



Dag van de Wiskunde 2003

2^{de} en 3^{de} graad

Module 6: **Eerste sessie**

Derive in ons wiskundeonderwijs

Christine Decraemer

DeriveTM 5

The Mathematical Assistant for Your PC

Je kunt Derive het best vergelijken met een uitgebreid rekenoestel. Niet enkel numerieke, maar ook symbolische berekeningen zoals ontbinden in factoren, rekenen met matrices, formulewerk met afgeleiden, limieten, ... zijn mogelijk. Derive is zeer geschikt voor het vinden van de karakteristieken van functies. Ook grafieken kunnen getekend worden en de eigenschappen bestudeerd worden.

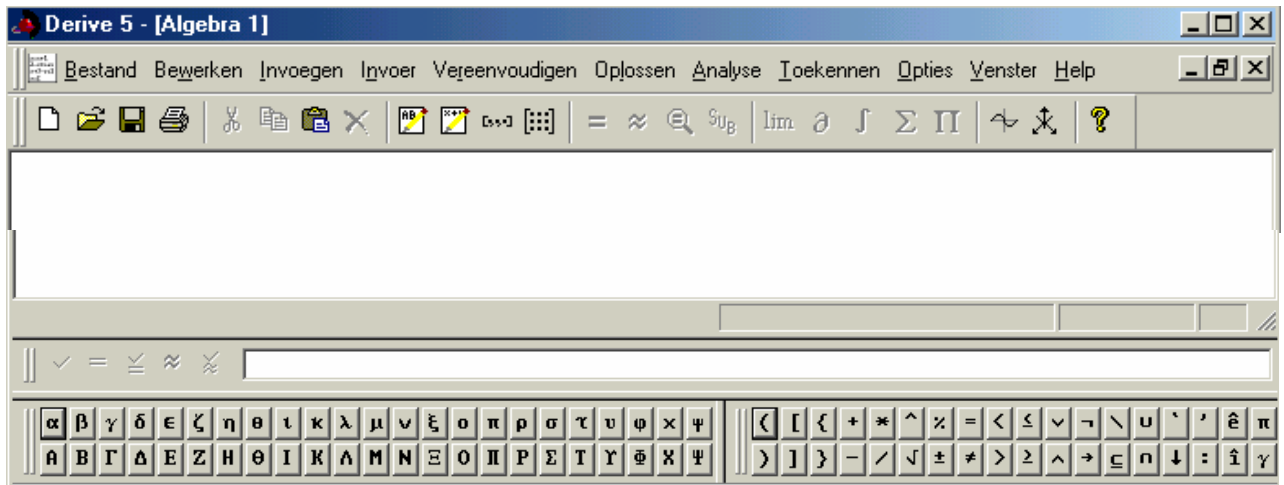
In de eerste sessie behandelen we de volgende onderwerpen:

- Het openingsscherm van DERIVE
- Uitdrukkingen invoeren, vereenvoudigen en verwijderen
- Haakjes uitwerken en ontbinden in factoren
- Werken met matrices
- Oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels
- Grafieken maken met DERIVE
- Tabellen met functiewaarden
- Limieten berekenen, afleiden en integreren met DERIVE



1. Het openingsscherm van DERIVE

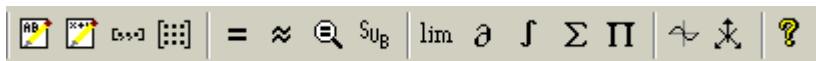
Als je DERIVE opent, zie je het **Algebra Venster**:



Dit scherm bevat:

- een titelbalk;
- een menubalk;
- een werkbalk;
- het Algebra Venster;
- het invoervak;
- de werkbalk met de Griekse en de wiskundige symbolen

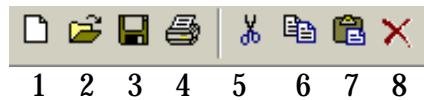
De knoppen in de werkbalk van het Algebra Venster hebben de volgende betekenis:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

- 1 Tekst invoegen
- 2 Uitdrukking invoeren
- 3 Vector invoeren
- 4 Matrix invoeren
- 5 Vereenvoudigen
- 6 Benaderen
- 7 Oplossen
- 8 Variabele substitueren
- 9 Limiet berekenen
- 10 Afgeleide berekenen
- 11 Integraal berekenen
- 12 Sommen berekenen
- 13 Producten berekenen
- 14 2D-grafiekvenster

