponentiële
functie*

Na onderdeel iii. uit laatste opgave kunnen we voor alle $z \in \mathbb{C}$ de *exponentiële functie* definiëren door

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Voor $x \in \mathbb{R}$ weten we via de Taylor-reeks dat $e^x = \exp(x)$. Men kan zo ook de complexe e -macht definiëren via $e^z = \exp(z)$. Deze functie komt inderdaad overeen met de complexe e -macht die we al eerder ontmoet hebben.

Enkele andere verwante oude bekenden zijn de volgende:

$$\begin{aligned} \text{sinus:} \quad \sin(z) &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \text{cosinus:} \quad \cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \text{sinushyperbolicus:} \quad \sinh(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \text{cosinushyperbolicus:} \quad \cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Ter herinnering nog even de bekende gelijkheid $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

2. DIFFERENTIËREN IN \mathbb{C}

Continuïteit voor complexe functies lijkt nauwelijks te verschillen met continuïteit voor reële functies. Met enige naïviteit zou men kunnen verwachten dat ook differentieerbaarheid wel niets nieuws zal brengen. Dit verwachtingspatroon zal niet bevestigd worden.

2.1 De definitie

Definitie 2.1.1 Zij D een gebied in \mathbb{C} en $w \in D$.

De functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heet differentieerbaar in w als

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \text{ bestaat.}$$

Als deze limiet bestaat dan schrijven we $f'(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$.

► differentieerbaar

□

Voorbeeld 8

We onderzoeken waar de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ differentieerbaar is.

Het differentiequotient is

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} &= \frac{(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Re} w)^2}{z - w} = \\ &= (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}. \end{aligned}$$

Omdat $\lim_{z \rightarrow w} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$ niet bestaat:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\operatorname{Re}(w+h) - \operatorname{Re} w}{w+h-w} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{h}{h} = 1, \\ \lim_{\substack{ih \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\operatorname{Re}(w+ih) - \operatorname{Re} w}{w+ih-w} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{0}{ih} = 0, \end{aligned}$$

bestaat $\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$ niet als $\lim_{z \rightarrow w} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) \neq 0$. Met andere woorden, f is niet differentieerbaar in w als $\operatorname{Re} w \neq 0$.

Als $\operatorname{Re} w = 0$ dan geldt $\lim_{z \rightarrow w} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) = 2 \operatorname{Re} w = 0$ en er volgt uit de begrensdsheid van $\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$ dat $\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = 0$. Merk op dat $\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$ inderdaad begrensd is:

$$\left| \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w} \right| = \frac{|\operatorname{Re}(z - w)|}{|z - w|} \leq 1 \text{ voor alle } z \neq w.$$

Bovenstaande f is dus alleen differentieerbaar op de imaginaire as. _____

□

Opgave 20 Laat zien dat de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = \bar{z}$ in geen enkele $w \in \mathbb{C}$ differentieerbaar is. _____

□

Opgave 21 Laat zien dat de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $f(x, y) = (x, -y)$ voor alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ differentieerbaar is. Gebruik hiervoor de definitie van reëel differentieerbaar¹. _____

De beide laatste opgaven laten zien dat er een groot verschil is tussen differentieerbaarheid voor functies van \mathbb{R}^2 naar \mathbb{R}^2 en differentieerbaarheid voor functies van \mathbb{C} naar \mathbb{C} .

□

Opgave 22 Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ waar de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = |z|^2$ differentieerbaar is. _____

□

Opgave 23 In een opgave in het eerstejaarsvak analyse wordt gevraagd om te bewijzen dat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{voor } x \neq 0, \\ 0 & \text{voor } x = 0, \end{cases}$$

(reëel) differentieerbaar is in 0. Is de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) & \text{voor } z \neq 0, \\ 0 & \text{voor } z = 0, \end{cases}$$

(complex) differentieerbaar in 0? _____

► *analytisch*

Definitie 2.1.2 Zij G een gebied in \mathbb{C} en zij f een functie van G naar \mathbb{C} .

- f heet analytisch op G als f differentieerbaar is in ieder punt van G .
- f heet analytisch in $z \in G$ als er $r > 0$ bestaat zodanig dat f analytisch op $B_r(z)$ is.

► *holomorf*

In plaats van *analytisch* wordt ook wel de term *holomorf* gebruikt.

□

Voorbeeld 9

De functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ is differentieerbaar in z voor $z \in i\mathbb{R}$ maar in geen enkele $z \in \mathbb{C}$ analytisch. Zie het vorige voorbeeld. _____

De samenstellingsregels voor de complexe afgeleide zijn zoals voor de reële afgeleide.

¹De functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heet differentieerbaar in $w \in \mathbb{R}^n$ als er een lineaire afbeelding $Df_w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestaat zodanig dat

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{|f(w+h) - f(w) - Df_w h|}{|h|} = 0.$$

De matrix voor Df_w heeft $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w)$ op plaats ij .

Stelling 2.1.3 Als $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar zijn in z , dan zijn $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (mits $g(z) \neq 0$) en $f \circ g$ differentieerbaar en gelden

$$\text{somregel} \quad (f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$\text{productregel} \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$\text{quotiëntregel} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2} \quad \text{mits } g(z) \neq 0,$$

$$\text{kettingregel} \quad (f \circ g)'(z) = (f' \circ g)(z) \cdot g'(z).$$

Bewijs: Analoog aan het reële geval. □

Onmiddellijk uit de definitie volgt dat de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z$ analytisch op \mathbb{C} is:

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \lim_{z \rightarrow w} \frac{z - w}{z - w} = 1 \text{ bestaat voor elke } w \in \mathbb{C}.$$

► *polynoom*

Als gevolg van som- en productregel vinden we vervolgens dat iedere *polynoom*, dwz. een functie $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ van de vorm

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \text{ met } a_i \in \mathbb{C},$$

analytisch op \mathbb{C} is.

► *rationale functie*

Gebruiken we ook de quotiëntregel dan vinden we dat iedere *rationale functie*, dwz. een functie van de vorm

$$r(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}$$

waarbij p_1 en p_2 polynomen zijn, analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. Hierbij is $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ de verzameling complexe getallen waarvoor geldt $p_2(z) = 0$.

□

Opgave 24 Aan welke eisen voldoen de coëfficiënten van de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met

$$f(x + iy) = a + b_1x + b_2y + c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2$$

als f een differentieerbare functie in 0 is?

En als f een analytische functie op \mathbb{C} is? _____

□

Opgave 25 Het polynoom p heeft een nulpunt z_0 . Laat zien dat de functie

$$r(z) = \begin{cases} \frac{p(z)}{z - z_0} & \text{voor } z \neq z_0, \\ p'(z_0) & \text{voor } z = z_0, \end{cases}$$

differentieerbaar is op geheel \mathbb{C} .

Als z_0 een tweevoudig nulpunt is kan men dan c zodanig kiezen dat

$$q(z) = \begin{cases} \frac{p(z)}{(z - z_0)^2} & \text{voor } z \neq z_0, \\ c & \text{voor } z = z_0, \end{cases}$$

differentieerbaar is op geheel \mathbb{C} ? Motiveer. _____

Uit een complexe functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kunnen we de volgende reële functies afscheiden:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \operatorname{Re} f(x + iy), & y &\mapsto \operatorname{Re} f(x + iy), \\ x &\mapsto \operatorname{Im} f(x + iy), & y &\mapsto \operatorname{Im} f(x + iy). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Als f differentieerbaar is kunnen we dan iets zeggen over de reële differentieerbaarheid van deze 4 functies?

Hulpstelling 2.1.4 *Als $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar is dan bestaan de partiële afgeleiden van de reële functies in (2.1) en geldt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f(x + iy) &= \operatorname{Re} f'(x + iy), \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f(x + iy) &= \operatorname{Im} f'(x + iy), \\ \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f(x + iy) &= \operatorname{Re} i f'(x + iy) = -\operatorname{Im} f'(x + iy), \\ \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f(x + iy) &= \operatorname{Im} i f'(x + iy) = \operatorname{Re} f'(x + iy). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Samengevat: $\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = f'(x + iy)$ en $\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = i f'(x + iy)$.

Bewijs: De resultaten lijken erg voor de hand te liggen. We geven toch maar de wat meer nauwkeurige argumenten.

Als we de reële differentieerbaarheid van de eerste functie $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ als functie van x willen onderzoeken, zeg de differentieerbaarheid in (a, b) , dan moeten we laten zien dat de partiële afgeleide naar x bestaat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Re} f(x + ib) - \operatorname{Re} f(a + ib)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re} \frac{f(x + ib) - f(a + ib)}{x - a} = \lim_{\substack{z \rightarrow a + ib \\ \operatorname{Im} z = b}} \frac{f(z) - f(a + ib)}{z - (a + ib)} = \\ &= \operatorname{Re} f'(a + ib). \end{aligned}$$

Inderdaad volgen de laatste stappen omdat de complexe limiet $\lim_{z \rightarrow a + ib} g(z) = \ell$ impliceert dat $\lim_{x \rightarrow a \text{ met } x \in \mathbb{R}} g(x + ib) = \ell$ en bovendien, als die limiet bestaat, geldt

$$\lim_{x \rightarrow a \text{ met } x \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} g(x + ib) = \operatorname{Re} \left(\lim_{x \rightarrow a \text{ met } x \in \mathbb{R}} g(x + ib) \right) = \operatorname{Re} \ell.$$

Voor de andere drie functies gelden soortgelijke relaties. Bij het differentiëren naar y krijgt men een extra term i :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{u(a, y) - u(a, b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \operatorname{Re} i \frac{f(x + iy) - f(a + ib)}{iy - ib} = \operatorname{Re} i f'(a + ib).$$

□

2.2 Machtrekken en differentieerbaarheid

Nadat we de differentieerbaarheid van polynomen en rationale functies gezien hebben is de volgende stap de differentieerbaarheid van functies die in de vorm van een machtrek zijn te schrijven. Gevolg 1.3.2 heeft daarvoor al voorbereidend werk gedaan.

Stelling 2.2.1 Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $a_n \in \mathbb{C}$ een machtrek met convergentiestraal R . Definieer de functie $f : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dan is f analytisch op $B_R(0)$ en voor alle $z \in B_R(0)$ geldt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

► *analyticiteit van machtrekken*



Opmerking: Simpel gezegd: voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < R$ geldt $\frac{d}{dz} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{d}{dz} a_n z^n)$. Merk op dat zowel de afgeleide als de oneindige som door limieten gedefinieerd zijn. In het algemeen kan men niet zonder meer de volgorde van twee limieten omdraaien. Er is dus wel degelijk een bewijs nodig voor bovenstaand resultaat.

Bewijs: We zullen laten zien dat f differentieerbaar is in $w \in B_R(0)$ met afgeleide als boven. Dat is hetzelfde als te laten zien dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{als } |z - w| < \delta \text{ dan } \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \right| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Volgens Gevolg 1.3.2 weten we dat $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ convergentiestraal R heeft. Neem δ_1 tussen 0 en $R - |w|$. Voor $|z - w| < \delta_1$ en dus $|z| < R$ geldt:

$$\begin{aligned} & \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \\ & = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \end{aligned}$$

(alle limieten hier bestaan dus ook de limiet van de som)

$$\begin{aligned} & = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) = \\ & = \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n w^{n-1}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Elk van deze drie uitdrukkingen kunnen we kleiner dan $\frac{1}{3}\varepsilon$ krijgen door N groot genoeg en $|z - w|$ klein genoeg te nemen. Dat zien we als volgt. Omdat $\frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}$ volgt dat

$$\left| \frac{z^n - w^n}{z - w} \right| \leq n (|w| + \delta_1)^{n-1}.$$

Omdat $(|w| + \delta_1) < R$ geldt, is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| (|w| + \delta_1)^{n-1}$ convergent en dus bestaat er een N zodanig dat

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| (|w| + \delta_1)^{n-1} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Ook geldt dan dat

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n w^{n-1} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| |w|^{n-1} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Met (2.4) blijft er over dat

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \right| < \left| \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) \right| + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Omdat $rest(z, w) := \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right)$ slechts eindig veel termen bevat en omdat $\lim_{z \rightarrow w} \frac{z^n - w^n}{z - w} = n w^{n-1}$ bestaat er $\delta_2 > 0$ zodanig dat voor $|z - w| < \delta_2$ geldt dat $|rest(z, w)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Door $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ te nemen hebben we aan het gevraagde in (2.3) voldaan. \square

Als gevolg vinden we dat bijvoorbeeld de exponentiële functie, de cosinus en de sinus analytisch zijn op \mathbb{C} . Gebruiken we de quotiëntregel dan vinden we dat de cotangens gedefinieerd door $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

\square

Opgave 26 Bewijs deze laatste uitspraak. En waar is de tangens analytisch? _____

2.3 Cauchy-Riemann

Het grote verschil tussen differentieerbaar in \mathbb{R} (\mathbb{R}^2) en \mathbb{C} zien we met de volgende stelling.

Voor de formulering hebben we enkele afspraken nodig: D is een gebied in \mathbb{C} en bij een functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiëren we twee reële functies $u, v : D_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy), \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy). \end{aligned}$$

Dus $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ voor $(x, y) \in D_{\mathbb{R}}$.



Stelling 2.3.1 (Cauchy-Riemann) *Zij f, u, v, D en $D_{\mathbb{R}}$ als boven en neem $(a, b) \in D_{\mathbb{R}}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

- i. f is (complex) differentieerbaar in $a + ib$;
- ii. u, v zijn (reëel) differentieerbaar in (a, b) en bovendien geldt

$$\begin{aligned} u_x(a, b) &= v_y(a, b), \\ v_x(a, b) &= -u_y(a, b). \end{aligned} \tag{2.5}$$

► *Cauchy-Riemann-vergelijkingen*

De twee vergelijkingen in (2.5) heten samen de *Cauchy-Riemann-differentiaalvergelijkingen*.

Opmerking: Als $z \mapsto f(z)$ complex differentieerbaar is dan volgt uit Hulpstelling 2.1.4 dat $x \mapsto f(x + iy)$ en $y \mapsto f(x + iy)$ reëel differentieerbaar zijn en bovendien dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) &= f'(x + iy) = f'(x + iy) \frac{\partial(x + iy)}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) &= if'(x + iy) = f'(x + iy) \frac{\partial(x + iy)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Dus

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy)$$

en door het reële, respectievelijk imaginaire deel hiervan te nemen krijgen we de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Misschien helpt dit als ezelsbruggetje. Met u en v als boven vinden we dan dat

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y).$$

Bewijs: $i \Rightarrow ii$. Uit Hulpstelling 2.1.4 volgt dat de partiële afgeleiden van $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ en $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ bestaan in (a, b) . Combineren van (2.2) levert $u_x(a, b) = v_y(a, b)$ en $v_x(a, b) = -u_y(a, b)$.

Om te laten zien dat niet alleen de partiële afgeleiden bestaan maar dat de functies u en v zelfs (reëel totaal) differentieerbaar zijn gebruiken we:

$$\frac{|u(x, y) - u(a, b) - (x - a)u_x(a, b) - (y - b)u_y(a, b)|}{|(x, y) - (a, b)|} =$$

$$= \frac{\left| \operatorname{Re} \left(f(x+iy) - f(a+ib) - (x-a)f'(a+ib) - i(y-b)f'(a+ib) \right) \right|}{|(x,y) - (a,b)|} \leq$$

$$\leq \left| \frac{f(x+iy) - f(a+ib) - (x+iy-a-ib)f'(a+ib)}{x+iy-a-ib} \right|$$

en deze laatste uitdrukking heeft limiet gelijk aan 0 volgens de definitie van de complexe afgeleide. Via de insluitstelling volgt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)|}{|(x,y) - (a,b)|} = 0.$$

Volgens de definitie is u (reëel totaal) differentieerbaar in (a,b) . Op analoge wijze vindt men dat v (reëel totaal) differentieerbaar is in (a,b) . \square

Bewijs: $ii \Rightarrow i$. We vergelijken $\frac{f(z)-f(a+ib)}{z-(a+ib)}$ met $u_x(a,b) + iv_x(a,b)$:

$$\frac{f(z) - f(a+ib)}{z - (a+ib)} - (u_x(a,b) + iv_x(a,b)) =$$

$$= \frac{(u(x,y) - u(a,b)) + i(v(x,y) - v(a,b))}{(x-a) + i(y-b)} - u_x(a,b) - iv_x(a,b) =$$

(na enig rekenwerk)

$$= \frac{(x-a)-i(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} \left(u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) + (y-b)v_x(a,b) \right) +$$

$$+ i \frac{(x-a)-i(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} \left(v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)u_x(a,b) \right) =$$

(gebruik nu de Cauchy-Riemann-vergelijkingen en herschrijf de noemer)

$$= \frac{(x-a)-i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \left(\frac{u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \right) +$$

$$+ i \frac{(x-a)-i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \left(\frac{v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)v_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \right).$$

De definitie van reële (totale) differentieerbaarheid zegt dat u differentieerbaar in (a,b) betekent dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

en v differentieerbaar in (a,b) dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)v_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

Met de begrensdsheid van $\frac{(x-a)-i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ vinden we

$$\lim_{z \rightarrow a+ib} \frac{f(z) - f(a+ib)}{z - (a+ib)} - (u_x(a,b) + iv_x(a,b)) = 0.$$

Anders gezegd, f is differentieerbaar in $a+ib$ en bovendien geldt

$$f'(a+ib) = u_x(a,b) + iv_x(a,b).$$

□

□

Opgave 27 We beschouwen de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{voor } z \neq 0, \\ 0 & \text{voor } z = 0. \end{cases}$$

- i. Gebruik de differentieerbaarheid van machtreeksen en de samenstellingsregels voor de afgeleide om te bewijzen dat f analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- ii. Laat zien dat $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ en $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ ook in 0 aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen.
- iii. Laat zien dat f niet differentieerbaar is in 0.
- iv. Aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen in 0 is voldaan en toch is f niet differentieerbaar in 0. Wat is hier aan de hand? _____

□

Opgave 28 Laat zien dat de functie $z \mapsto \ln |z|$ in geen enkel punt van $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ differentieerbaar is. _____

□

Opgave 29 Waar of niet waar? Motiveer het antwoord.

- i. Als f differentieerbaar is in 0 dan is f analytisch in 0.
- ii. Als f analytisch is in 0 dan is f differentieerbaar in 0.
- iii. Als f in elk punt van het gebied G differentieerbaar is en $w \in G$ dan is f analytisch in w .
- iv. Als $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ en $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ partieel (reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in $(0, 0)$, dan is f analytisch in 0.
- v. Als $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ en $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ partieel (reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in $(0, 0)$, dan is f (complex) differentieerbaar in 0.
- vi. Als $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ en $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ (totaal reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in $(0, 0)$, dan is f (complex) differentieerbaar in 0.
- vii. Als f analytisch is in 0, dan zijn er minstens twee punten waar f differentieerbaar is. _____

2.4 Afbeeldingen

Het gedrag van een functie $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kan men niet zo gemakkelijk voorstellen met een tekening. Daarvoor zouden we immers 4 dimensies nodig hebben. Een alternatief is om te bekijken hoe krommen (of zelfs rechte lijnen) zich gedragen onder zo'n afbeelding. Als $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een kromme is dan wordt het beeld van deze kromme onder f een nieuwe kromme $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ met

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)).$$

□

Voorbeeld 10

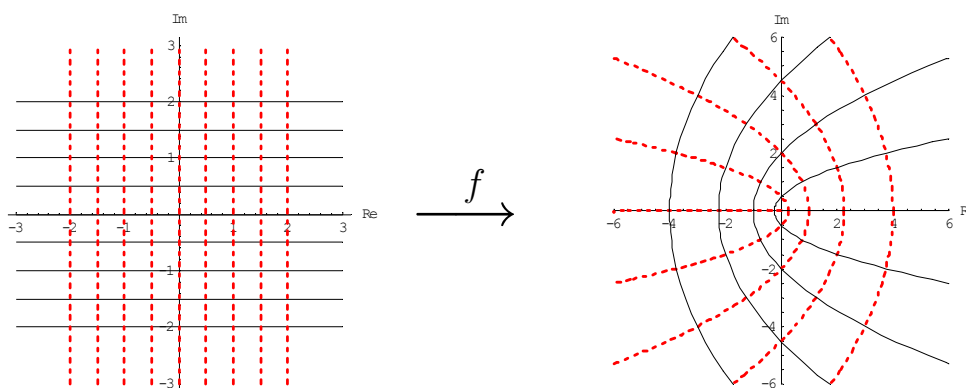
Laten we $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^2$ bekijken.

Een horizontale rechte lijn, beschreven door $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = t + ic$, wordt door de functie f afgebeeld op de kromme $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f \circ \gamma(t) = (t + ic)^2$. Noemen we $x = \operatorname{Re}(f \circ \gamma(t))$ en $y = \operatorname{Im}(f \circ \gamma(t))$ dan vinden we via

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}\left((t + ic)^2\right) = t^2 - c^2, \\ y &= \operatorname{Im}\left((t + ic)^2\right) = 2ct, \end{aligned}$$

dat $x = \left(\frac{y}{2c}\right)^2 - c^2$. Dit is een 'liggende' parabool met de 'opening' naar rechts.

Voor verticale lijnen $\gamma(t) = c + it$ vinden we evenzo $x = c^2 - \left(\frac{y}{2c}\right)^2$, een 'liggende' parabool met de 'opening' naar links. Grafisch kunnen we dat als



Merk op dat de reële as, beschreven door $\gamma(t) = t$ met $t \in \mathbb{R}$, in zijn geheel overgaat in een halve lijn, de positieve reële as (inclusief 0). Evenzo gaat de gehele imaginaire as over in de negatieve reële as (inclusief 0). _____

□

Opgave 30 We beschouwen nog steeds $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z^2$.

- Geef een schets van het beeld van $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, met $\gamma(t) = 1 + (1 + i)t$.
- Geef ook een schets van het beeld van het vierkant

$$\{z \in \mathbb{C}; 1 < \operatorname{Re} z < 2 \text{ en } 2 < \operatorname{Im} z < 3\}.$$

- Schets het volledig origineel van dit laatste beeld. _____

We kunnen nog iets bijzonders opmerken in het bovenstaande plaatje. Namelijk dat zowel originele als beeldkrommen, als ze snijden, elkaar loodrecht snijden. Alleen bij 0 gebeurt er iets vreemds.

► *conform*

Afbeeldingen die hoeken behouden worden *conform* genoemd. Voor een afbeelding $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betekent dat het volgende. Voor ieder paar gladde krommen γ_1, γ_2 , met $\gamma_1'(t) \neq 0$ en $\gamma_2'(t) \neq 0$, die elkaar snijden, noem het snijpunt $s := \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, snijden de beeldkrommen $f \circ \gamma_1$ en $f \circ \gamma_2$ elkaar in $f(s)$ met dezelfde hoek.

Stelling 2.4.1 *Zij G een gebied in \mathbb{C} . Als $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is en $f'(z) \neq 0$ voor $z \in G$, dan is f een conforme afbeelding.*

Bewijs: Zij γ een gladde kromme met $\gamma'(t) \neq 0$. Herinner je dat voor een reële kromme \mathbf{x} een richtingsvector aan de kromme in het punt $\mathbf{x}(t)$ gegeven wordt door $\mathbf{x}'(t)$. Dit kan men direct vertalen naar complexe krommen. De complexe richting van γ in $\gamma(t)$ wordt gegeven door $\gamma'(t)$. Als γ_1 en γ_2 elkaar snijden (neem weer als snijpunt $s := \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$) dan is de hoek φ , gemeten van γ_1 naar γ_2 , gegeven door

$$\varphi = \arg \left(\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} \right).$$

Evenzo geldt voor de hoek $\tilde{\varphi}$ in het snijpunt $f(s)$ tussen $f \circ \gamma_1$ en $f \circ \gamma_2$, opnieuw gemeten van $f \circ \gamma_1$ naar $f \circ \gamma_2$, dat

$$\tilde{\varphi} = \arg \left(\frac{(f \circ \gamma_2)'(t_2)}{(f \circ \gamma_1)'(t_1)} \right).$$

We vinden

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \arg \left(\frac{(f \circ \gamma_2)'(t_2)}{(f \circ \gamma_1)'(t_1)} \right) = \arg \left(\frac{f'(\gamma_2(t_2)) \cdot \gamma_2'(t_2)}{f'(\gamma_1(t_1)) \cdot \gamma_1'(t_1)} \right) = \\ &= \arg \left(\frac{f'(s) \cdot \gamma_2'(t_2)}{f'(s) \cdot \gamma_1'(t_1)} \right) = \arg \left(\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} \right) = \varphi. \end{aligned}$$

De eis $f' \neq 0$ is nodig om $\frac{0}{0}$ te vermijden. □

Opmerking: We hebben gebruik gemaakt van een kettingregel voor de samenstelling $f \circ \gamma$ met $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ reëel differentieerbaar en $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar:

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Eigenlijk zou men moeten schrijven $(f \circ \gamma)'_{re\ddot{e}el}(t) = f'_{complex}(\gamma(t)) \gamma'_{re\ddot{e}el}(t)$. De juistheid van deze kettingregel mag u zelf laten zien.



Opgave 31 Beschrijf wat de volgende afbeeldingen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ doen. Een schets zoals boven mag ook.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| i. $f(z) = iz$, | iv. $f(z) = iz^2$, |
| ii. $f(z) = z + 1 + i$, | v. $f(z) = i(z + 1)^2$, |
| iii. $f(z) = iz + 3$, | vi. $f(z) = iz^2 + z$. |



Opgave 32 Bereken en teken de kromme $f \circ \gamma$ voor $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = t + i$, en $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z^2$. _____

□

Opgave 33 We beschouwen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = \frac{1}{z}$. Bereken en teken de krommen $f \circ \gamma$ voor γ bij:

- i. rechte lijnen door 0 in de richting $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = \alpha t$;
- ii. cirkels met straal $R > 0$ en 0 als middelpunt, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = R e^{it}$;
- iii. horizontale rechte lijnen door ih met $h \in \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = t + ih$;
- iv. de rechte lijn $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + (1+i)t$.

□

Opgave 34 Gegeven $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ met $f(z) = \frac{1}{z}$. Laat zien dat f inverteerbaar is en bereken de inverse $f^{inv} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Laat verder zien dat de afbeelding $w \mapsto \frac{1}{w}$

- i. een rechte lijn door 0 afbeeldt op een rechte lijn door 0;
- ii. een rechte lijn niet door 0 afbeeldt op een cirkel;
- iii. een cirkel $\{w \in \mathbb{C}; |w - \alpha| = r\}$ met $|\alpha| = r$ afbeeldt op een rechte lijn;
- iv. een cirkel $\{w \in \mathbb{C}; |w - \alpha| = r\}$ met $|\alpha| \neq r$ afbeeldt op een cirkel.

► *Möbius-transformatie*

Een belangrijke klasse van afbeeldingen zijn de zogenoemde *Möbius-transformaties*. Dit zijn, voor $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ met $ad - bc \neq 0$, de functies

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ met } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (2.6)$$

We kunnen zo'n functie voor $c \neq 0$ herschrijven als

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Nu kan men zien dat deze functie een samenstelling is van

$$\begin{aligned} \text{een 'verschuiving':} & \quad z \mapsto z + \frac{d}{c}, \\ \text{een 'inversie':} & \quad w \mapsto \frac{1}{w}, \\ \text{een 'vermenigvuldiging':} & \quad v \mapsto \frac{bc - ad}{c^2} v, \\ \text{een 'verschuiving':} & \quad u \mapsto \frac{a}{c} + u. \end{aligned}$$

Voor $c = 0$ blijft alleen een vermenigvuldiging en een verschuiving over. Met deze samenstelling volgt dat de Möbius-transformatie 'cirkels en rechten' afbeeldt op 'cirkels en rechten'.

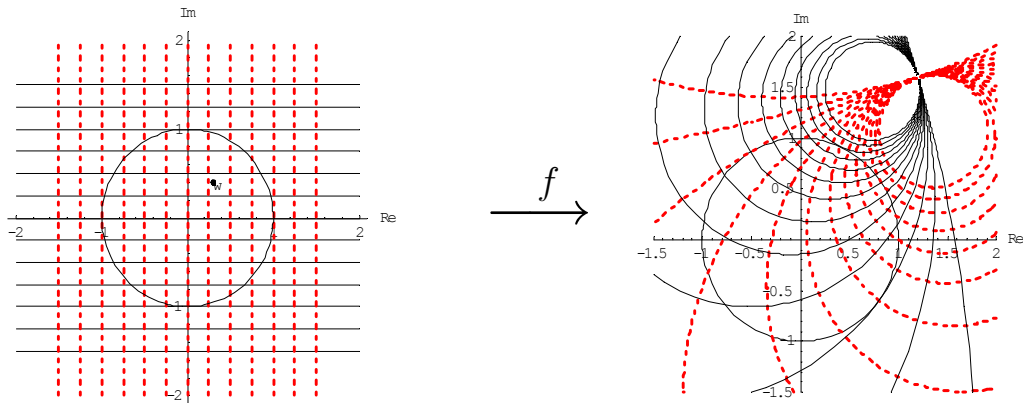
□

Voorbeeld 11

Een speciale Möbius-transformatie is de volgende. Neem $w \in \mathbb{C}$ met $|w| < 1$ en beschouw

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{w}} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ met } f(z) = \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}. \quad (2.7)$$

Bij deze functies is het beeld van de eenheidscirkel in \mathbb{C} opnieuw de eenheidscirkel.



Hier is f geschetst voor $w = \frac{3}{10} + \frac{4}{10}i$. De cirkels van het rechterplaatje snijden zich in

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z - w}{\bar{w}z - 1} = \frac{1}{\bar{w}} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i. \quad \text{_____}$$

□

Opgave 35 Laat zien dat voor de functie f in (2.7) geldt dat:

- i. $f(w) = 0$ en $f(0) = w$;
- ii. $f \circ f(z) = z$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{w}\}$;
- iii. $f(\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$;
- iv. $f(\{z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{w}\}; |z| > 1\}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{w}\}; |z| > 1\}$.

We definiëren $\tilde{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ door $\tilde{f}(z) = f(z)$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{w}\}$, $\tilde{f}(\frac{1}{w}) = \infty$ en $\tilde{f}(\infty) = \frac{1}{w}$. Laat zien dat \tilde{f} bijjectief is. _____

□

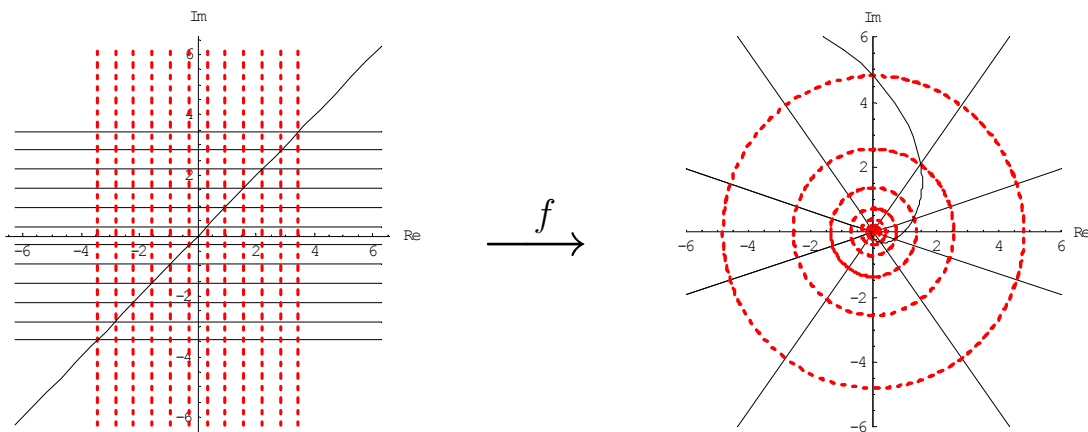
Opgave 36 Laat zien dat voor $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ met $ad - bc \neq 0$, de functie

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \text{ met } f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.8)$$

een inverse heeft. Bereken die inverse. _____

□

Opgave 37 Tenslotte nog de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = e^z$.



i. Bereken en schets de kromme $f \circ \gamma$ voor

- a. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + it$,
- b. $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + it$,
- c. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = t + i\pi$,
- d. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = (1 - i)t$.

ii. Laat zien dat

- a. $f(\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,
- b. $f(\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z < 0\}) = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$.

iii. Heeft $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ een inverse?

iv. Laat zien dat \tilde{f} en g , gedefinieerd door

$$\tilde{f} : \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \text{ met } \tilde{f}(z) = e^z,$$

$$g : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}, \text{ met } g(w) = \ln |w| + i \arg w,$$

elkaars inverse zijn. We nemen het argument \arg in $(-\pi, \pi]$.

3. INTEGREREN IN \mathbb{C}

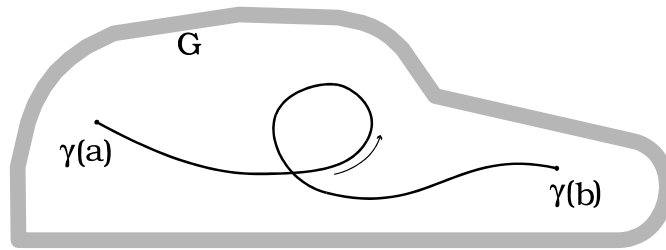
3.1 De integraal over een kromme

Definitie 3.1.1 Zij $\gamma(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een gladde kromme zodanig dat $\gamma[a, b]$ geheel ligt binnen het gebied $G \subset \mathbb{C}$. Voor $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie

► *integraal over kromme* noemen we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \tag{3.1}$$

de integraal van f over de kromme γ .



► *contour-integraal*

De integraal van f over de kromme γ wordt ook wel de *contour-integraal* van f over γ genoemd.

Merk op uit de continuïteit van f en de gladheid van γ volgt dat de functie $t \mapsto f(\gamma(t)) \gamma'(t)$ continu is.

Opmerking: We hebben in (3.1) nog steeds een complexe integraal. Door voor $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ af te spreken dat

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt$$

zijn we terug bij integralen van reële functies.

Hulpstelling 3.1.2 Zij G een gebied en $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie. Als γ_1 en γ_2 gladde enkelvoudige krommen binnen G zijn, zeg $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ met

- i. dezelfde beeldverzameling: $K = \gamma_1[a, b] = \gamma_2[c, d]$,
- ii. de beeldverzameling K wordt door γ_1 en door γ_2 in gelijke richting doorlopen: $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ en $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$,

dan geldt dat

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Een voldoende voorwaarde voor de eisen i en ii is het bestaan van een stijgende continue functie $\beta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ met $\beta(a) = c$ en $\beta(b) = d$ zodanig dat $\gamma_1(t) = \gamma_2(\beta(t))$ voor alle $t \in [a, b]$.

Bewijs: Het bewijs van deze hulpstelling in het algemene geval is behoorlijk technisch en zullen we achterwege laten. Als de hierboven genoemde functie β differentieerbaar is dan volgt deze hulpstelling uit de substitutieregels voor reële integralen en uit $(\operatorname{Re} \alpha(t))' = \operatorname{Re}(\alpha'(t))$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_a^b f(\gamma_2(\beta(t))) \gamma_2'(\beta(t)) \beta'(t) dt = \\ &= \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_c^d f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Hulpstelling 3.1.3 *Zij G een gebied en $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie. Als $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een gladde kromme binnen G is dan geldt:*

$$\begin{aligned} i. & \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt; \\ ii. & \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \operatorname{lengte}(\gamma). \end{aligned}$$

Bewijs: Noem $c = \int_{\gamma} f(z) dz$. Als $c = 0$ dan zijn beide uitspraken juist. Voor $c \neq 0$ vinden we dat

$$|c|^2 = \bar{c}c = \bar{c} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \bar{c} f(z) dz = \int_a^b \bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Omdat $|c|^2$ reëel is geldt dat

$$|c|^2 = \operatorname{Re} \left(\int_a^b \bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right) dt.$$

Via $\operatorname{Re} \alpha \leq |\alpha|$ voor $\alpha \in \mathbb{C}$ en een ongelijkheid voor reële integralen volgt

$$\int_a^b \operatorname{Re} \left(\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right) dt \leq \int_a^b |\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt,$$

en vinden we

$$|c|^2 \leq |\bar{c}| \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

en na door $|c| = |\bar{c}|$ gedeeld te hebben volgt de eerste uitspraak. De tweede uitspraak volgt uit de eerste met de schatting

$$|f(\gamma(t))| \leq \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \quad \text{voor } t \in [a, b].$$

Dit maximum hangt niet van t af en dus

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \max_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \text{ lengte}(\gamma). \end{aligned}$$

□

□

Voorbeeld 12

We berekenen $\int_{\gamma} f(z) dz$ voor $f(z) = \bar{z}$ en $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$\gamma(t) = \cos t + i \sin t$$

Dan

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \overline{(\cos t + i \sin t)} (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t) (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Opgave 38

i. Bereken $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ voor $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 4 \sin t - 4i \cos t$.

ii. Bereken $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ voor $\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 4 - t^2 + it\sqrt{8 - t^2}$.

Hint: bereken $|\gamma(t)|$ en teken de beeldverzameling.

Hulpstelling 3.1.4 Zij G een gebied in \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie en $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een gladde kromme met $\gamma[a, b] \subset G$.

Als er een analytische functie $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat met $F' = f$ op G dan geldt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Bewijs: Schrijf $F(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$ met $u, v \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ en gebruik

$$\int_a^b \frac{d}{dt} u(t) dt = u(b) - u(a)$$

en het analogon voor v . Via $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \gamma'(t)$ vinden we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Gevolg 3.1.5 Zij G een gebied in \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ een functie en $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een gesloten gladde kromme met $\gamma[a, b] \subset G$.

Als er een analytische functie $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat met $F' = f$ op G dan geldt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

Voorbeeld 13

De functie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{1}{z^2}$ op $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en de kromme

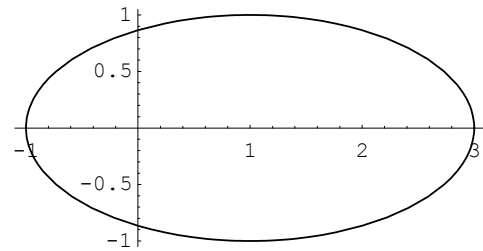
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

door

$$\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t.$$

Bereken

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$



$$\{(1 + 2 \cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

Omdat $f = F'$ op G voor $F(z) = \frac{-1}{z}$ en omdat γ een gesloten kromme is vinden we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ook door rechtstreeks berekenen zien we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\gamma(t))^2} \gamma'(t) dt = \left[\frac{-1}{\gamma(t)} \right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{-1}{\gamma(2\pi)} - \frac{-1}{\gamma(0)} = 0.$$

Opmerking: In een opgave op bladzijde 1.1.3 hebben we een stuksgewijs gladde kromme omgebouwd naar een gladde kromme. Zo'n verbouwing is voor elke stuksgewijs gladde kromme te verzinnen en daarmee volgt dat we de meeste resultaten in deze (en komende) paragrafen voor gladde krommen ook mogen gebruiken voor stuksgewijs gladde krommen.

3.2 Een logaritme met complexe getallen

Voor functies $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z^n$ waarbij $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ kennen we een primitieve, namelijk $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Een uitzondering wordt gevormd door de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = z^{-1}$. Voor de beperking tot $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ weten we dat $\ln|x|$ als afgeleide x^{-1} heeft. Deze natuurlijke logaritme wordt meestal gedefinieerd voor positieve reële getallen en wel door $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Men zou $\ln|z|$ als primitieve op $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kunnen proberen maar helaas is de functie $z \mapsto \ln|z|$ niet (zelfs nergens) complex differentieerbaar zoals we al in een opgave op bladzijde 2.3 zagen. We zullen bekijken op welke manier we een primitieve voor z^{-1} voor complexe getallen kunnen definiëren.

□

Voorbeeld 14

Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$ voor de functie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = \frac{1}{z}$ op $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en de kromme γ als in het vorige voorbeeld, namelijk $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t$.