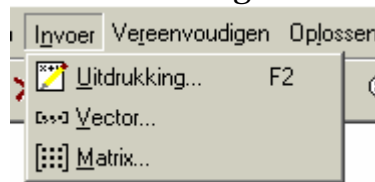
Verder kun je op de bekende Windows manier een nieuw algebrafenster openen, bestaande algebrafensters openen, het algebrafenster opslaan of uitprinten en dergelijke.




- 1 Nieuw
- 2 Open
- 3 Opslaan
- 4 Afdrukken
- 5 Knippen
- 6 Kopiëren
- 7 Plakken
- 8 Verwijder object

2. Uitdrukkingen invoeren, vereenvoudigen en verwijderen.

Je kunt in het algebrafenster allerlei uitdrukkingen invoeren via het invoervak.

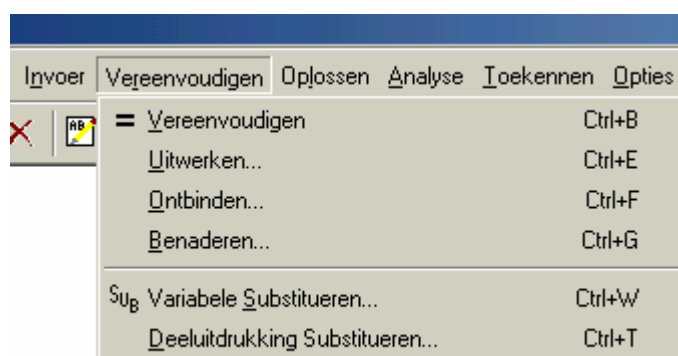



- Kies **Invoer** en vervolgens **Uitdrukking**, of klik in plaats daarvan op het potloodje  op de werkbalk, of nog eenvoudiger: klik even in het invoervak.
- Geef de uitdrukking in. Klikken op OK brengt de uitdrukking in beeld als nummer 1, aangeduid met #1.

Voer bijvoorbeeld de uitdrukking: $x/2 + x/4$ in, en kijk hoe DERIVE de uitdrukking opmaakt.


#1:
$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

Je kunt nu snel een eerste beeld krijgen van de mogelijkheden van DERIVE.



- Kies **Vereenvoudig** en dan opnieuw **Vereenvoudigen**, of klik in plaats daarvan op de knop  op de werkbalk.
- Je ziet dan hoe DERIVE de uitdrukking algebraïsch herschrijft tot #2: $3x/4$. Je ziet ook hoe deze tweede uitdrukking nu is geselecteerd en de eerste niet meer. Als je op een uitdrukking klikt, dan wordt die uitdrukking geselecteerd. Selecteer uitdrukking #1.



- Kies vervolgens: **Vereenvoudigen** en dan **Benaderen**, of gebruik de knop  op de werkbalk. Uitdrukking #1 wordt nu #3: 0.75x.
- Selecteer weer uitdrukking #1.
- Met **Vereenvoudigen** en dan **Variabele Substitueren** (of met de knop SUB op de werkbalk) kun je in uitdrukking #1 bijvoorbeeld de variabele x vervangen door $a + 2$, of door een andere uitdrukking. Met **OK** krijg je uitdrukking #4.

Door een uitdrukking te selecteren en op de toets **Delete** op het toetsenbord van je computer te drukken, of met de knop , kun je elke uitdrukking en zelfs een hele serie uitdrukkingen tegelijk verwijderen.

Denk er wel om dat bij het invoeren van uitdrukkingen soms (net als op de grafische rekenmachine) haakjes moeten worden toegevoegd.

Fouten bij het invoeren leveren de melding: **Syntaxfout** op.