Primitiveren lukt nog niet zoals we zojuist opmerkten. Voorlopig zou men $\int_{\gamma} f(z) dz$ rechtstreeks kunnen berekenen. De berekening is vervelend en een oude Maple-versie loopt zelfs vast bij de berekening. De nieuwste Maple-versie komt wel met het goede antwoord:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin t + i \cos t}{1 + 2 \cos t + i \sin t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2 \sin t + 3 \sin t \cos t}{2 + 4 \cos t + 3 \cos^2 t} + i \frac{2 + \cos t}{2 + 4 \cos t + 3 \cos^2 t} \right) dt \stackrel{\text{Maple}}{=} 0 + i2\pi. \end{aligned}$$

Na dit voorbeeld lijkt het toch beter om een primitieve van z^{-1} te zoeken.

□

Opgave 39 We definiëren de functie $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ door

► *uitbreiding ln*

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \arg(z) \tag{3.2}$$

waarbij we het argument nemen in $(-\pi, \pi]$.

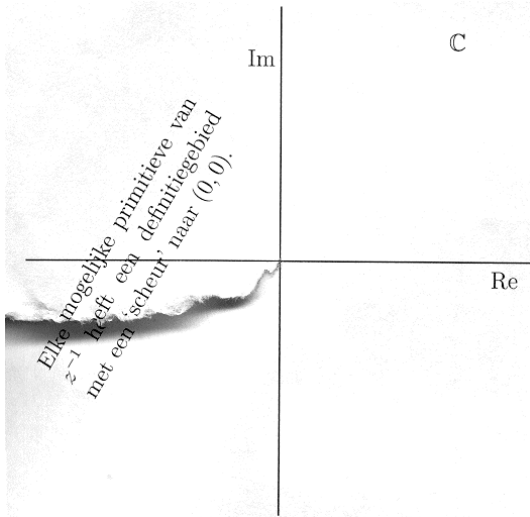
i. Laat zien dat $\text{Ln}(x) = \ln x$ voor $x \in \mathbb{R}^+$.

ii. Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}^-$ geldt dat

$$\lim_{y \downarrow 0} \text{Ln}(x + iy) = \lim_{y \uparrow 0} \text{Ln}(x + iy) + 2\pi i.$$

iii. Laat zien dat $\exp(\text{Ln}(z)) = z$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

iv. Laat zien dat Ln analytisch is op $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ en dat $\text{Ln}'(z) = \frac{1}{z}$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.



De functie $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd in (3.2) is een *analytische uitbreiding* van de reële \ln tot $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Men kan laten zien dat deze voor $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ de enig mogelijke is. Omdat de Ln bij de negatieve reële as een sprong vertoont kunnen we die ‘snee’ niet overbruggen. Wel kan men andere analytische uitbreidingen van de \ln definiëren. Bijvoorbeeld

$$\text{Ln}^*(z) = \ln|z| + i \left(\arg(iz) - \frac{1}{2}\pi \right)$$

is een analytische uitbreiding van de \ln -functie tot het gebied $\mathbb{C} \setminus [0, i\infty)$. Ook deze analytische uitbreiding heeft een definitie-gebied met een ‘snee’ naar $(0, 0)$.

► *analytische uitbreiding*

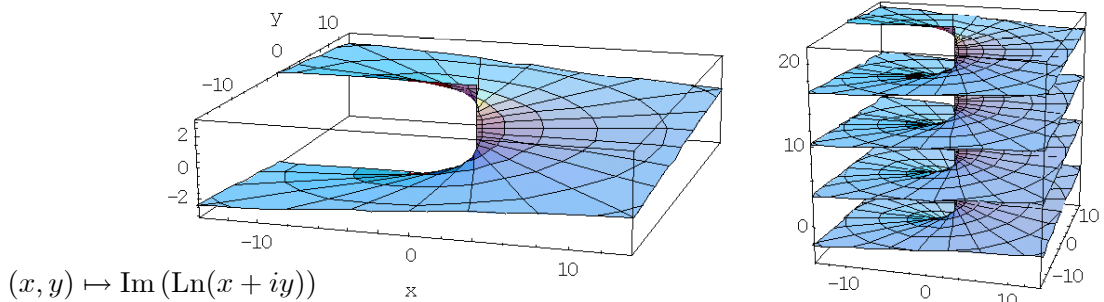
Voor $z \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}; \arg z < \frac{1}{2}\pi \text{ of } \arg z > \pi\}$ geldt $\text{Ln}(z) = \text{Ln}^*(z)$.
 Voor $z \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}; \frac{1}{2}\pi < \arg z < \pi\}$ geldt $\text{Ln}(z) = \text{Ln}^*(z) + 2\pi i$.

► *uitbreiding \ln*

Opmerking: Een andere manier om deze de \ln uit te breiden is om deze als meerwaardige functie uit te beschouwen. Men kijkt \ln als zogenaamd Riemann-oppevlak: de grafiek van $z \rightarrow \ln(z)$ laat men een oppervlak in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ beschrijven:

$$\{(z, \ln|z| + i \arg(z) + 2k\pi i); z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Om een functie van \mathbb{C} naar \mathbb{C} te tekenen hebben we vier dimensies nodig. Dat lukt niet. Wel kunnen we afzonderlijke grafieken van het reële en van het imaginaire deel laten tekenen. Hieronder staat links de grafiek van $z \mapsto \text{Im}(\text{Ln}(z)) = \arg(z)$. Daarnaast staan de grafieken, voor $k \in \mathbb{Z}$, van de functies $z \mapsto \text{Im}(\ln|z| + i \arg(z) + 2k\pi i)$.



De grafiek van $z \mapsto \text{Im} \text{Ln}(z)$ gebruikt één etage van de Riemann-parkeergarage.

□ ν

Voorbeeld 15

Het vorige voorbeeld laat zich met minder rekenwerk behandelen. We berekenen opnieuw $\int_{\gamma} f(z) dz$ met $f(z) = \frac{1}{z}$ en $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t$. Men laat zoals in de vorige opgave zien dat $F(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ een analytische functie op $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ is met $F'(z) = \frac{1}{z}$. Omdat f continu is op $\gamma[0, 2\pi]$ volgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt.$$

Omdat $\gamma[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \subset \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, geldt volgens Hulpstelling 3.1.4 dat

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt &= F(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - F(\gamma(\varepsilon)) = \\ &= \ln |\gamma(2\pi - \varepsilon)| + i \arg(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - \ln |\gamma(\varepsilon)| - i \arg(\gamma(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Tenslotte vinden we

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\ln |\gamma(2\pi - \varepsilon)| + i \arg(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - \ln |\gamma(\varepsilon)| - i \arg(\gamma(\varepsilon)) \right) = \\ &= 3 + 2\pi i - 3 - 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Opgave 40 Een primitieve van $\frac{1}{x^2-1}$ berekent men via breuksplitsing. Inderdaad vindt men via $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$ de functie $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$ als een primitieve. Dat kan men ook doen bij imaginaire wortels.

- i. Splits $\frac{1}{z^2+1}$ als de som van twee ‘eerste-orde’-breuken.
- ii. Geef met de functie Ln uit (3.2) van de vorige opgave om op een deel van \mathbb{C} een primitieve van $\frac{1}{z^2+1}$ te beschrijven. Geef aan voor welke z deze gedefinieerd is.
- iii. We vervangen z door x . Vereenvoudig de primitieve uit het vorige onderdeel voor $z = x \in \mathbb{R}$.
- iv. Laat zien dat het antwoord uit iii. hoogstens een constante met de arctan-functie verschilt.

3.3 Hoofdstelling van de complexe integratie

Stelling 3.3.1 *Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{C} en $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch op G . Als γ een gesloten gladde kromme binnen G is, dan geldt*

! integraal-
stelling
van
Cauchy

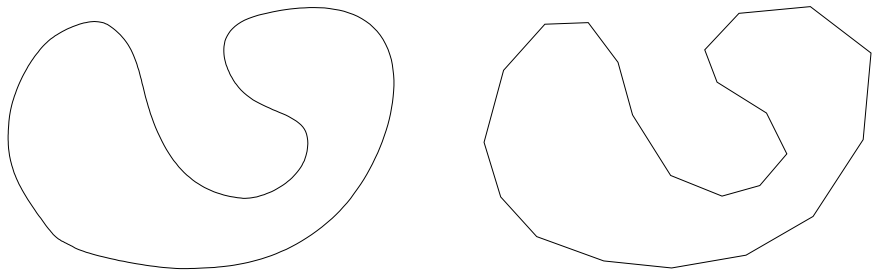
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Bewijs: Allereerst worden enkele vereenvoudigingen gemotiveerd. We geven geen bewijs dat deze vereenvoudigingen geoorloofd zijn.

- i. We nemen aan dat γ een Jordan-kromme is die linksom doorlopen wordt.
- ii. De functie f is analytisch en dus continu op G en de kromme γ is glad. Dan is het mogelijk om bij iedere $\varepsilon > 0$ de kromme γ te benaderen met een kromme γ_{ε} die bestaat uit een eindig aantal rechte lijnstukken en wel zodanig dat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

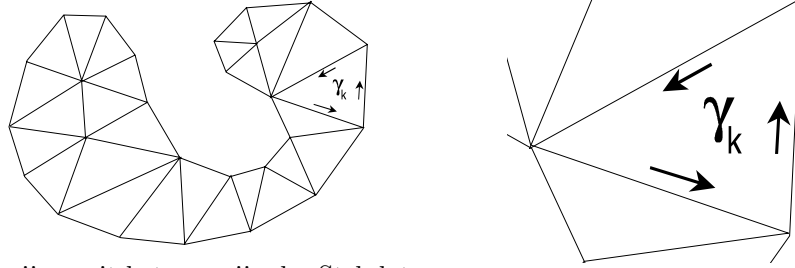
Het is dan voldoende om te laten zien dat $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ voor krommen γ die aan de voorwaarden van de stelling voldoen maar die bovendien bestaan uit een aaneenschakeling van rechte lijnstukken.



- iii. We kunnen het binnengebied van zo'n γ opvullen met een eindig aantal driehoeken. Omdat G enkelvoudig samenhangend is behoort het binnengebied van de kromme tot G . Laat $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de randkrommen van deze driehoeken beschrijven alle linksom lopend. Omdat integralen over gemeenschappelijk randen wegvallen ziet men

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

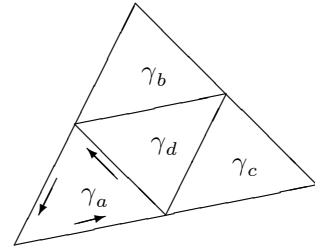
Het is daarmee voldoende om te bewijzen dat $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ voor γ die de rand van een driehoek beschrijven.



We bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = J > 0,$$

waarbij γ de randkromme is van een driehoek met diameter r . We gaan de driehoek in vier gelijk grote delen splitsen en noemen de linksom lopende randkrommen $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_d$. Omdat de integralen over de gemeenschappelijke randen opnieuw wegvallen zien we



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_{\gamma_b} f(z) dz + \int_{\gamma_c} f(z) dz + \int_{\gamma_d} f(z) dz.$$

Omdat $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = J$ is er minstens één, noem die γ_1 , met $\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4}J$. We nemen deze en splitsen die opnieuw in vier gelijk grote delen. Deze kleinere driehoeken worden opnieuw van vier randkrommen voorzien. Voor een van deze randkrommen, noem die γ_2 , geldt $\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2}J$. Enzovoort. We vinden een rij $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$ zodanig dat

$$\text{diameter}(\gamma_k) = \frac{1}{2^k}r \quad \text{en} \quad \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^k}J. \quad (3.3)$$

Bovendien (uit de volledigheid van \mathbb{C}) is er een z_0 die op of binnen elk van deze krommen γ_k ligt. Nu gebruiken we de aanname dat f differentieerbaar is en wel voor $z = z_0$. Volgens de definitie is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat voor $|z - z_0| < \delta$ geldt dat

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Neem $\delta > 0$ die deze afchatting geeft voor $\varepsilon = \frac{J}{4r^2}$ en neem k zo groot dat $\frac{1}{2^k}r < \delta$. (Deze keuzes lijken uit de lucht te vallen maar blijken aan het einde het resultaat te leveren.) Het beeld van de kromme γ_k ligt zo geheel binnen afstand δ van z_0 . Met de schatting

$$\left| \int_{\gamma} g(z) dz \right| \leq \text{lengte}(\gamma) \max_{z \in \text{beeld}\gamma} |g(z)| \quad (3.4)$$

(zie Hulpstelling 3.1.3) volgt dat

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k} f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0) dz \right| &\leq \text{lengte}(\gamma_k) \varepsilon \max_{z \in \text{beeld}\gamma_k} |z - z_0| \leq \\ &\leq \text{lengte}(\gamma_k) \varepsilon \text{diameter}(\gamma_k) \leq \\ &\leq 3\varepsilon (\text{diameter}(\gamma_k))^2 = 3 \frac{J}{4r^2} \left(\frac{1}{2^k}r \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4^k} J \right) < \frac{1}{4^k} J.$$

Omdat de functie $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$ een primitieve heeft, nl. $z f(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 f'(z_0)$ weten we uit Hulpstelling 3.1.4 dat

$$\int_{\gamma_k} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) dz = 0$$

en dus volgt

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma_k} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) dz \right| < \frac{1}{4^k} J.$$

Dit laatste is een tegenspraak met de rechterzijde van (3.3). \square

\square

Opgave 41 We nemen het complexe getal $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ met $\arg w \in (-\pi, \pi)$ en definiëren drie krommen:

$$\begin{aligned} \gamma_{1,w} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \text{met} & \gamma_{1,w}(t) = 1 + t(w - 1), \\ \gamma_{2,w} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \text{met} & \gamma_{2,w}(t) = 1 + t(|w| - 1), \\ \gamma_{3,w} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \text{met} & \gamma_{3,w}(t) = |w| e^{it \arg w}. \end{aligned}$$

- i. Schets deze drie krommen in het complexe vlak.
- ii. Beargumenteer waarom geldt dat

$$\int_{\gamma_{1,w}} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_{2,w}} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_{3,w}} \frac{1}{z} dz.$$

- iii. Bereken $\int_{\gamma_{2,w}} \frac{1}{z} dz$ en $\int_{\gamma_{3,w}} \frac{1}{z} dz$ en daarmee $\int_{\gamma_{1,w}} \frac{1}{z} dz$.
- iv. Welke bekende functie is $f(w) := \int_{\gamma_{1,w}} \frac{1}{z} dz$?

Zonder een bewijs geven we een uitbreiding van de integraalstelling van Cauchy voor krommen die de rand van G snijden.

Stelling 3.3.2 Zij G een gebied in \mathbb{C} , $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ continu op \overline{G} en analytisch op G . Als γ een gladde Jordan-kromme is, zodanig dat het binnengebied tot G behoort, dan geldt

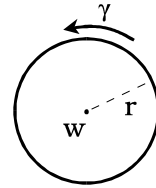
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

3.4 Het Residu

3.4.1 Definitie en gebruik

Allereerst spreken we de volgende verkorte notatie af

$$\oint_{|z-w|=r} f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz$$

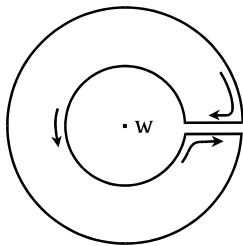
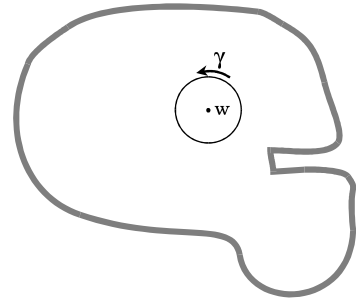


met $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ en $\gamma(t) = w + re^{it}$.

Definitie 3.4.1 Zij G een gebied in \mathbb{C} met $w \in G$. Voor $f : G \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie definieert men het residu van f in w als volgt. Neem $r > 0$ zodanig dat $B_r(w) \subset G$. Dan

► residu

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=w} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} f(z) dz.$$



Opmerking: In deze definitie ligt r niet vast. Elke voldoende kleine positieve r lijkt men te mogen kiezen. Dan zijn er twee mogelijkheden: 1), een onzinnige definitie; of 2), de integraal $\int_{\gamma} f(z) dz$ hangt niet van r af voor kleine r . De integraalstelling van Cauchy laat zien dat de integraal inderdaad niet van (kleine) r afhangt. Hiervoor integreert men over een kromme γ_1 rond w waarvan het beeld er als links uitziet. Omdat f een analytische functie op het inwendige van deze kromme γ_1 is, geldt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0.$$

Nemen we de rechte zijden van het kanaal ‘op elkaar’ dan valt deze bijdrage aan de integraal weg. Er resteert met $r_1 < r_2$ dat

$$\oint_{|z-w|=r_1} f(z) dz - \oint_{|z-w|=r_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0.$$

□

Voorbeeld 16

Bereken $\{\text{Res } \frac{1}{z}\}_{z=0}$. Omdat de functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mogen we iedere $r > 0$ nemen om het residu te berekenen.

$$\left\{ \text{Res } \frac{1}{z} \right\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} dt = 1$$

□

Voorbeeld 17

Zij $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$. Bereken $\left\{ \text{Res} \frac{1}{z^n} \right\}_{z=0}$.
 De functie $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \left\{ \text{Res} \frac{1}{z^n} \right\}_{z=0} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-0|=1} \frac{1}{z^n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(e^{it})^n} i e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} e^{(1-n)it} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(1-n)i} e^{(1-n)it} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

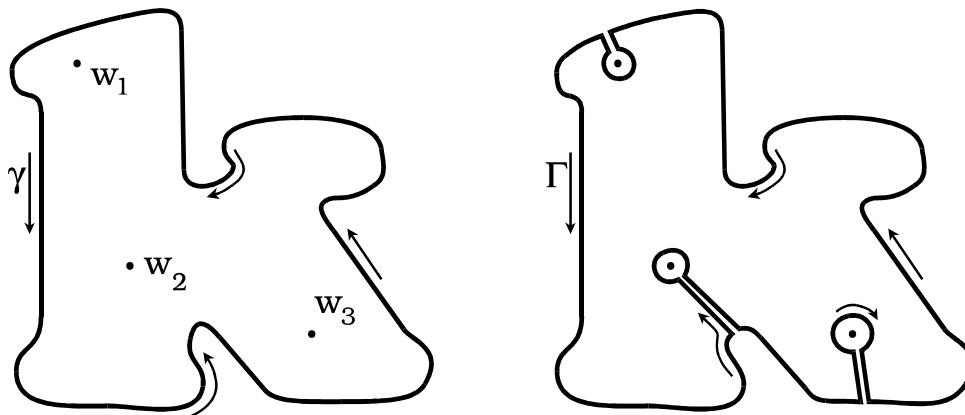
De ‘kanaal-truc’ die in de laatste opmerking gebruikt is kunnen we verder uitbreiden. Deze uitbreiding van de Integraalstelling van Cauchy zullen we als afzonderlijke stelling formuleren.



Stelling 3.4.2 *Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{C} en laat γ een linksom¹ lopende gladde Jordan-kromme binnen G zijn. Stel dat er een eindig aantal punten $\{w_k\}_{k=1}^n \subset G$ zijn zodanig dat $f : G \setminus \{w_k\}_{k=1}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is en neem aan dat geen w_k op het beeld van de kromme γ ligt. Dan geldt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w_k \text{ binnen } \gamma} \{ \text{Res } f(z) \}_{z=w_k}.$$

Bewijs: Omdat G een enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{C} is ligt het binnengebied van γ binnen G . Door ‘het graven van de juiste kanalen’ construeert men een kromme Γ zodanig dat alle w_k in het buitengebied van Γ liggen.



De oorspronkelijke kromme en de ‘gekanaliseerde’.
 De integraalstelling van Cauchy zorgt voor

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

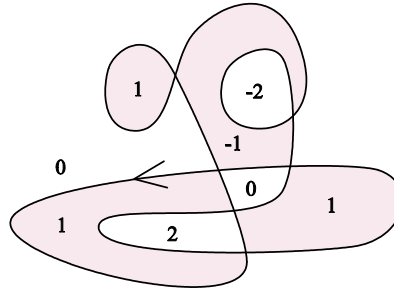
De bijdragen over de ‘kanalen’ vallen weg en er blijft over dat

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \sum_{w_k \text{ binnen } \gamma} \{ \text{Res } f(z) \}_{z=w_k}.$$

Het minteken voor $2\pi i$ verschijnt omdat de ‘residu-integralen’ in omgekeerde richting doorlopen worden. □

► *omloopgetal*

Voor gesloten, maar niet-enkelvoudige krommen kunnen we door plak- en knipwerk tot de volgende versie van de residuen-stelling komen. Daarvoor dienen we eerst het *omloopgetal* te definiëren. Zij $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een gesloten kromme met hoogstens eindig vele zelfdoorsnijdingen en w een punt in \mathbb{C} dat niet op de kromme ligt. Het omloopgetal $\sigma(w, \gamma)$ is het aantal keer linksom minus het aantal keer rechtsom dat γ rond w loopt.



residuen-stelling met omloopgetal

Stelling 3.4.3 *Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{C} en laat γ een linksom lopende gladde kromme binnen G zijn met eindig vele zelfdoorsnijdingen. Stel dat er een eindig aantal punten $\{w_k\}_{k=1}^n \subset G$ zijn zodanig dat $f : G \setminus \{w_k\}_{k=1}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is. Neem aan dat geen w_k op het beeld van de kromme γ ligt. Dan geldt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w_k} \sigma(w_k, \gamma) \{ \text{Res } f(z) \}_{z=w_k}.$$

□_v

Voorbeeld 18

We gaan nogmaals terug naar het voorbeeld op bladzijde 37 en berekenen $\int_{\gamma} f(z) dz$ voor $f(z) = \frac{1}{z}$ en de kromme $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t$.

De functie f is analytisch buiten 0 en γ is een linksom lopende Jordan-kromme met 0 in het binnengebied. Volgens Stelling 3.4.2 geldt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res } \frac{1}{z} \right\}_{z=0} = 2\pi i.$$

□_o

Opgave 42 Gegeven de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$ met $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ en de krommen $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_r(t) = r \exp(it)$.

- i. Bereken de breuksplitsing van $\frac{1}{z^2+z}$.
- ii. Bereken $\int_{\gamma_r} f(z) dz$ voor $0 < r < 1$.
- iii. Bereken $\int_{\gamma_r} f(z) dz$ voor $r > 1$.

¹Een Jordan-kromme loopt linksom als het binnengebied aan de linkerkant t.o.v. de doorlooprichting ligt.

3.4.2 Het berekenen

► *gegeneraliseerde
machtreeks*

We beschouwen de *gegeneraliseerde machtreeks*²

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} z^k$$

met $m \in \mathbb{N}$ en $a_k \in \mathbb{C}$. Laat R de convergentiestraal zijn van de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ en neem aan dat $R > 0$. Voor $z \in \mathbb{C}$ met $0 < |z| < R$ is de functie $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$ goed gedefinieerd. Op $B_R(0) \setminus \{0\}$ is de functie zelfs analytisch als eindige som van analytische functies:

$$f(z) = a_{-m} z^{-m} + a_{-m+1} z^{-m+1} + \dots + a_{-1} z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (3.5)$$

en

$$\begin{aligned} z &\mapsto a_n z^n \text{ met } n \in \mathbb{Z}^- \text{ is analytisch in } \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ is analytisch in } B_R(0). \end{aligned}$$

Hulpstelling 3.4.4 Voor f in (3.5) geldt

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=0} = a_{-1}.$$

Bewijs: We kunnen f schrijven als $f(z) = a_{-1} z^{-1} + g(z)$ met

$$g(z) = a_{-m} z^{-m} + a_{-m+1} z^{-m+1} + \dots + a_{-2} z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

De functie g heeft een primitieve op $B_R(0) \setminus \{0\}$ en dus volgt met Hulpstelling 3.1.4 voor $0 < r < R$ dat

$$\{\text{Res } g(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g(z) dz = 0.$$

Er blijft over dat

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=0} = \{\text{Res } a_{-1} z^{-1}\}_{z=0} = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = a_{-1}.$$

Hulpstelling 3.4.5 Als de functie $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is in w dan geldt \square

$$\left\{ \text{Res} \frac{g(z)}{z-w} \right\}_{z=w} = g(w).$$

²Voor $\nu \in \mathbb{R}$ wordt een uitdrukking van de vorm $z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een *gegeneraliseerde machtreeks* genoemd. Als $\nu \notin \mathbb{Z}$ en $z \notin \mathbb{R}^+$ dan zullen we nog af moeten spreken wat we met z^ν bedoelen. Bijvoorbeeld $z^\nu = e^{\nu \text{Ln } z}$ is goed gedefinieerd voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Bewijs: Volgens de definitie van ‘analytisch in een punt’, is er een $R > 0$ zodanig dat g analytisch is op $B_R(w)$. Het residu van $z \mapsto \frac{g(z)}{z-w}$ in w is dus gedefinieerd. We schrijven

$$\frac{g(z)}{z-w} = \frac{g(z) - g(w)}{z-w} + \frac{g(w)}{z-w}.$$

Het residu van de laatste term is direct te berekenen ($g(w)$ hangt niet van z af):

$$\left\{ \text{Res} \frac{g(w)}{z-w} \right\}_{z=w} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} \frac{g(w)}{z-w} dz = \frac{g(w)}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} \frac{1}{z-w} dz = g(w).$$

We bewijzen dat het residu van de functie $z \mapsto \frac{g(z)-g(w)}{z-w}$ in w gelijk aan 0 is door te laten zien dat dit residu willekeurig klein (= dicht bij 0) af te schatten is. Omdat g differentieerbaar is in w bestaat $\lim_{z \rightarrow w} \frac{g(z)-g(w)}{z-w}$. Dit impliceert dat $\frac{g(z)-g(w)}{z-w}$ begrensd is voor $|z-w|$ voldoende klein. Zeg

$$\text{als } |z-w| < \delta \text{ dan } \left| \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \right| \leq M.$$

Neem vervolgens $r \in (0, \min(\delta, R))$. We vinden met Hulpstelling 3.1.3 dat

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \text{Res} \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \right\}_{z=w} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{g(z)-g(w)}{z-w} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{ lengte}(\gamma) M = \frac{1}{2\pi} 2\pi r M = Mr. \end{aligned}$$

Door r naar 0 te laten gaan volgt het resultaat. □

□

Voorbeeld 19

Bereken $\left\{ \text{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i}$. Met Hulpstelling 3.4.5 volgt

$$\left\{ \text{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i} = \left\{ \text{Res} \frac{\frac{z}{z-2i}}{z+2i} \right\}_{z=-2i} = \left(\frac{z}{z-2i} \right)_{z=-2i} = \frac{-2i}{-2i-2i} = \frac{1}{2},$$

omdat $z \mapsto \frac{z}{z-2i}$ analytisch is in $-2i$.

Door breuksplitsing kunnen we dit residu ook zonder deze Hulpstelling berekenen:

$$\left\{ \text{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i} = \left\{ \text{Res} \left(\frac{\frac{1}{2}}{z+2i} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2i} \right) \right\}_{z=-2i} = \left\{ \text{Res} \frac{\frac{1}{2}}{z+2i} \right\}_{z=-2i} = \frac{1}{2}.$$

Hier hebben we gebruikt dat $z \mapsto \frac{1}{z-2i}$ analytisch is in $-2i$. _____

□

Voorbeeld 20

Bereken $\left\{ \text{Res} \frac{\sin z}{z^2} \right\}_{z=0}$. Omdat $\sin z$ als een machtreeks te schrijven is (met $R = \infty$) vinden we uit

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^3 - \dots$$

met Hulpstelling 3.4.4 dat

$$\left\{ \text{Res} \frac{\sin z}{z^2} \right\}_{z=0} = 1. \quad \text{_____}$$

\square γ

Voorbeeld 21

Bereken $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2 \cos z} \right\}_{z=0}$. Omdat $z \mapsto \cos z$ analytisch is en omdat $\cos 0 \neq 0$ is $z \mapsto \frac{1}{\cos z}$ analytisch in 0. Omdat $\frac{\sin z}{z}$ als machtreeks te schrijven is (met $R = \infty$):

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 \dots$$

vinden we met Hulpstelling 3.4.5 dat

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2 \cos z} \right\}_{z=0} &= \left\{ \operatorname{Res} \frac{\frac{1}{\cos z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}}{z} \right\}_{z=0} = \\ &= \left(\frac{1}{\cos z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{\cos 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

\square \mathcal{O}

Opgave 43 Bereken de volgende residuen.

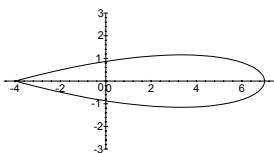
- i. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z^2 + 3z - 4} \right\}_{z=1}$. iv. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{(1+z^2)^2} \right\}_{z=i}$.
 ii. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{z^2} \right\}_{z=0}$. v. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{\exp z - 1} \right\}_{z=0}$.
 iii. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{1+z^2} \right\}_{z=i}$. vi. $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z^2} \right\}_{z=0}$.

In het laatste onderdeel is Ln de uitbreiding van de \ln , die is gedefinieerd op bladzijde 37.

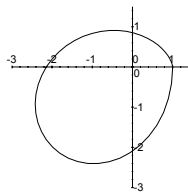
\square \mathcal{O}

Opgave 44 Bereken $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$ voor γ_i als hieronder. Zie ook de bijstaande tekening.

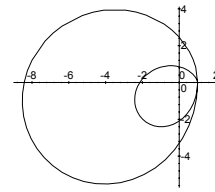
- i. $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_1(t) = 7 - 3it - 11t^2 + 3it^3$;
 ii. $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_2(t) = 1 + 2it \sin t \exp it$;
 iii. $\gamma_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_3(t) = 1 + 2it \sin t \exp it$.



beeldverzameling γ_1



beeldverzameling γ_2



beeldverzameling γ_3

\square \mathcal{O}

Opgave 45 Bereken $\int_{\gamma} \frac{1}{\sin z} dz$ voor de γ als in de vorige opgave. Hint: bereken de nulpunten van $\sin z$ via $\sin(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$.

Contour-integralen kunnen soms worden gebruikt om lastige reële integralen te berekenen.

□

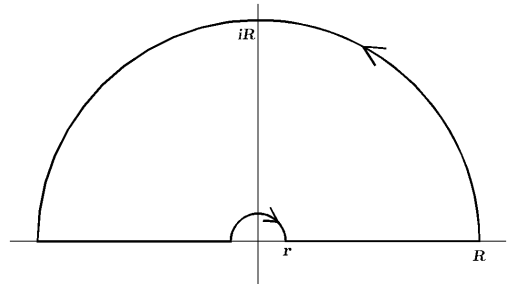
Voorbeeld 22

Zo'n lastige reële integraal is:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Een primitieve is niet zo eenvoudig te vinden. Wel is deze oneigenlijke integraal via een geschikte contour te berekenen. We beschouwen de hier naast staande contour voor de integraal

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$$



en merken op dat $\text{Im } e^{ix} = \sin x$ voor $x \in \mathbb{R}$. We nemen het imaginaire deel van de contour-integraal en laten $\varepsilon \rightarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$ gaan.

De 'grote' boog parametriseren we door $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_1(t) = Re^{it}$ en we vinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}} i dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rt/2} dt = \left[\frac{4}{R} e^{-Rt/2} \right]_0^{\pi/2} \leq \frac{4}{R}. \end{aligned}$$

Daarmee volgt dat $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

De 'kleine' boog parametriseren we door $\gamma_2 : [\pi, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma_2(t) = re^{it}$ en we vinden

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \lim_{r \downarrow 0} \int_0^\pi e^{ire^{it}} i dt = - \int_0^\pi 1 i dt = -\pi i.$$

De integraal en de limiet mogen hier verwisseld worden omdat $\lim_{r \downarrow 0} e^{ire^{it}} = 1$ uniform voor $t \in [0, 2\pi]$. Binnen de contour is de functie $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ analytisch en volgt $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Via

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

en de limieten nemen volgt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \text{en dus} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

□

□

Opgave 46 Bereken via de contour hier rechts

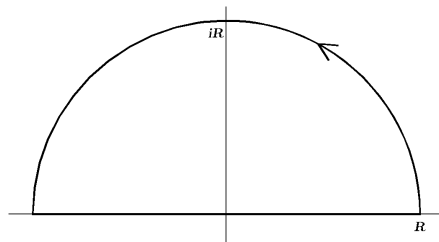
³ Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \ell(y)$ uniform voor $y \in [c, d]$ dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \ell(y) dy.$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$



□

Opgave 47 In deze opgave zullen we $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ berekenen. Merk op dat

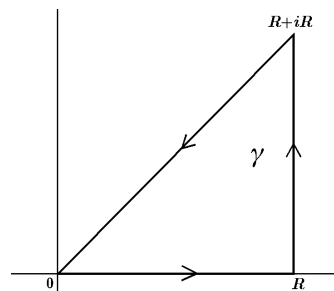
$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \text{Im} \left(\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx \right).$$

We gebruiken met γ de hiernaast getekende contour de integraal

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz.$$

Dus γ is b.v. samengesteld uit

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_1(t) = t; \\ \gamma_2 : [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_2(t) = R + it; \\ \gamma_3 : [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_3(t) = (1+i)(R-t). \end{aligned}$$



i. Laat eerst zien dat

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| \leq \int_0^R e^{-2Rt} dt.$$

ii. En ook dat

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = -(1+i) \int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

iii. Gebruik vervolgens dat $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ om de gevraagde integraal te berekenen.

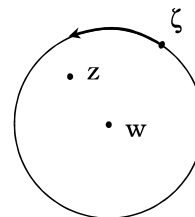
□

Tenslotte nog een gevolg van de Residu-stelling dat er onschuldig uitziet maar vergaande consequenties heeft.

Stelling 3.4.6 Zij G een gebied in \mathbb{C} met $\overline{B_R(w)} \subset G$ en $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch.

► *formule van Cauchy voor de cirkelschijf* Dan geldt voor $z \in B_R(w)$ dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = g(z).$$



Bewijs: Gebruik Stelling 3.4.2.

□

Het bijzondere aan deze stelling is dat als men de waarden van een analytische functie g op de rand van $B_R(w)$ kent daarmee elke waarde van g in het

binnenste van de cirkelschijf kan terugvinden. De integraal gebruikt namelijk alleen de waarden van g die op de rand $\partial B_R(w)$ liggen. Bij eerste kennismaking is het heel verrassend om te zien dat (complexe) differentieerbaarheid en de kennis van de randwaarden deze functie geheel vastlegt. We zullen dit resultaat diverse malen gaan gebruiken; onder andere om voor een type partiële differentiaalvergelijkingen met voorgeschreven randvoorwaarden een éénduidige oplossing te verkrijgen.

3.5 Gevolgen van de formule van Cauchy

3.5.1 Eigenschappen analytische functies

Met de formule van Cauchy vinden we de volgende resultaten. a) Een analytische functie heeft een analytische afgeleide. Dit is een van de belangrijkste resultaten in de complexe functietheorie. b) Men krijgt een integraal-formule voor de afgeleide die een term f bevat maar geen afgeleide van f . c) Tenslotte kan men aantonen dat iedere analytische functie te schrijven is als een (vershoven) machtreeks met een geschikt convergentiegebied.

De precieze formulering met een bewijs volgt:



Augustin Louis Cauchy
1789-1857

► *analytische afgeleiden*



Gevolg 3.5.1 *Zij f een functie die analytisch is op een gebied $G \subset \mathbb{C}$ met $B_R(w) \subset G$. Dan zijn alle afgeleiden van f analytisch op G en voor de n^{de} afgeleide van f in $z \in B_R(w)$ geldt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.6)$$

Bovendien geldt dat voor $z \in B_R(w)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^n. \quad (3.7)$$

Deze machtreeks heeft convergentiestraal groter of gelijk aan R .

Opmerking: Op het eerste gezicht zal dit een vreemd resultaat lijken. Er bestaat duidelijk geen reëel equivalent: tweemaal (reëel) differentieerbaar volgt niet uit eenmaal (reëel) differentieerbaar. Bijvoorbeeld de functie $f(x) = x|x|$ is differentieerbaar terwijl $f'(x) = 2|x|$ niet differentieerbaar is.

Opmerking: Als f analytisch is op het gebied G en $w \in G$ dan volgt niet alleen dat we f als machtreeks rond w kunnen schrijven maar bovendien dat de bijbehorende convergentiestraal groter of gelijk is aan de straal van de grootste cirkel met w als middelpunt die nog binnen G ligt.

Bewijs: I. We zullen eerst laten zien dat de formule in (3.6) voor $n = 1$ correct is. Neem $w \in G$ en $R > 0$ zodanig dat $B_R(w) \subset G$. Volgens de formule van Cauchy geldt voor $z \in B_R(w)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Via een naïeve poging zou men kunnen denken dat rechtstreeks differentiëren het volgende resultaat geeft:

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{d}{dz} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta. \quad (3.8)$$

Maar omdat zowel de integraal als de afgeleide via een limiet gedefinieerd is kunnen we die twee limieten niet zomaar verwisselen⁴. We zullen laten zien dat deze verwisseling

⁴Bijvoorbeeld $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

hier wel mogelijk is, dat wil zeggen we laten zien dat

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| = 0$$

Dus bij gegeven $\varepsilon > 0$ vind een $\delta > 0$ zodanig dat als $|z - z_0| < \delta$ dan $|\dots| < \varepsilon$.
 Voor $z, z_0 \in B_R(w)$ geldt met de integraal-formule van Cauchy dat

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} d\zeta \right| = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta-w|=R} \left(\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \right) d\zeta \right| = \end{aligned} \quad (3.9)$$

Enig boekhouden levert

$$\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} = \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}.$$

We noemen r de afstand van z_0 tot de rand $\partial B_R(w)$, dwz. $r = R - |z_0 - w|$. Omdat $z_0 \in B_R(w)$ geldt $r > 0$. Omdat we de limiet voor z naar z_0 bekijken mogen we bovendien aannemen dat de z waarin we geïnteresseerd zijn voldoen aan $|z - z_0| < \frac{1}{2}r$. Dus we kiezen alvast $\delta \leq \frac{1}{2}r$. Een dergelijke z heeft dan minstens afstand $\frac{1}{2}r$ tot de rand $\partial B_R(w)$. We hebben daarmee $|\zeta - z_0| \geq r$ en $|\zeta - z| > \frac{1}{2}r$. Na deze voorbereidingen kunnen we (3.9) verder afschatten.

$$\begin{aligned} (3.9) &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|z - z_0|}{\frac{1}{2}r r^2} |f(w + R e^{i\varphi})| R d\varphi = |z - z_0| \frac{2R}{r^3} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(w + R e^{i\varphi})|. \end{aligned}$$

Kies $\delta = \min \left(\frac{1}{2}r, \left(\frac{2R}{r^3} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(w + R e^{i\varphi})| + 1 \right)^{-1} \varepsilon \right)$ en we hebben laten zien dat (3.9) $< \varepsilon$. Hiermee is bewezen dat (3.8) inderdaad correct is.
 II. Op gelijke wijze laat men zien dat

$$\frac{d}{dz} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{(n-1)! f(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta = \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{d}{dz} \frac{(n-1)! f(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta.$$

Via inductie volgt dat

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

III. Omdat G open is er bij iedere $z \in G$ een $R^* > 0$ te vinden zodanig dat $\overline{B_{R^*}(z)} \subset G$. Gebruik de voorgaande onderdelen voor $B_{R^*}(z)$ en men vindt dat $f^{(n)}$ analytisch is in z .

IV. Tenslotte wordt de machtreeksvoorstelling bewezen. We hebben

$$f^{(n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta.$$

Met $M = \max_{|\zeta|=R} |f(w + \zeta)|$ en $\zeta - w = R e^{i\varphi}$ volgt dan

$$|f^{(n)}(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{n!}{|\zeta-w|^{n+1}} |f(\zeta)| R d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{n!}{R^{n+1}} MR d\varphi = Mn!R^{-n}.$$

Daarmee vinden we dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(w)}{n!} \right|} \leq \sqrt[n]{\frac{Mn!R^{-n}}{n!}} = R^{-1},$$

en via Cauchy-Hadamard dat de convergentiestraal van de machtreeks in (3.7) groter of gelijk aan R is. Tenslotte laat de stelling van Taylor, voor reële functies op R^2 , zien dat (3.7) geldt voor $|z - w|$ kleiner dan de convergentiestraal. \square

\square

► *stelling van Liouville*

Opgave 48 Een *stelling van Liouville* zegt dat een functie die analytisch en begrensd is op C constant is. Bewijs deze stelling als volgt.

- i. Laat zien dat voor $f : C \rightarrow C$ analytisch voor iedere $R > 0$ met behulp van (3.6) volgt

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|f(z + Re^{i\varphi})|}{R} d\varphi. \quad (3.10)$$

- ii. Stel $M \in R^+$ is zodanig dat $|f(z)| \leq M$ voor $z \in C$. Laat zien dat uit (3.10) volgt dat

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Omdat we R willekeurig groot mogen nemen volgt $f'(z) = 0$ en daarmee dat f constant is. _____

\square

► *Euler-nummers*

Opgave 49 De Euler-nummers E_n zijn gedefinieerd door

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n.$$

- i. Bereken E_1 , E_2 en E_3 .
- ii. Voor welke $z \in C$ is $z \mapsto \frac{1}{\cosh z}$ analytisch?
- iii. Wat is de grootste cirkelschijf in C rond 0 waarop $z \mapsto \frac{1}{\cosh z}$ analytisch is?
- iv. Gebruik Gevolg 3.5.1 om te laten zien dat de straal van deze cirkelschijf de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n$ is. _____

4. HARMONISCHE FUNCTIES

- *Laplaciaan*
- *Laplace-operator*

Een zeer veel voorkomende partiële differentiaaloperator is de *Laplaciaan* Δ , ook wel *Laplace-operator* genoemd. Deze Δ wordt in twee dimensies gedefinieerd door

$$\Delta := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

Een differentiaaloperator werkt op functies. Bijvoorbeeld $\Delta(x^2 \sin y) = 2 \sin y - x^2 \sin y$.

4.1 Analytisch en harmonisch

In dit deel zullen we het verband tussen analytische en harmonische functies bekijken.

Stelling 4.1.1 *Zij G een gebied in C en $f : G \rightarrow C$ analytisch. Schrijven we $G_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in G\}$ dan voldoet de functie $u : G_{\mathbb{R}} \rightarrow R$ met $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ aan*

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right) u(x, y) = 0.$$



Opgave 50 We gaan Stelling 4.1.1 bewijzen.

- i. Laat zien dat de functie u oneindig vaak differentieerbaar is op $G_{\mathbb{R}}$.
- ii. Gebruik de Cauchy-Riemann vergelijkingen om te laten zien dat $\Delta u = 0$ op $G_{\mathbb{R}}$. _____

Opmerking: We noemen de functie f oneindig vaak differentieerbaar als voor elke $n \in \mathbb{N}^+$ alle n -de orde partiële afgeleiden bestaan.

Definitie 4.1.2 *Zij $G_{\mathbb{R}}$ een open gebied in R^2 . Een oneindig vaak (reëel) differentieerbare functie $u : G_{\mathbb{R}} \rightarrow R$ die voldoet aan*

$$\Delta u = 0$$

- *harmonisch* wordt harmonisch op $G_{\mathbb{R}}$ genoemd.

De bovenstaande Stelling 4.1.1 kan men nu grofweg beschrijven als:

het reële deel van een analytische functie is harmonisch.

□

Opgave 51 Is de uitspraak ‘het imaginaire deel van een analytische functie is harmonisch’ juist of onjuist? _____

□

Opgave 52 Zij f een analytische functie op G . We spiegelen het gebied G in de reële as:

$$G^* = \{z \in \mathbb{C}; \text{ met } \bar{z} \in G\}.$$

Dan kan men een anti-analytische functie f^* op G^* definiëren door $f^*(z) = f(\bar{z})$.

Laat zien dat $u : G_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}$ met $u(x, y) = \operatorname{Re} f^*(x + iy)$ een harmonische functie is. _____

We hebben net gezien hoe we met een analytische functies een harmonische functie kunnen vinden. Op enkelvoudig samenhangende gebieden is er ook een weg terug. Omdat we nu bij een reële functie een geschikte imaginaire functie zullen definiëren laat het zich raden dat de constructie van harmonisch naar analytisch moeilijker verloopt dan van analytisch naar harmonisch.

Stelling 4.1.3 *Zij $G \subset \mathbb{C}$ een enkelvoudig samenhangend gebied. Als h een harmonische functie is op $G_{\mathbb{R}}$ dan bestaat er een analytische functie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ zodanig dat $h(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.*

Bewijs: De constructie gaat als volgt:

I. Definieer $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$g(x + iy) = h_x(x, y) - ih_y(x, y).$$

Omdat g differentieerbaar is en omdat het reële en imaginaire deel van g aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} g(x + iy) &= h_{xx}(x, y) = -h_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g(x + iy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} g(x + iy) &= -h_{yx}(x, y) = -h_{xy}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g(x + iy) \end{aligned}$$

is g analytisch op G .

II. Vervolgens kiezen we een vast punt $(a, b) \in G_{\mathbb{R}}$. Voor iedere $w \in G$ nemen we een gladde kromme $\gamma_w : [0, 1] \rightarrow G$ zodanig dat $\gamma_w[0, 1] \subset G$, $\gamma_w(0) = a + ib$ en $\gamma_w(1) = w$. Dan wordt de gevraagde analytische functie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(w) = h(a, b) + \int_{\gamma_w} g(z) dz.$$

Men laat zien dat $f' = g$. Volgens de definitie geldt

$$\operatorname{Re} f(a + ib) = f(a + ib) = h(a, b).$$

Omdat voor alle $(x, y) \in G_{\mathbb{R}}$ geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f' = \operatorname{Re} g = \frac{\partial}{\partial x} h$$

is $h - \operatorname{Re} f$ constant op horizontale lijnen. Evenzo volgt uit

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} if' = \operatorname{Re} ig = -\operatorname{Im} g = \frac{\partial}{\partial y} h,$$

dat $h - \operatorname{Re} f$ constant is op verticale lijnen. Daarmee geldt $h = \operatorname{Re} f$.

De waarde van f in w hangt niet af van de gekozen weg. Als γ_w en $\tilde{\gamma}_w$ beide gladde krommen binnen G zijn die $a + ib$ met w verbinden dan geldt volgens de Integraalstelling van Cauchy dat

$$\int_{\gamma_w} g(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_w} g(z) dz.$$

III. Vervolgens laten we zien dat f analytisch is in G . Neem $w \in G$ en voor ζ dichtbij w de kromme $\gamma_\zeta : [-1, 1] \rightarrow C$ met

$$\gamma_\zeta(t) = \begin{cases} \gamma_w(t+1) & \text{voor } t \in [-1, 0], \\ w + t(\zeta - w) & \text{voor } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

We vinden dat

$$\begin{aligned} f(\zeta) - f(w) &= \int_{\gamma_\zeta} g(z) dz - \int_{\gamma_w} g(z) dz = \\ &= \int_{t=0}^1 g(w + t(\zeta - w)) (\zeta - w) dt \end{aligned}$$

en

$$f'(w) = \lim_{\zeta \rightarrow w} \frac{f(\zeta) - f(w)}{\zeta - w} = \lim_{\zeta \rightarrow w} \int_{t=0}^1 g(w + t(\zeta - w)) dt = g(w). \quad \square$$

□

Opgave 53 Laat zien dat $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ met $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ harmonisch is. Geef een analytische functie $f : \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\} \rightarrow C$ zodanig dat $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$. _____

□

Opgave 54 Laat zien dat $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ met $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ harmonisch is. Geef een analytische functie $f : \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \pi\} \rightarrow C$ zodanig dat $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$. Is deze analytisch voort te zetten tot $C \setminus \{0\}$? _____

4.2 Een oplossing voor een cirkelvormig gebied

Voor een cirkelvormig gebied kunnen we met de behulp van de formules van Cauchy een formule voor de oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde vinden. We nemen ter vereenvoudiging als gebied de cirkel met straal 1 rond $(0, 0)$. Dat wil zeggen we zoeken een oplossing u , een functie van $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, die voldoet aan

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| < 1, \\ u(x) = u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| = 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

bij voorgeschreven u_{rand} .

We hebben gezien dat het reële deel van een analytische functie harmonisch is en dat er op enkelvoudig samenhangende gebieden ook een weg terug is van een harmonisch functie naar een analytische. Stel nu dat we zo'n analytische functie hebben waarbij het reële deel een oplossing van (4.1) is. Via de formules

van Cauchy kunnen we uit de kennis van de functie op de rand de functie binnen $B_1(0)$ terugvinden. Zoiets willen we eigenlijk hebben voor alleen het reële deel. We zouden kunnen proberen het reële deel van de formule van Cauchy te nemen:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - (x_1 + ix_2)} dz = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Het reële deel uitschrijven levert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{f(e^{i\varphi})}{|e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)|^2} e^{i\varphi} (e^{-i\varphi} - (x_1 - ix_2)) \right) = \\ &= \frac{\operatorname{Re}(f(e^{i\varphi})(1 - e^{i\varphi}(x_1 - ix_2)))}{|e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)|^2} = \\ &= \frac{(1 - x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) \operatorname{Re} f(e^{i\varphi}) + i(x_2 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi) \operatorname{Im} f(e^{i\varphi})}{(\cos \varphi - x_1)^2 + (\sin \varphi - x_2)^2}. \end{aligned}$$

Helaas vinden we na dit rekenwerk dat er onder de integraal ook een term met $\operatorname{Im} f$ overblijft. Als er slechts termen met $\operatorname{Re} f$ zouden overblijven dan kunnen we daarvoor u invullen. Met u op de rand $\partial B_1(0)$ voorgeschreven vinden we u op geheel $\overline{B_1(0)}$ terug. De zo gevonden formule zouden we kunnen gebruiken om een oplossing u van (4.1) te vinden in de vorm van een integraal over de rand.

We kunnen via een ‘truc’ van $\operatorname{Im} f$ afkomen. Daarvoor doen we het volgende. Schrijf $w = x_1 + ix_2$ en merk op dat, omdat $\bar{w}^{-1} = \frac{1}{x_1 - ix_2}$ in het buitengebied van de kromme ligt, de functie $z \mapsto \frac{f(z)}{z - \bar{w}^{-1}}$ analytisch is op $B_1(0)$ en dat dus geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - \bar{w}^{-1}} dz = 0.$$

Tellen we dit op bij de formule van Cauchy dan vinden we

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - w} dz - \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - \bar{w}^{-1}} dz \right).$$

Nemen we nu het reële deel dan verdwijnt de $\operatorname{Im} f$ binnen de integraal. Dat zien we als volgt.

Gebruiken we dat $|z| = 1$, en dus geldt $z\bar{z} = 1$, dan volgt (zie voetnoot¹) dat

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz - \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-\bar{w}^{-1}} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} f(z) \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} f(e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Door het reële deel te nemen, $u(x) = \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2)$, volgt


$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} u(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi.$$

Met deze formule kunnen we met slechts de functiewaarden op de rand van u de functie u op de gehele cirkelschijf terugvinden. Hiermee hebben we niet laten zien dat we een formule voor de oplossing van (4.1) voor willekeurige u_{rand} hebben. We hebben namelijk aangenomen dat we u al als reëel deel van een analytische functie konden schrijven. Wel hebben we laten zien dat als de oplossing harmonisch op G en continu op \bar{G} is (zie Stelling 3.3.2) de functie deze vorm zal hebben.

Men kan echter laten zien dat men voor continue randvoorwaarden met deze formule inderdaad een oplossing van het Laplace-probleem op de eenheidscirkel krijgt.

Stelling 4.2.1 *Als $\varphi \mapsto u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ een continue functie is, dan is de functie $u : \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door*

► *Poisson integraal formule*



$$u(x) = \begin{cases} \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} d\varphi & \text{voor } x \text{ met } |x| < 1, \\ u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \text{ met } |x| = 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

- i. een oneindig vaak (reëel) differentieerbare functie op $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$,
- ii. een continue functie op $\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| \leq 1\}$,
- iii. die voldoet aan (4.1), de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op de eenheidscirkel.

Opmerking: Slechts zelden kan men in de Poisson integraal formule de integraal vervangen door een expliciete uitdrukking (de integraal ‘uitrekenen’). De betekenis van deze integraal ligt dan ook niet in de mogelijkheid om zo’n expliciete formule te vinden. Met behulp van deze integraal ziet men dat er een oplossing is (de integraal bestaat) en kan men eigenschappen van de oplossing afleiden.

Bewijs: We geven geen compleet bewijs maar laten een paar stappen zien. Zij $f : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie. Dan geldt het volgende:

¹Voor $|w| < |z| = 1$ geldt $\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-\bar{w}^{-1}} = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{z-w} - \frac{\bar{w}}{\bar{w}-z} \right) = \frac{1}{z} \frac{z\bar{w} - z\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w}}{(z-w)(\bar{w}-z)} = \frac{1}{z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2}$.

- i. de functie $g_1 : w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz$ is analytisch op $B_1(0)$;
- ii. de functie $g_2 : w \mapsto \frac{1}{2\pi i} w \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{zw-1} dz$ is analytisch op $B_1(0)$;
- iii. de functie $g_3 : w \mapsto g_2(\bar{w})$ is anti-analytisch (zie de opgave op bladzijde 56) op $B_1(0)$;
- iv. de functie $u : (x_1, x_2) \mapsto \operatorname{Re} g_1(x_1 + ix_2) - \operatorname{Re} g_3(x_1 + ix_2)$ is harmonisch (gebruik Stelling 4.1.1 en de genoemde opgave).

Als we deze laatste formule uitschrijven met $f = u_{\text{rand}}$ dan verschijnt de Poisson integraal formule. Continuïteit van u op $\overline{B_1(0)}_{\mathbb{R}}$ volgt hier niet direct uit. Het extra bewijs dat daarvoor nodig is zullen we overslaan. \square

\square

Opgave 55 Laat zien dat

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{u_{\text{rand}}(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}{|(R \cos \varphi, R \sin \varphi) - x|^2} d\varphi & \text{voor } x \text{ met } |x| < R, \\ u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \text{ met } |x| = R, \end{cases} \quad (4.4)$$

een oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde is op een cirkel rond 0 met straal R . (Gebruik een schalingsargument: als u_1 de oplossing is op $B_1(0)_{\mathbb{R}}$ neem dan $u(x) = u_1(\gamma x)$ voor geschikte $\gamma \in \mathbb{R}$.) \square

► gemiddelde-waardestelling voor harmonische functies

Gevolg 4.2.2 Als $u : \overline{B_R(0)}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en als u harmonisch is in $B_R(0)_{\mathbb{R}}$, dan is $u(0)$ het gemiddelde van u over de rand $\partial B_R(0)_{\mathbb{R}}$:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) d\varphi.$$

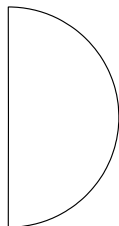
\square

Opgave 56 Bewijs Gevolg 4.2.2. Gebruik hiervoor de in de vorige opgave afgeleide formule. \square

\square

Opgave 57 Laat zien dat als $u_{\text{rand}}(x_1, x_2) = -u_{\text{rand}}(-x_1, x_2)$ voor $x_1 \geq 0$ de oplossing van (4.1) voldoet aan $u(0, x_2) = 0$.

Dit kunnen we gebruiken om een harmonische functie op de halve cirkel met randvoorwaarden



$$u(0, x_2) = 0 \text{ voor } -1 < x_2 < 1,$$

$$u(x_1, x_2) = u_{\text{rand}}(x_1, x_2) \text{ voor } x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$$

te definiëren.

Verklaar en controleer de volgende formule (hint: substitueer $\varphi := \pi - \varphi$ in de tweede integraal)

$$u(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \left(\int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|\cos \varphi, \sin \varphi - x|^2} d\varphi + \int_{\varphi=\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{-u_{\text{rand}}(-\cos \varphi, \sin \varphi)}{|\cos \varphi, \sin \varphi - x|^2} d\varphi \right) = \\
&= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{(x_1 - \cos \varphi)^2 + (x_2 - \sin \varphi)^2} - \frac{1}{(x_1 + \cos \varphi)^2 + (x_2 - \sin \varphi)^2} \right) u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

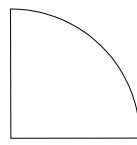
□

Opgave 58 Verzin een formule als in (4.5) voor de harmonische functie op de halve cirkel die voldoet aan de randvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) &= 0 \text{ voor } -1 < x_2 < 1, \\
u(x_1, x_2) &= u_{\text{rand}}(x_1, x_2) \text{ voor } x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}.
\end{aligned}$$

□

Opgave 59 Verzin een formule als in (4.5) voor de harmonische functie op de kwart cirkel die voldoet aan de randvoorwaarden



$$\begin{aligned}
u(x_1, 0) &= 0 \text{ voor } 0 < x_1 < 1 \\
u(0, x_2) &= 0 \text{ voor } 0 < x_2 < 1, \\
u(x_1, x_2) &= u_{\text{rand}}(x_1, x_2) \text{ voor } 0 \leq x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}.
\end{aligned}$$

4.3 Een oplossing op andere gebieden

We zullen hier geen algemene theorie afleiden voor het bestaan van oplossingen van de Laplace-vergelijking met Dirichlet (of Neumann) randvoorwaarden op willekeurige gebieden in R^2 . Aan de hand van een voorbeeld laten we een methode zien waarmee een oplossing geconstrueerd kan worden.

Allereerst spreken we af wat we een oplossing zullen noemen.

Definitie 4.3.1 Zij G een gebied in R^2 . We noemen $u : \bar{G} \rightarrow R$ een oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden u_{rand} als

- i. $u : G \rightarrow R$ is oneindig vaak (reëel) differentieerbaar,
- ii. $u : \bar{G} \rightarrow R$ is continu,
- iii. u voldoet aan:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{voor } x \in G, \\ u(x) = u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \in \partial G. \end{cases} \tag{4.6}$$

► Laplace-probleem

Het stelsel in (4.6) wordt het Laplace-probleem genoemd.

□

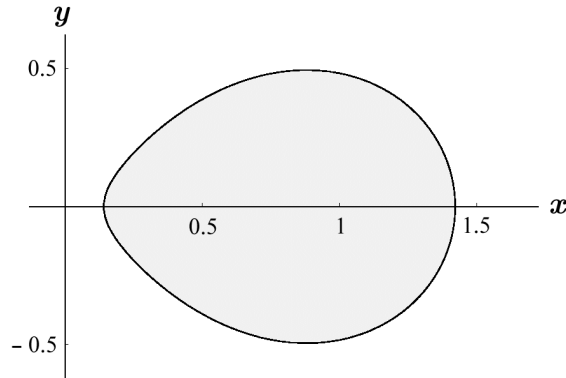
Opgave 60 Stel dat de functie u harmonisch is op R^2 .

Laat zien dat de functie $(x, y) \mapsto u(x^2 - y^2 - \frac{51}{50}, 2xy)$ ook harmonisch is op R^2 .

□

Voorbeeld 23

De oplossingen van de vergelijking $(x^2 - y^2 - \frac{51}{50})^2 + (2xy)^2 = 1$ in R^2 met $x > 0$ leveren het volgende beeld:



De functie $g : R^2 \rightarrow R^2$ met $g(x, y) = (x^2 - y^2 - \frac{51}{50}, 2xy)$ beeldt de hierboven getekende verzameling af op de eenheidscirkel in R^2 . Noem het inwendige van deze verzameling Ei . Als g een inverse heeft dan kunnen we een oplossing v van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op Ei construeren met behulp van de formule voor de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op de eenheidscirkel als volgt. Definieer

$$u_{\text{rand}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = v_{\text{rand}}(g^{\text{inverse}}(\tilde{x}, \tilde{y})) \text{ voor } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial B_1(0), \quad (4.7)$$

en gebruik de Poisson-formule voor u op de eenheidscirkel; de gevraagde v vindt men nu door

$$v(x, y) = u(g(x, y)). \quad (4.8)$$

□

Opgave 61 We nemen aan dat de hierboven genoemde $g : \overline{Ei} \rightarrow \overline{B_1(0)}_{\mathbb{R}}$ inderdaad inverteerbaar is² en dat de voorgeschreven randwaarden differentieerbaar zijn.

Laat zien dat de v van hierboven inderdaad een oplossing is van het Laplace-probleem met Dirichlet randvoorwaarde op Ei .

- *afbeeldingsstelling van Riemann*
- *conform*

We kunnen een transformatie als hierboven voor veel andere gebieden gebruiken. De zogenoemde *afbeeldingsstelling van Riemann* zegt dat er bij elk enkelvoudig samenhangend gebied G een afbeelding $f : \overline{G} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ bestaat die analytisch is op G en die bovendien voldoet aan $f'(z) \neq 0$ voor $z \in G$. Dergelijke afbeeldingen zijn *conform*, zie bladzijde 2.4.1. Helaas is voor de meeste gebieden het vinden van deze afbeelding niet erg praktisch.

Het recept voor deze aanpak is als volgt. We gebruiken de notatie $f_{\mathbb{R}} : \overline{G}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{B_1(0)}_{\mathbb{R}}$ gedefinieerd door

$$f_{\mathbb{R}}(x, y) = (\text{Re } f(x + iy), \text{Im } f(x + iy))$$

Recept 4.3.2 voor het vinden van een harmonische functie u op een enkelvoudig samenhangend gebied $G_{\mathbb{R}}$ met voorgeschreven randwaarde u_r op $\partial G_{\mathbb{R}}$. Hiervoor is een functie $f : \overline{G} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ nodig die analytisch is op G en waarvoor geldt dat $f'(z) \neq 0$ voor $z \in G$.

²De continu differentieerbare reële functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is inverteerbaar in een omgeving van (x, y) als geldt $\det \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} g_1(x, y) & \frac{d}{dy} g_1(x, y) \\ \frac{d}{dx} g_2(x, y) & \frac{d}{dy} g_2(x, y) \end{pmatrix} \neq 0$.

De analytische functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is inverteerbaar in een omgeving van z als $f'(z) \neq 0$.

i. de randvoorwaarde overbrengen van ∂G naar $\partial B_1(0)$ door

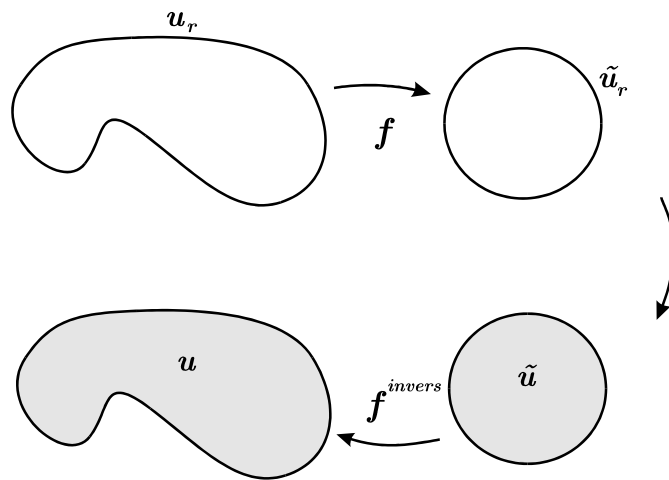
$$\tilde{u}_r(f_{\mathbb{R}}(x, y)) = u_r(x, y) \text{ voor } (x, y) \in \partial G_{\mathbb{R}};$$

ii. \tilde{u} oplossen op $B_1(0)$ via Poisson integraal formule

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\tilde{u}_r(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - (x, y)|^2} d\varphi;$$

iii. terugbrengen naar G via

$$u(f_{\mathbb{R}}^{\text{invers}}(x, y)) = \tilde{u}(x, y) \text{ voor } (x, y) \in B_1(0)_{\mathbb{R}}.$$



Opmerking: Voordat men computers benaderingen voor oplossingen kon laten berekenen, was het oplossen van de Laplace vergelijking via een conforme afbeelding en de Poisson integraal formule voor de cirkelschijf een mogelijkheid om een beeld van de oplossing te krijgen. In de oudere literatuur ($\pm 1850-1950$) vindt men vele expliciete voorbeelden van dergelijke conforme afbeeldingen. Een catalogus van conforme afbeeldingen vindt men in het boek van H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, heruitgegeven door Dover in 1957. (De afbeelding van ellips naar de cirkel is daar overigens niet correct.)

Dat bovenstaand recept inderdaad een harmonische functie levert zien we met het volgende resultaat.

Hulpstelling 4.3.3 *Zij G een gebied in C en stel dat*

i. $(s, t) \mapsto u(s, t)$ harmonisch is op $G_{\mathbb{R}}$;

ii. $z \mapsto f(z)$ analytisch is op G .

Dan is $(x, y) \mapsto u(f_{\mathbb{R}}(x, y))$ harmonisch op $f(G)_{\mathbb{R}}$.

Bewijs: Als we dit door recht-toe-recht-aan berekenen laten zien dan wordt dat een stevige rekenpartij. We kunnen het bewijs ook slimmer aanpakken. Herinner je dat er bij een harmonische functie u op een enkelvoudig samenhangende gebied een analytische functie g bestaat zodanig dat $u(x, y) = \operatorname{Re} g(x + iy)$. Omdat g en f analytisch zijn is de samenstelling $g \circ f$ analytisch. Dan volgt dat $v = \operatorname{Re}(h \circ f)$ harmonisch is. \square

 \square **Voorbeeld 24**

De functie $f : C \rightarrow C$ met $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}$ beeldt de halve cirkelschijf af op de hele cirkelschijf:

$$\begin{aligned} f &: \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\} \rightarrow B_1(0) \text{ is analytisch;} \\ f &: \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\} \rightarrow \overline{B_1(0)} \text{ is continu en bijtief.} \end{aligned}$$

Het controleren van deze bewering is een pittige oefening in het rekenen met complexe getallen. \square

 \square **Opgave 62**

- i. Laat zien dat $B_1(0) \setminus \{0\}$ het beeld is van $C \setminus \overline{B_1(0)}$ onder de functie $f(z) = \frac{1}{z}$.
- ii. Ofschoon f^{inverse} niet op $\overline{B_1(0)}$ bestaat (er is geen $z \in C \setminus \overline{B_1(0)}$ met $f(z) = 0$) kunnen we via bovenstaande wijze een oplossing van

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| > 1, \\ v = v_{\text{rand}} & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| = 1, \end{cases}$$

krijgen. Geef een integraalformule.

- iii. Wat kun je zeggen van $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} v(x, y)$? \square

 \square

Opgave 63 Welk gebied wordt door $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ afgebeeld op $B_1(0)$? \square

 \square

Opgave 64 We beschouwen de Laplace-vergelijking op het halfvlak $R^+ \times R$. Dat is het volgende probleem:

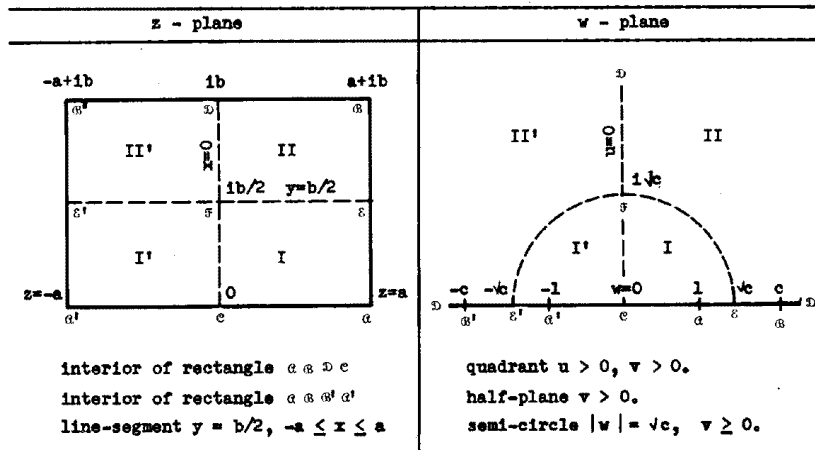
$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } x_1 > 0, \\ v(0, x_2) = v_{\text{rand}}(x_2) & \text{voor } x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Gebruik $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ om een integraalformule voor een oplossing hiervan te berekenen. \square

 \square **Voorbeeld 25**

In een vorige opgave hebben we een analytische functie f van het halfvlak naar de eenheidsbol gezien. Gebruiken we de functie $z \mapsto w(z)$ uit paragraaf 13.2 van Kober's Dictionary of Conformal Representations dan is $f \circ w$ een analytische afbeelding van de rechthoek naar de eenheidsschijf. Die functie $f \circ w$ kan men gebruiken om een oplossing van het Laplace-probleem met voorgeschreven randvoorwaarden op de rechthoek te bepalen. Het daarmee expliciet berekenen van een oplossing is nog een hele toer als men deze afbeelding bekijkt.

13.2 Rectangle on quarter of plane or on half-plane.



(1) Given: a, b, both positive.

$$\tau = \frac{1b}{a}; \quad k = \left(\frac{\Theta_2(\tau)}{\Theta_3(\tau)} \right)^2 = \sqrt{\lambda(\tau)} \quad (\text{cf. §14.1}), \quad 0 < k < 1; \quad c = \frac{1}{k}$$

$$a = \frac{a}{K}, \quad \text{where } K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (\text{cf. §13.1}).$$

Transformation required:

$$z = a \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad w = \text{sn}\left(\frac{z}{a}, k\right) = \text{sn} \frac{z}{a}.$$

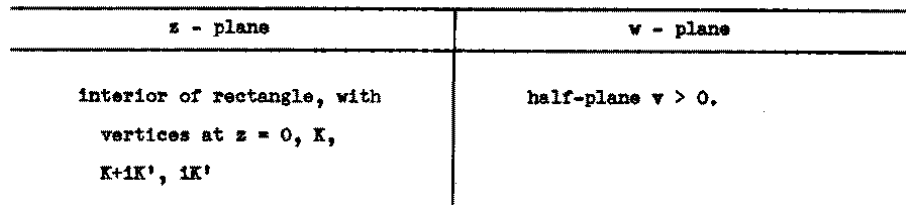
(2) Given c (c > 1).

$$k = \frac{1}{c}; \quad K \text{ as above, } a = K; \quad b = K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$\text{where } k'^2 = 1 - k^2.$$

Transformation required: $w = \text{sn}(z, k) = \text{sn } z.$

$$w = \text{sn}^2(z, k)$$



4.4 Het maximum principe

Voor vele enkelvoudig samenhangende gebieden in \mathbb{R}^2 kan men via een conforme afbeelding een oplossing vinden van het Laplace-probleem. De vraag die dan opkomt is of de zo gevonden oplossing de enig mogelijke is. Het belangrijkste gereedschap voor het beantwoorden van deze vraag is het zogenoemde sterk maximum principe. Voor harmonische functies luidt het als volgt.

► *sterk maximum principe*

Stelling 4.4.1 *Zij G een gebied in \mathbb{R}^2 en stel dat de continue functie $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch is in G . Als u zijn maximum binnen G aanneemt, dan is u constant.*

Voor begrensde gebieden G volgt dan dat het maximum op de rand ligt, dus

$$\max_{x \in \bar{G}} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x).$$

Bewijs: Stel dat u zijn maximum heeft in $y \in G$. Dan geldt voor iedere $r > 0$ met $B_r(y)_{\mathbb{R}} \subset G$ (zulke $r > 0$ zijn er want G is open) via Gevolg 4.2.2 dat

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(y + r(\cos \varphi, \sin \varphi)) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(y) d\varphi = u(y).$$

Als $u(x)$ ergens op $\partial B_r(y)_{\mathbb{R}}$ kleiner dan $u(y)$ is, is deze ongelijkheid strikt ($<$) en krijgen we een tegenspraak. Zo niet, dan geldt $u(x) = u(y)$ voor alle x met $|x - y| \leq r$.

We kunnen dit argument herhalen voor elke \tilde{y} op deze cirkelschijf, enzovoort. Het gebied G zo opvullend met overlappende cirkels levert dat u is constant. \square

Gevolg 4.4.2 *De Laplace-vergelijking op een begrensde gebied met op de gehele rand voorgeschreven Dirichlet randvoorwaarde heeft hoogstens één oplossing.*

Bewijs: Stel er zijn twee oplossingen u_1 en u_2 . Dan is $v = u_1 - u_2$ harmonisch binnen het gebied en 0 op de rand. Dus $\max_{x \in \bar{G}} v(x) = \max_{x \in \partial G} v(x) = 0$. Hieruit volgt dat $v \leq 0$ op G . Omdat hetzelfde geldt voor $u_2 - u_1$ vinden we dat $u_1 = u_2$ in G . \square

Combineren we Stelling 4.2.1 en Gevolg 4.4.2 dan zien we dat de Laplace-vergelijking op een cirkelschijf met op de gehele rand voorgeschreven Dirichlet randvoorwaarde precies één oplossing heeft.

\square

Opgave 65 We bekijken nog even de eerste opgave op bladzijde 64 waar een oplossing op het gebied $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$ berekend werd. Dit gebied is onbegrensd en dus kunnen we niet het maximum principe gebruiken om te laten zien dat er precies één oplossing is. Het is zelfs nog erger: er zijn meerdere oplossingen. Laat zien dat $v(x, y) + 43 \log(x^2 + y^2)$ ook een oplossing is. _____

\square

Opgave 66 Bepaal nog enkele andere oplossingen van het Laplace probleem op het halfvlak (zie laatste opgave op bladzijde 64). _____

5. POTENTIAALSTOMINGEN IN 2 DIMENSIES

5.1 Model

Een twee-dimensionale niet-samendrukbare stroming ten gevolge van een potentiaal kunnen we beschrijven met behulp van complexe functies.

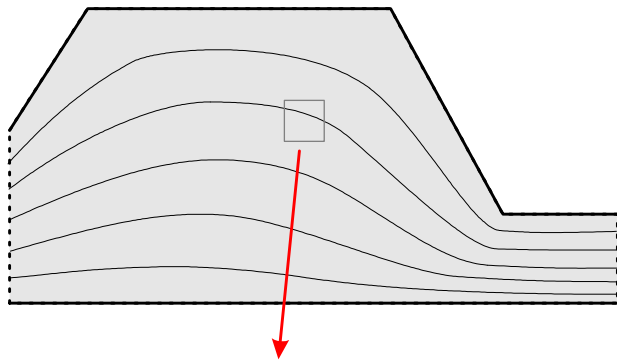
Voorbeelden komen voor bij

- stroming van een ideale vloeistof;
- warmtestroming;
- electrostatica.

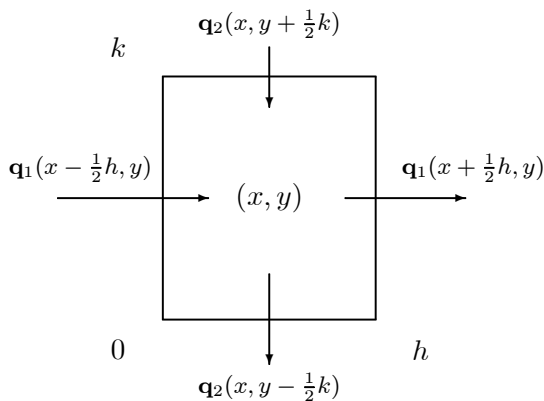
We zullen eerst een grove afleiding van het model geven.

5.1.1 Reële formulering

Om een beeld te krijgen is hieronder zo'n gebied getekend. Je kunt denken aan bijvoorbeeld een zandlaag tussen twee niet-doorlatende wanden. Bij de linker stippellijn is de instroom bekend en bij de rechter de uitstroom. Enkele stroomlijnen zijn ook geschetst. In dit plaatje wordt de horizontale stroomsnelheid op plaats (x, y) aangegeven door $\mathbf{q}_1(x, y)$, de verticale door $\mathbf{q}_2(x, y)$. Omdat we aannemen dat het stromende materiaal niet samendrukbaar is, is de stromingsdichtheid evenredig met de stroomsnelheid. Nemen we ook nog ter vereenvoudiging aan dat de stroomsnelheid in het midden van elk interval een goede benadering is dan vinden via de massabalans



‘instroom’ = ‘uitstroom’



dat

$$k (\mathbf{q}_1(x + \frac{1}{2}h, y) - \mathbf{q}_1(x - \frac{1}{2}h, y)) + h (\mathbf{q}_2(x, y + \frac{1}{2}k) - \mathbf{q}_2(x, y - \frac{1}{2}k)) = 0.$$

Vervolgens delen we deze uitdrukking door hk . Tenslotte gebruiken we twee limieten voor h respectievelijk k naar 0:

Dat wil zeggen

$$\frac{\mathbf{q}_1(x + \frac{1}{2}h, y) - \mathbf{q}_1(x - \frac{1}{2}h, y)}{h} + \frac{\mathbf{q}_2(x, y + \frac{1}{2}k) - \mathbf{q}_2(x, y - \frac{1}{2}k)}{k} = 0.$$

en via

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{q}_1(x + \frac{1}{2}h, y) - \mathbf{q}_1(x - \frac{1}{2}h, y)}{h} &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_1(x, y), \\ \lim_{k \downarrow 0} \frac{\mathbf{q}_2(x, y + \frac{1}{2}k) - \mathbf{q}_2(x, y - \frac{1}{2}k)}{k} &= \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q}_2(x, y), \end{aligned}$$

volgt

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q}_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_2(x, y) = 0. \quad (5.1)$$

Verder nemen we aan dat we met een potentiaalstroming te maken hebben. Dat wil zeggen dat er een functie Φ is, de *potentiaal*, zodanig dat

► *potentiaal*

$$\tilde{\mathbf{q}} = \nabla \Phi.$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y), \\ \mathbf{q}_2(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Als Φ een tweemaal continu differentieerbare functie dan geldt daarmee dat

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q}_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_2(x, y). \quad (5.2)$$

De uitdrukkingen in (5.1) en (5.2) lijken verdacht veel op de Cauchy-Riemann vergelijkingen van bladzijde 25.

5.1.2 Complexe formulering

We gaan over op complexe functies door te schrijven

$$q(x + iy) = \mathbf{q}_1(x, y) - i\mathbf{q}_2(x, y). \quad (5.3)$$

Als de potentiaal Φ een tweemaal continu differentieerbare functie is dan voldoet deze q via (5.1) en (5.2) inderdaad aan de *Cauchy-Riemann vergelijkingen*. Voor nette (lees tweemaal continu differentieerbare) potentiaalfuncties is q dus een analytische functie.

► *Cauchy-Riemann vergelijkingen*

Merk op dat voor de potentiaalfunctie Φ zelf het volgende geldt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q}_2(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \Phi(x, y).$$

Anders geschreven

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (5.4)$$

► *harmonisch*

Een functie waarvoor (5.4) geldt heet *harmonisch*.

Stel dat het gebied G enkelvoudig samenhangend is. Omdat Φ harmonisch is kunnen we dan Φ beschouwen als het reële deel van een analytische functie f :

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \text{ waarbij } z = x + iy \text{ met } (x, y) \in G.$$

Zie de opmerking op bladzijde 56. Ook Ψ is harmonisch in G en volgens de Cauchy-Riemann vergelijkingen geldt dat

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ in } G. \quad (5.5)$$

Opmerking: De analytische functie f wordt ook de complexe potentiaal genoemd en vaak aangegeven met Ω :

$$\Omega(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y).$$

Voeren we de complexe snelheid in als in (5.3), dan hebben we

$$q = -\Phi_x + i\Phi_y = -\Phi_x - i\Psi_x = -\Omega_x = -\Omega'.$$

5.1.3 Betekenis complexe potentiaal

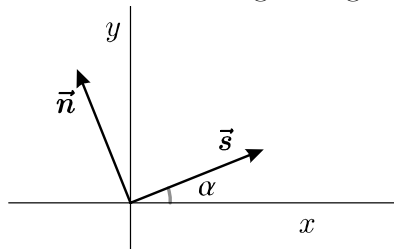
Wat is de fysische interpretatie van deze functie Ψ ? Wegens (5.5) geldt

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = 0 \text{ ofwel } \nabla \Phi \perp \nabla \Psi \text{ in } G$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \text{ en } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi}{\partial s}, \quad (5.6)$$

met (n, s) de coördinaten in een willekeurig orthogonaal stelsel $\{\vec{n}, \vec{s}\}$.



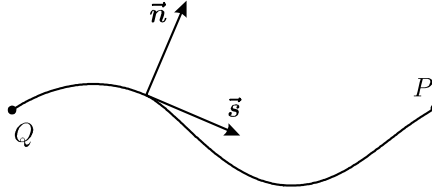
De eerste gelijkheid in (5.6) volgt uit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \nabla \Phi \cdot \vec{s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \alpha = \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin \alpha = \nabla \Psi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}; \end{aligned}$$

de tweede volgt op analoge wijze.

We bekijken een reële kromme $t \mapsto (x(t), y(t))$ binnen het gebied G met begin- en eindpunt P respectievelijk Q . Op ieder punt van de kromme nemen

we \vec{s} de tangentiële en \vec{n} de geschikt georiënteerde normaalrichting.



Als P en Q twee punten zijn in G en $\Gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ een verbindende reële kromme, dan geldt

$$\Psi(Q) - \Psi(P) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = - \int_{\Gamma} \nabla \Phi \cdot \vec{n} ds = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{q}} \cdot \vec{n} ds,$$

met andere woorden, $\Psi(Q) - \Psi(P)$ is de hoeveelheid vloeistof die stroomt door een oppervlak gekarakteriseerd door de kromme k . In het bijzonder geldt:

$$\Psi(P) = \Psi(Q) \text{ voor punten } P, Q \text{ op een stroomlijn.}$$

► *stroomfunctie*

Daarom wordt deze functie Ψ de *stroomfunctie* genoemd. Dikwijls is het handig om een stromingsprobleem rechtstreeks in Ψ uit te drukken.

Opmerking: We kunnen $\Psi(Q) - \Psi(P)$ ook via de complexe potentiaal berekenen. Voor de met Γ corresponderende kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ (met $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$) vinden we via Hulpstelling 3.1.4 dat

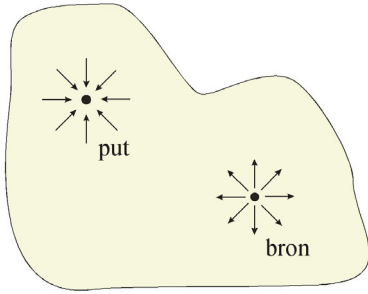
$$\Omega(\gamma(b)) - \Omega(\gamma(a)) = - \int_{\gamma} q(z) dz.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma(b)) - \Psi(\gamma(a)) &= \text{Im}(\Omega(\gamma(b)) - \Omega(\gamma(a))) = - \text{Im} \int_{\gamma} q(z) dz = \\ &= - \text{Im} \int_a^b (q_1(\mathbf{k}(t)) - iq_2(\mathbf{k}(t))) (x_1'(t) + ix_2'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (-q_1(\mathbf{k}(t)) x_2'(t) + q_2(\mathbf{k}(t)) x_1'(t)) dt = \\ &= \int_a^b \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}(t)) \cdot (-x_2'(t), x_1'(t)) dt = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{q}} \cdot \vec{n} ds. \end{aligned}$$

5.2 Model met singuliere punten

Als er in een gebied bronnen en putten zijn en men neemt een gesloten contour rond dat gebied dan geldt dat de totale instroom door de rand van het gebied met de instroom door de bronnen gelijk is aan de som van de uitstroom door de rand en via putten. Als we de randkromme Γ noemen (en alvast linksom laten lopen): $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ wil dat zeggen, met de uitwendige normaal $\tilde{\mathbf{n}}$, dat



$$\int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, ds = \sum_{\substack{\text{(bronnen/)} \\ \text{(putten)}}} c_i.$$

5.2.1 Puntbron

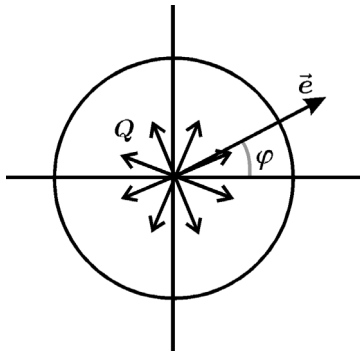
Voor een puntbron met sterkte Q in een oneindig gebied hebben we de potentiaal

$$\Phi(x, y) = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{met } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.7)$$

Dan geldt

$$\nabla \Phi = -\frac{Q}{2\pi r} \vec{e} \quad \text{en dus } \tilde{\mathbf{q}} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e},$$

waarin \vec{e} de radiale eenheidsvector is. Met andere woorden, voor de cirkel met straal R geldt



puntbron

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(0)_{\mathbb{R}}} \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, ds &= \\ &= \int_{\partial B_R(0)_{\mathbb{R}}} \frac{Q}{2\pi R} \vec{e} \cdot \vec{e} \, ds = Q, \end{aligned}$$

onafhankelijk van R . De corresponderende stroomfunctie is

$$\Psi(r, \varphi) = -\frac{\varphi}{2\pi} Q, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Omdat $C \setminus \{(0)\}$ niet enkelvoudig samenhangend is zien we overigens dat we voor Ψ het C -vlak ergens tot $(0, 0)$ moeten 'opensnijden'.

► *Cauchy-Riemann in poolcoördinaten*

Herschrijven van de Cauchy-Riemann vergelijkingen met poolcoördinaten geeft

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (5.8)$$



Opgave 67 Laat zien dat (5.8) de Cauchy-Riemann vergelijkingen in poolcoördinaten zijn. Laat ook zien dat bovenstaande Φ en Ψ hieraan voldoen.

5.2.2 Een gebied met meerdere bronnen/putten

De potentiaal bij een puntbron in (x_1, y_1) met sterkte c is $\frac{c}{2\pi} \ln |(x, y) - (x_1, y_1)|$. Bij een put krijgen we hetzelfde type potentiaal met een negatieve constante. Bekijken we nu een gebied G met in- en uitstroom aan (een deel van) de rand en enkele bronnen en putten op plekken (x_k, y_k) ter grootte c_k (zeg $k = 1, \dots, n$) dan vindt men voor de totale potentiaal

$$\Phi(x, y) = h(x, y) + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2\pi} \ln |(x, y) - (x_k, y_k)|.$$

Hierbij is h een harmonische functie die de potentiaal beschrijft bij afwezigheid van bronnen en putten. We krijgen

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, y) = \nabla h(x, y) + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2\pi |(x, y) - (x_k, y_k)|^2} (x - x_k, y - y_k)$$

en in complexe notatie, $z = x + iy$, de functie q als in (5.3) en $a(z) = h_x(x, y) - ih_y(x, y)$, volgt

$$\begin{aligned} q(z) &= a(z) + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2\pi (\overline{z - z_k})(z - z_k)} (\overline{z - z_k}) = \\ &= a(z) + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2\pi (z - z_k)}. \end{aligned}$$

Omdat h harmonisch is, is a analytisch. Voor een gesloten contour γ vinden we via de Stelling van Cauchy dat

$$\int_{\gamma} q(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \left\{ \operatorname{Res} \left(\frac{c_k}{2\pi} \frac{1}{z - z_k} \right) \right\}_{z=z_k} = i \sum_{i=1}^n c_i.$$

5.2.3 Een dipool

► *dipool*

Een speciaal geval van één bron en één put van gelijke grootte dicht bij elkaar is de *dipool*. We nemen de potentiaal bij de situatie dat er zich een bron van grootte $c = 2\pi$ in $(.1, 0)$ bevindt en een put van gelijke grootte, dus $c = -2\pi$, in $(-.1, 0)$. Leggen we de rand op oneindig dan vinden we voor de potentiaal

$$\Phi(x, y) = \ln |(x + .1, y)| - \ln |(x - .1, y)|.$$

Daarmee vinden we voor de (complexe) stroming

$$q(z) = \frac{1}{z + .1} - \frac{1}{z - .1}.$$

Merk op dat $q : C \setminus \{\pm .1\} \rightarrow C$ analytisch is. Op $C \setminus (-\infty, .1]$ kunnen we zelfs een primitieve van q vinden met behulp van de Ln-functie gedefinieerd in (3.2):

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \operatorname{Ln}(z + .1) - \operatorname{Ln}(z - .1) = \\ &= \ln |z + .1| + i \arg(z + .1) - \ln |z - .1| - i \arg(z - .1) = \\ &= \ln \left| \frac{z + .1}{z - .1} \right| + i \arg \left(\frac{z + .1}{z - .1} \right). \end{aligned}$$

Voor de stroomfunctie geldt

$$\Psi(z) = \text{Im } \Omega(z) = \arg\left(\frac{z + .1}{z - .1}\right).$$

Deze stroomfunctie is dus constant voor $\frac{z+.1}{z-.1}$ op een rechte lijn door de oorsprong. De potentiaal is constant voor $\frac{z+.1}{z-.1}$ op een cirkel met als middelpunt de oorsprong.

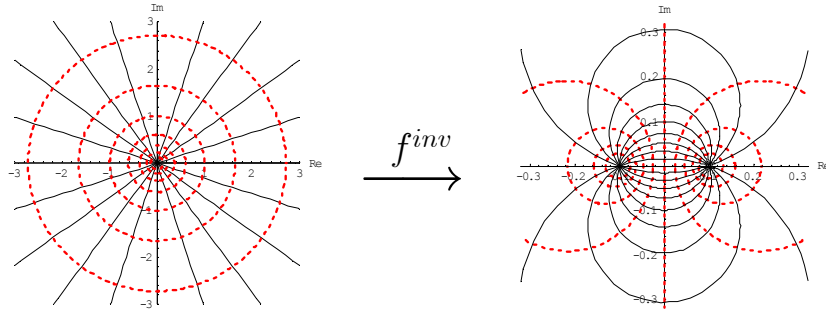
► *Möbius-
transformatie*

We kunnen dit als volgt berekenen. Allereerst definiëren we de *Möbius-transformatie* $f : C \setminus \{.1\} \rightarrow C \setminus \{1\}$ met $f(z) = \frac{z+.1}{z-.1}$. Dan is Ψ constant op $f^{inv}(\ell)$, met ℓ een rechte lijn door de oorsprong. Evenzo is Φ constant op $f^{inv}(C)$ met C een cirkel met de oorsprong als middelpunt.

Deze inverse van f (zie ook bladzijde 31) is ook een Möbius-afbeelding en heeft als voorschrift

$$f^{inv}(z) = \frac{.1w + .1}{w - 1}.$$

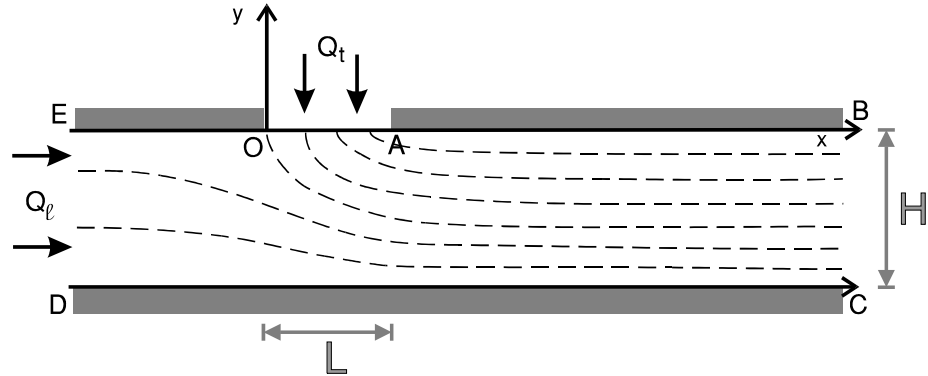
Möbius-afbeeldingen voeren cirkels en rechte lijnen over in cirkels en rechte lijnen. Met enig reken- en tekenwerk vinden we voor deze beelden onder f^{inv} het volgende plaatje:



De gestippelde cirkels in het rechterplaatje zijn de equipotentiaal-lijnen; de doorlopende cirkels de stroomlijnen.

5.2.4 Stroming in een strip

We beschouwen grondwaterstroming in een lange strip (b.v. tussen kleilagen) waar lokaal van boven extra water in doordringt. Een schematische tekening volgt.



een vloeistofstroming door poreus medium

We nemen aan dat in- en uitstroom homogeen over de openingen verdeeld is. Dan voldoet Ψ aan de volgende randvoorwaarden.

We normaliseren zodanig dat O de oorsprong is en $\Psi(O) = 0$. De randvoorwaarden worden:

$$\begin{aligned} \text{Langs } EO : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = \text{constant} = 0; \\ \text{Langs } OA : \quad -\frac{Q_t}{L} = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = -\frac{Q_t}{L}x \text{ met } 0 < x < L; \\ \text{Langs } AB : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = -Q_t; \\ \text{Langs } BC : \quad \frac{Q_t + Q_\ell}{H} = q_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = -Q_t - \frac{Q_t + Q_\ell}{H}y \\ &\text{met } y < 0; \\ \text{Langs } CD : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = Q_\ell; \\ \text{Langs } DE : \quad \frac{Q_\ell}{H} = q_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = -\frac{Q_\ell}{H}y \text{ met } y < 0. \end{aligned}$$

Gezocht wordt een functie Ψ die voldoet aan $\Delta\Psi = 0$ en bovenstaande randvoorwaarden.

□

Opgave 68 Bereken de oplossing voor Ψ als $Q_t = 0$. _____

Een analytische afbeelding van de rechthoek naar de cirkelschijf vinden we door de afbeelding van rechthoek naar bovenhalfvlak uit 'Kober' te laten volgen door $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

□

Opgave 69 De (tweedimensionale doorsnede van de) stroming rond een horizontale cilinder met straal a heeft de volgende complexe potentiaal: $\Omega(z) = v\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$. Bereken snelheidspotentiaal, snelheidsveld en stroomfunctie. Geef een schets van de stroomlijnen. _____

5.2.5 Stationair temperatuurprofiel

De stationaire temperatuurverdeling in een dunne metalen plaat, geïsoleerd aan boven- en onderkant, die aan de rand een voorgeschreven temperatuur T_{rand} is ook een stromingsprobleem: bij elk deelgebied stroomt evenveel warmte naar binnen als naar buiten. Noemen we $T(x, y)$ de temperatuur op plaats (x, y) van de plaat dan vindt men

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{binnen de plaat,} \\ T = T_{rand} & \text{op de rand.} \end{cases} \tag{5.9}$$

- *Laplace-vergelijking*
- *Dirichlet-randvoorwaarde*

Dit stelsel wordt een *Laplace-vergelijking* met *Dirichlet-randvoorwaarde* genoemd. T_{rand} is een functie die op de rand wordt voorgeschreven. Dit probleem is de vertaling van: bereken de temperatuur binnen de plaat als we deze aan de rand vastleggen (meten).

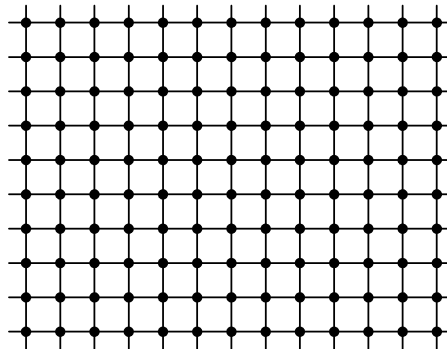
Als we een gedeelte van de rand isoleren in plaats van de temperatuur daarvoor te schrijven, dan wordt het randwaardeprobleem als volgt:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{binnen de plaat,} \\ T = T_{rand} & \text{op de rand met voorgeschreven temperatuur,} \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{op de geïsoleerde rand.} \end{cases}$$

- *Neumann-randvoorwaarde*

Men noemt $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ een *Neumann-randvoorwaarde*. $\frac{\partial T}{\partial n}$ is de richtingsafgeleide van T in de richting van de naar buiten gerichte normaalvector n .

In plaats van dat we dit probleem analytisch aanpakken zullen we doen alsof de plaat uit eindig veel punten bestaat. We gaan het probleem discretiseren. We stellen de plaat voor als een twee-dimensionaal rooster en bekijken een punt uit dit rooster, zeg (x, y) .



Noem h de roosterafstand. De temperatuur is in evenwicht in (x, y) als die gelijk is aan het gemiddelde van de temperatuur in de vier omliggende punten. Dat wil zeggen, we weten de temperatuur voor randpunten en voor inwendige punten geldt

$$T(x, y) = \frac{1}{4} (T(x + h, y) + T(x - h, y) + T(x, y + h) + T(x, y - h)). \tag{5.10}$$

Opmerking: We kunnen het verband tussen (5.9) en (5.10) op volgende wijze aannemelijk maken. We herschrijven (5.10) naar

$$T(x + h, y) - 2T(x, y) + T(x - h, y) + T(x, y + h) - 2T(x, y) + T(x, y - h) = 0. \tag{5.11}$$

Aangenomen dat T tweemaal continu (reëel) differentieerbaar is dan volgt uit de Stelling van Taylor¹ dat

$$\begin{aligned} \frac{T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y)}{h^2} + \frac{T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h)}{h^2} &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 T(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 T(x, y) + o(1). \end{aligned}$$

Met (5.11) en $|h| \rightarrow 0$ vinden we

$$\Delta T(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 T(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 T(x, y) = 0.$$

De operator Δ_h gedefinieerd voor $h > 0$ door

$$\Delta_h T(x, y) = \frac{T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y)}{h^2} + \frac{T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h)}{h^2}$$

► *discrete
Laplace-
operator*

heet de *discrete Laplace-operator*. Omdat voor een oplossing T van $\Delta_h T = 0$ geldt dat in ieder inwendig punt T het gemiddelde van zijn vier burens is zien we dat T geen strikt maximum of strikt minimum in het inwendige kan hebben. Het maximum van T wordt op de rand aangenomen. Zo'n resultaat wordt een maximum principe genoemd.

► *discreet maxi-
mum principe*

Bij de zogeheten 'eindige differentie methode' (Numerieke Wiskunde) worden oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderd door het gebied te vervangen door een eindig aantal roosterpunten. De benaderende oplossing is een functie op dit eindige aantal roosterpunten die voldoet aan een vergelijking waarin de differentiaaloperator vervangen is door een discrete operator. Bij de Laplace-vergelijking wordt Δ vervangen door Δ_h .

□

Voorbeeld 26

Stel dat we de oplossing van het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} \Delta T(x, y) = 0 & \text{voor } (x, y) \in (0, 1)^2, \\ T(x, y) = 10 + 9x^2 - 3y & \text{voor } (x, y) \in \partial\left((0, 1)^2\right), \end{cases} \quad (5.12)$$

willen benaderen, bijvoorbeeld door het vierkant $(0, 1)^2$ te vervangen door een grid van $n + 1$ bij $n + 1$ punten. Dan beschouwen we de benaderende temperatuur-functie T_n die gedefinieerd is op het eindige aantal punten $R_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; 0 \leq i, j \leq n\}$ met de operator

$$\Delta_{\frac{1}{n}} T_n(i, j) =$$

¹Herinner je uit de analyse dat voor een tweemaal continu (reëel) differentieerbare functie $x \mapsto f(x)$ volgens de stelling van Taylor geldt dat voor $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + o(h^2), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + o(h^2). \end{aligned}$$

Na optellen en delen door h^2 volgt dat voor $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + o(1).$$

$$= T_n(i+1, j) + T_n(i-1, j) + T_n(i, j+1) + T_n(i, j-1) - 4T_n(i, j) \quad (5.13)$$

We noemen de rand $\delta R_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i = 0 \text{ of } i = n \text{ of } j = 0 \text{ of } j = n\}$.

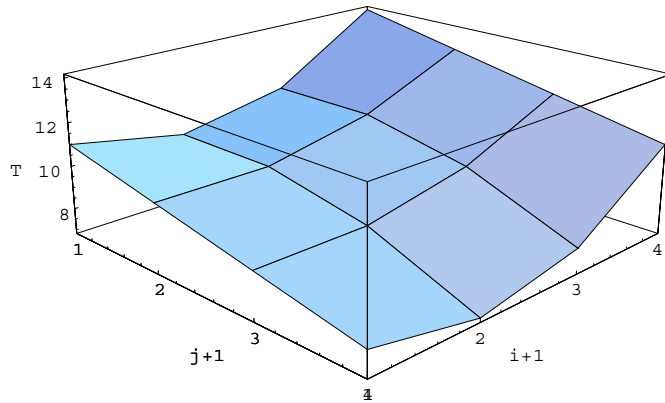
Het te onderzoeken probleem wordt daarmee

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{1}{n}} T_n(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in R_n \setminus \delta R_n, \\ T_n(i, j) = 10 + 9\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 - 3\frac{j}{n} & \text{voor } (i, j) \in \delta R_n. \end{cases} \quad (5.14)$$

Voor $n = 3$ heeft men een rooster van 4×4 punten waarvan in de 12 randpunten de temperatuur vast ligt. De temperatuur $T_{ij}(= T_3(i, j))$ in de overige vier punten kan men berekenen uit de bijbehorende 4 vergelijkingen van de vorm (5.13). Uitgeschreven in matrix-vorm:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - T_{10} - T_{01} \\ 0 - T_{20} - T_{31} \\ 0 - T_{02} - T_{13} \\ 0 - T_{32} - T_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Maple}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$



Het (geïnterpoleerde) discrete temperatuurprofiel voor $n = 3$



Opgave 70 We beschouwen het vorige voorbeeld voor $n = 4$, dus 5×5 punten.

- i. Schrijf de matrix-vergelijking voor de onbekende T_{ij} als $n = 4$. (Nu 9 onbekenden)
- ii. Bereken $\max_{0 \leq i, j \leq n} T_n(i, j)$ en $\min_{0 \leq i, j \leq n} T_n(i, j)$ voor iedere n zonder een matrix-vergelijking op te lossen.
- iii. Als er twee oplossingen T_n^a en T_n^b van (5.14) zijn dan voldoet $S = T_n^a - T_n^b$ aan

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{1}{4}} S(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in R_n \setminus \delta R_n, \\ S(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in \delta R_n. \end{cases} \quad (5.15)$$

Wat is $\max_{0 \leq i, j \leq n} S(i, j)$ en $\min_{0 \leq i, j \leq n} S(i, j)$? Welke oplossingen zijn er voor S ?

6. OPGAVEN

□

Opgave 71 De kromme K in C wordt beschreven als de éénmaal linksom doorlopen rand van de vierhoek met hoekpunten $3, 3+3i, -1-1, -2$. Bereken

$$\int_K \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

□

Opgave 72 We definiëren voor $\alpha \in R$ de functie $f_\alpha : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow C$ door

$$f_\alpha(x + iy) = \log(x^2 + y^2) + \alpha i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- i. Voor welke $\alpha \in R$ is de functie f_α complex differentieerbaar op $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$? (Motiveer)
- ii. Bereken $f'_\alpha(z)$ voor deze α .
- iii. Van welke reële functie $g : R^+ \rightarrow R$ is deze f_α een analytische uitbreiding?

□

Opgave 73 Een kromme γ met beeldverzameling $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 2\}$ wordt éénmaal linksom doorlopen. De functie $f : C \setminus \{1, -3\} \rightarrow C$ is gedefinieerd door

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 3}.$$

- i. Bereken $\{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=p}$ voor $p = 1$ en $p = -3$.
- ii. Bereken met behulp van de Residu-stelling van Cauchy

$$\int_\gamma f(z) dz.$$

- iii. Teken in het complexe vlak de kromme $\gamma : [0, \pi] \rightarrow C$ met $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$.
- iv. Bereken

$$\int_\gamma \frac{1}{1 + z^2} dz.$$

Hint: $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\pi$.

□

Opgave 74 We definiëren voor $(x, y) \in R^2$ de functie

$$f(x + iy) = \sin x (e^y + e^{-y}) + i \cos x (e^y - e^{-y}).$$

- i. Is deze functie analytisch op C ?

ii. Gebruik f om een oplossing van

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0 & \text{voor } 0 < x < \pi \text{ en } -1 < y < 1, \\ u(0, y) = 0 & \text{voor } -1 < y < 1, \\ u(\pi, y) = 0 & \text{voor } -1 < y < 1, \\ u(x, -1) = \sin x & \text{voor } 0 < x < \pi, \\ u(x, 1) = \sin x & \text{voor } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

te berekenen.

iii. Zijn er nog andere oplossingen van dit stelsel? _____

□

Opgave 75

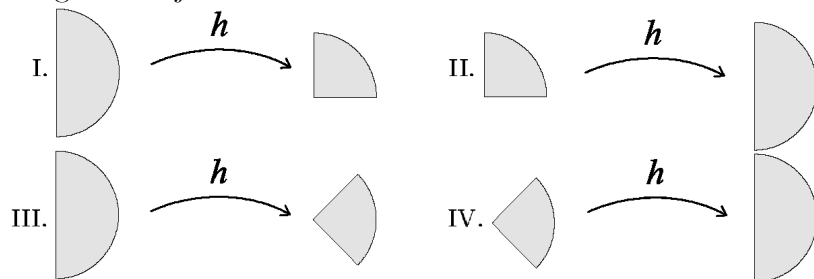
i. Laat zien dat de functie $g : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(x + iy) = \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

analytisch is op $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$.

ii. We definiëren $h : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ door $h(z) = e^{\frac{1}{4}g(z)}$. Geef een eenvoudige uitdrukking voor $h(x)$ als $x \in \mathbb{R}$.

iii. Men kan h gebruiken voor een (conforme) afbeelding tussen een halve en een kwart eenheidscirkel op het complexe vlak. Welke van de volgende voorstellingen is de juiste?



Motiveer uw antwoord.

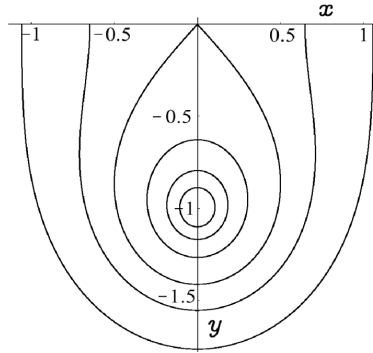
iv. Definieer een conforme afbeelding van de volgende halve cirkelschijf, $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\}$, naar het volgende éénderde deel van een cirkelschijf: $\{z \in \mathbb{C}; \arg z \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi), |z| < 1\}$. _____

□

Opgave 76 We beschouwen een tweedimensionale vloeistofstroming onder invloed van de snelheidspotentiaal Φ die op $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$ wordt gedefinieerd door

$$\Phi(x, y) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\log(x^2 + (y-1)^2) + \log(x^2 + (y+1)^2) \right)$$

Enkele equipotentiaallijnen zijn hier onder getekend:



- i. Bereken het snelheidsveld $\vec{q}(x, y)$ van de vloeistofstroming.
- ii. Laat zien dat Φ harmonisch is op $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\} \setminus \{(0, -1)\}$.
- iii. Wat gebeurt er in $(0, -1)$?
- iv. Aan welke randvoorwaarde voldoet Φ op de rand $y = 0$?

□

Opgave 77

- i. We definiëren $\Gamma_{0,z}$ de kromme die in rechte lijn van 0 naar $z \in C$ loopt. bereken voor $z \in C$

$$f(z) = \int_{\Gamma_{0,z}} w \, dw \quad \text{en} \quad g(z) = \int_{\Gamma_{0,z}} \bar{w} \, dw.$$

- ii. Is f respectievelijk g complex differentieerbaar op C ? Zo ja, wat is de afgeleide?
- iii. We definiëren $\Phi_{0,z}$ de kromme die eerst over de reële as van 0 naar $\operatorname{Re} z$, en vervolgens parallel aan de imaginaire as van $\operatorname{Re} z$ naar z loopt. Zijn de volgende gelijkheden correct?

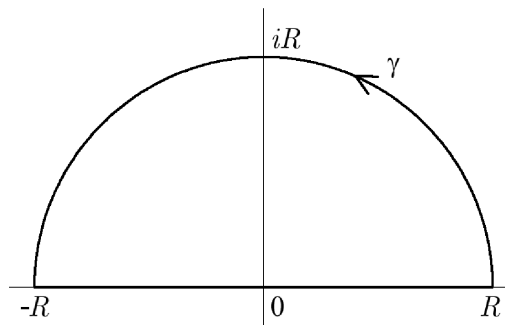
$$i. \quad f(z) = \int_{\Phi_{0,z}} w \, dw \quad \text{ii.} \quad g(z) = \int_{\Phi_{0,z}} \bar{w} \, dw.$$

Motiveer uw antwoord.

□

Opgave 78

- i. Definieer een enkelvoudige gesloten kromme γ die de hier getekende contour in C beschrijft.



ii. Bereken

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4 + 4} dz.$$

Als hulpje is gegeven: $\frac{1}{z^4+4} = \frac{1}{16} \left(\frac{1+i}{z+1+i} + \frac{-1-i}{z-1-i} + \frac{-1+i}{z-1+i} + \frac{1-i}{z+1-i} \right)$.

iii. Stel γ_2 beschrijft het boogdeel. Laat zien dat voor $R \geq 2$ geldt

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4 + 4} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 4}.$$

iv. Bereken met behulp van de vorige twee onderdelen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx. \quad \text{_____}$$

□

Opgave 79

i. Bereken de oplossingen $z \in C$ van $e^z - 1 = 0$.

ii. De krommen γ beschrijft de éénmaal rechtsom doorlopen rand van de driehoek in het complexe vlak met hoekpunten $1+i$, $2-i$ en -4 . Bereken

$$\int_{\gamma} \frac{1}{e^z - 1} dz. \quad \text{_____}$$

□

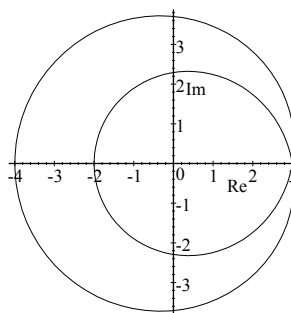
Opgave 80

i. Voor welke $\alpha, \beta \in C$ is de functie $f(x+iy) = \alpha x^2 + xy + \beta y^2$ analytisch op C ?

ii. Voor welke $a, b \in R$ is de functie $h(x, y) = \alpha x^2 + xy + b y^2$ harmonisch op R^2 ? _____

□

Opgave 81 De kromme $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow C$ met $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$ wordt gegeven door $r(t) = 3 + \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ en $\varphi(t) = t$.



i. Bepaal de coëfficiënten a_k zodanig dat voor $z \in C$

$$e^{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k.$$

ii. Bereken $\int_{\gamma} \frac{e^{z+1}}{(z+1)^2} dz.$ _____

□

Opgave 82 We beschouwen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n(n+1)} = 1 + 2z^2 + 4z^6 + 8z^{12} + \dots$

- Bereken de convergentiestraal van deze machtreeks.
- Bepaal het gebied in C waar f analytisch is en motiveer je antwoord
- Bereken de eerste drie coëfficiënten (a_0 , a_1 en a_2) van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zodanig dat geldt

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ voor } |z| < \frac{1}{2}.$$

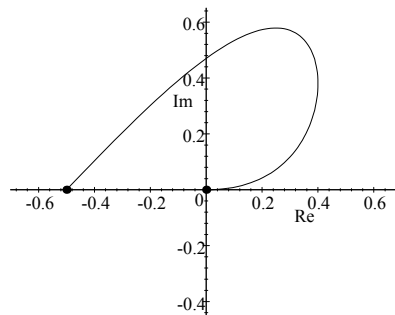
□

Opgave 83

- Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.
- Bepaal het maximale interval (x_0, x_1) in R waar geldt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \text{ voor } x \in (x_0, x_1).$$

- De kromme $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ gedefinieerd door $\gamma(t) = 2t - \frac{5}{2}t^2 + i \sin(\pi t)$ beschrijft de volgende baan:



Gebruik de vorige onderdelen om deze integraal te berekenen:

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

□

Opgave 84 De rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ wordt gedefinieerd door

$$a_n = \begin{cases} -n & \text{als } n \text{ een priemgetal is;} \\ n & \text{als } n \text{ geen priemgetal is.} \end{cases}$$

We beschouwen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z - 2z^2 - 3z^3 + 4z^4 - 5z^5 + 6z^6 - 7z^7 + \dots$

- Bereken de convergentiestraal van deze machtreeks.
- Op welk open gebied van C is dit functievoorschrift van f goed gedefinieerd?

iii. De kromme $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C$ wordt gegeven door $\gamma(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}e^{-it}$. Geef een schets van de kromme met de doorlooprichting.

iv. Bereken met deze γ

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^5} dz.$$

□

Opgave 85 De kromme $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ wordt gedefinieerd door $\gamma(0) = 0$ en $\gamma(t) = te^{i \ln t}$ voor $t > 0$.

- i. Geef een schets van deze kromme.
- ii. Bereken de lengte van deze kromme.
- iii. Bereken $\int_{\gamma} z dz$.

□

Opgave 86 De machtreeksen $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, met $a_n, b_n \in C$, hebben convergentiestraal R_a respectievelijk R_b . Gegeven is dat

$$0 < R_a < R_b < \infty.$$

i. We definiëren $c(\cdot)$ door $c(z) = a(z) + b(z)$ en noemen de convergentiestraal R_c .

Welke bewering is juist?

- 1) $R_c = R_a$,
- 2) $R_c = R_b$,
- 3) $R_c = R_a + R_b$,
- 4) R_c is niet uit deze gegevens te bepalen.

Motiveer uw antwoord.

ii. We definiëren $d(\cdot)$ door $d(z) = a(z) + b(2z)$ en noemen de convergentiestraal R_d .

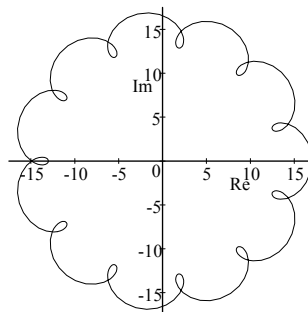
Welke bewering is juist?

- 1) $R_d = R_a$,
- 2) $R_d = \frac{1}{2}R_b$,
- 3) $R_d = R_a + \frac{1}{2}R_b$,
- 4) R_d is niet uit deze gegevens te bepalen.

Motiveer uw antwoord.

□

Opgave 87 Bereken $\int_{\gamma} \frac{z}{1+z^2} dz$ voor de contour $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C$ met $\gamma(t) = 15e^{-it} + 2e^{12it}$:



□

Opgave 88 Daar waar de machtreeks binnen C convergeert geldt voor de functie f dat:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} z^n.$$

- i. Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?
- ii. Voor welke z kan men concluderen dat de afgeleide $f'(z)$ bestaat?
- iii. Bereken $f'(1)$.
- iv. Geef rond 0 een functievoorschrift voor f' zonder sommatie. Geef ook een formule voor f zonder sommatie.

□

Opgave 89 G is een open gebied in C . We definiëren de afbeelding $f : G \rightarrow C$ met $f(z) = e^z$.

- i. Voor welke G is deze f injectief? U mag kiezen uit

<i>a.</i> \mathbb{C} ,	<i>c.</i> $\{z \in \mathbb{C}; 0 - \pi < \operatorname{Re} z < \pi\}$,
<i>b.</i> $\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$,	<i>d.</i> $\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \arg z < \pi\}$.
- ii. Bereken voor uw G een functie f^{inv} zodat $f^{inv} \circ f(z) = z$ voor alle $z \in G$.

Literatuur

- [1] J.M. Aarts, *Complexe Functies (de eerste stappen)*, Epsilon reeks, Utrecht, 1991.
- [2] M.J. Ablowitz & A.S. Fokas, *Complex Variables (Introduction and Applications)*, Cambridge texts in Applied Mathematics, Cambridge, 1997.
- [3] K. Jänich, *Analysis für Physiker und Ingenieure (Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen)*, Springer, Berlin, 1995.
- [4] R.A. Kortram, *De Theorie van Complexe Functies*, Epsilon reeks, Utrecht, 1989.
- [5] H.F. Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations (with complex variables and transform methods)*, heruitgegeven door Dover, New York, 1995.
- [6] H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, heruitgegeven door Dover, New York, 1957.

Index

- $C[a, b]$, 3
- $C^1[a, b]$, 3

- absoluut convergente reeks, 8
- afbeeldingsstelling van Riemann, 62
- analyticiteit van machtreeksen, 23
- analytisch, 20, 52
- argument, 2

- bovengrens
 - kleinste, 9

- Cauchy, 52
- Cauchy-Hadamard
 - formule van, 14
- Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen, 25
- Cauchy-Riemann in poolcoördinaten, 71
- Cauchy-Riemann vergelijkingen, 68
- complement-verzameling, 2
- complex geconjugeerde, 2
- conform, 29, 62
- continu
 - uniform, 6
- continue functie, 5
- contour-integraal, 33
- convergente reeks, 8
- convergentiestraal, 14
- cosinushyperbolicus, 17

- deelrij, 12
- differentieerbaar, 19
- dipool, 72
- Dirichlet-randvoorwaarde, 75
- discreet maximum principe, 76
- discrete Laplace-operator, 76
- divergente reeks, 8
- driehoeksongelijkheid, 2

- enkelvoudig samenhangend, 5
- enkelvoudige kromme, 3
- Euler-nummers, 54
- exponentiële functie, 17

- formule van Cauchy voor de cirkelschijf, 50
- formule van Cauchy-Hadamard, 14
- functie
 - analytische, 20
 - continue, 5
 - differentieerbare, 19
 - harmonische, 55
 - holomorfe, 20
 - uniform continu, 6

- gebied, 5
- geconjugeerde
 - complex, 2
- gegeneraliseerde machtreeks, 46
- gemiddelde-waarde-stelling voor harmonische functies, 60
- gesloten kromme, 4
- gesloten verzameling, 2
- gladde kromme, 3

- harmonisch, 55, 69
- holomorf, 20

- infimum, 9
- integraal over kromme, 33
- integraalstelling van Cauchy, 40

- Jordan-kromme, 4

- kettingregel, 21, 29
- kromme, 3
 - enkelvoudige, 3
 - gesloten, 4
 - gladde, 3
 - Jordan-, 4
 - stuksgewijs gladde, 3

- Laplace-operator, 55
- Laplace-probleem, 61
- Laplace-vergelijking, 61, 75
- Laplaciaan, 55
- lengte, 3
- limes inferior, 10
- limes superior, 10

- limiet
 - uniform, 6
- limiet van een functie, 5
- limiet van een rij, 5
- Liouville, 54
- ln
 - uitbreiding, 37, 38
- Möbius-transformatie, 30, 73
- machtreeks, 13
 - verschoven, 13
- maximum principe, 66
 - discreet, 76
- meetkundige reeks, 13
- modulus, 2

- Neumann-randvoorwaarde, 75

- omgeving van een punt, 2
- omloopgetal, 45
- open verzameling, 2

- paperclip, 4
- parkeergarage, 38
- Poisson integraal formule, 59
- polynoom, 21
- potentiaal, 68
- productregel, 21

- quotiëntkenmerk, 9
- quotientregel, 21

- rand, 2
- rationale functie, 21
- reeks, 8
 - absoluut convergente, 8
 - convergente, 8
 - divergente, 8
- residu, 43
- residuenstelling, 44, 45

- samenhangend, 5
- sinushyperbolicus, 17
- somregel, 21
- stelling van Cauchy-Riemann, 25
- stelling van Liouville, 54
- sterk maximum principe, 66
- stroomfunctie, 70
- stuksgewijs gladde kromme, 3
- supremum, 9

- uitbreiding ln, 37, 38
- uitgebreide wortelkenmerk, 11

- uniform, 6
- uniform continu, 6

- verschoven machtreeks, 13
- verzameling
 - complement van, 2
 - gesloten, 2
 - open, 2
 - rand van, 2

- wortelkenmerk, 9
- wortelkenmerk
 - uitgebreide, 11