Uitdrukkingen die geselecteerd zijn in het algebravenster kan je inplakken in het invoervak:

F3: om een uitdrukking te plakken

F4: om een uitdrukking tussen haakjes te plaatsen

Voor wiskundige symbolen kan je de tekens in de werkbalk of de volgende Ctrl-combinaties gebruiken:

Ctrl key	intoetsen	Betekenis
Ctrl + P	pi	π
Ctrl + E	#e	getal van Euler e
Ctrl + I	#i	imaginaire eenheid i
Ctrl + Q	sqrt	vierkantswortel
Ctrl + O	deg	Radialen per graad ($\pi/180$)
Ctrl + 0	inf	oneindig ∞
Ctrl + <	< =	kleiner dan of gelijk aan
Ctrl + >	> =	groter dan of gelijk aan
Ctrl + =	/ =	niet gelijk aan
Ctrl + +	+ -	plus/min \pm

De goniometrische functies

$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$ $\cot(x)$ $\csc(x)$ $\sec(x)$

De cyclometrische functies

$\text{asin}(x)$ $\text{acos}(x)$ $\text{atan}(x)$ $\text{asec}(x)$

De exponentiële en logaritmische functies

$\exp(x)$ of $\langle \text{ctrl} + e \rangle ^x$ voor e^x
 $\ln(x)$ voor de natuurlijke logaritme
 $\log(x,a)$ voor $^a \log x$



Let op:

In DERIVE berekent $\log(x)$ eveneens de natuurlijke logaritme van het getal x .

Functies op complexe getallen

$abs(z)$	de modulus van z (in het algebra-velde verschijnt $ z $)
$phase(z)$	het argument van z (resultaat tusschen $-\pi$ en π)
$re(z)$	het reële gedeelte van het getal z
$im(z)$	het imaginaire gedeelte van z
$conj(z)$	het complex toegevoegde getal van z

Tellen

$x!$	
$perm(n,p)$	aantal mogelijke variaties van p uit n
$comb(n,p)$	aantal mogelijke combinaties van p uit n

Uiteraard zijn er in Derive heel wat meer functies. Hiervoor verwijs ik naar de handleiding, of via de menubalk, bij *Help, Index*.

OEFENINGEN: Typ en vereenvoudig:

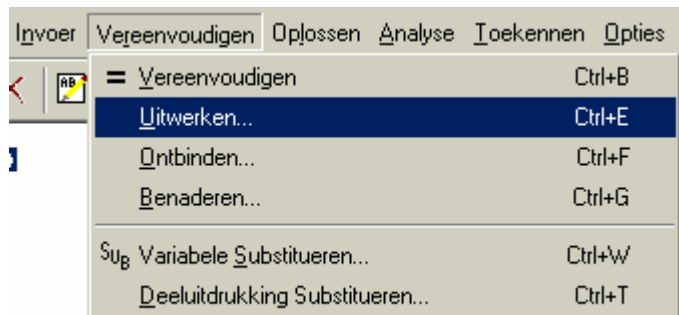
1) $\frac{1}{4} - \frac{5}{7} + \frac{6}{11}$	6) $(1+2i)(3+i)$	11) $\log 1000$
2) $\sqrt{756-131}$	7) $\frac{2+i}{i+1}$	12) $\log e$
3) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	8) $\infty + \infty + 5$	13) $\cos(\frac{17p}{6})$
4) $\sqrt{\frac{1}{2}}$	9) $\infty - \infty$	14) $\sin(-30^\circ)$
5) $\sqrt{-1}$	10) $\ln 1$	15) $\arctan(-1)$

3. Haakjes uitwerken en ontbinden in factoren

DERIVE kan allerlei algebraïsche bewerkingen voor je uitvoeren.

Voer bijvoorbeeld de volgende uitdrukking in:

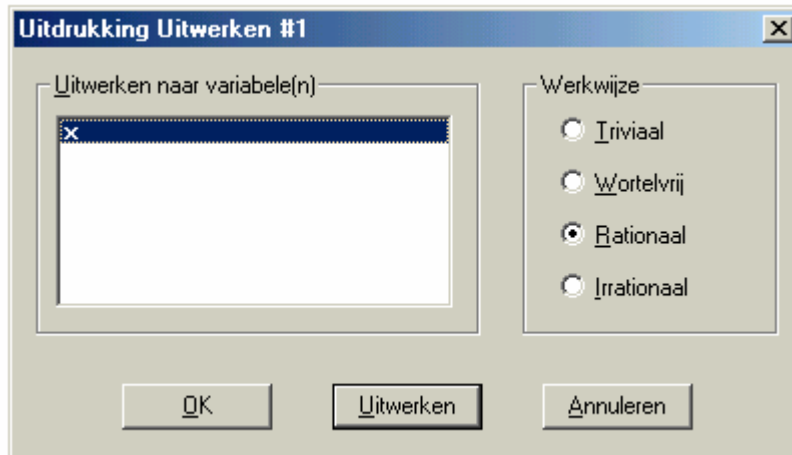
#1: $x(x + 4)(x + 6)$





- Om de haakjes uit te werken selecteer je deze uitdrukking en kies je in het menu **Vereenvoudigen** voor **Uitwerken**.

Je krijgt dan dit dialoogvenster te zien:



- Kijk nog even of **Rationaal** is ingesteld en of de juiste variabele is gekozen.
- Klik vervolgens op **Uitwerken** en je ziet een tweede uitdrukking in het algebra venster verschijnen; de haakjes zijn uitgewerkt.

#2: $x^3 + 10x^2 + 24x$

- Op precies dezelfde wijze kun je met **Vereenvoudigen** en dan **Ontbinden** de uitdrukking #2 weer in factoren ontbinden. Je krijgt een vergelijkbaar dialoogscherf en gebruikt daarbinnen dezelfde instellingen.

Overigens kun je dergelijke bewerkingen ook uitvoeren bij uitdrukkingen als #4: $x(x + p)(x + q)$.

Let dan wel op het kiezen van de juiste variabele (in dit geval de x). Kijk maar eens wat er gebeurt als je p als variabele kiest.

Maak nu het algebrafenster schoon en voer de volgende uitdrukking in:

#1: $x^2 - 2$

- Ook een dergelijke uitdrukking kan in factoren worden ontbonden. Alleen kun je nu niet werken met de instelling Rationaal. Nu werk je met de instelling **Irrationaal**. Er verschijnen dan ook wortels in de ontbinding.
- $x^2 + 2$ kan je ontbinden in complexe factoren met de instelling **Complex**.

Toepassingen:

a) Splitsen in partieelbreuken: met Vereenvoudigen – Uitwerken

Voorbeelden:

1)

$$\frac{2x(x+5)}{x^4-1} \text{ geeft als resultaat } \frac{-5x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}$$



2)

$$\frac{1}{x^2 - 3}$$

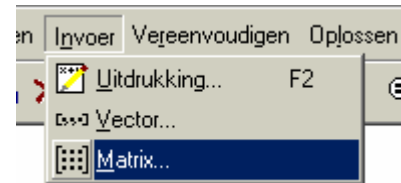
- Neem nu eerst **Vereenvoudigen – Uitwerken – Rationaal**
- Dan **Vereenvoudigen – Uitwerken – Irrationaal**. Vergelijk het resultaat.

b) *Gelijknamig maken* van rationale functies: met **Vereenvoudigen – Uitwerken (Rationaal)**.

Voorbeeld: pas dit toe op de vorige uitdrukking.

4. Werken met matrices

Matrices kan je invoeren via **Invoer – matrix**



Je krijgt dan dit dialoogvenster te zien:



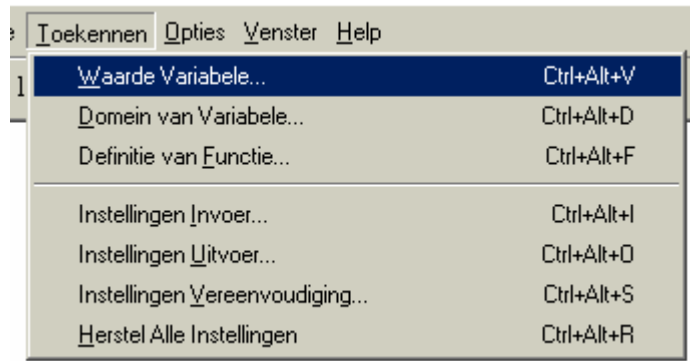
Geef het aantal rijen en kolommen in. Vul de elementen in en ga naar een ander veld met de TAB-toets. Beëindig door de OK knop in te drukken

Geef dan de volgende matrix in: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

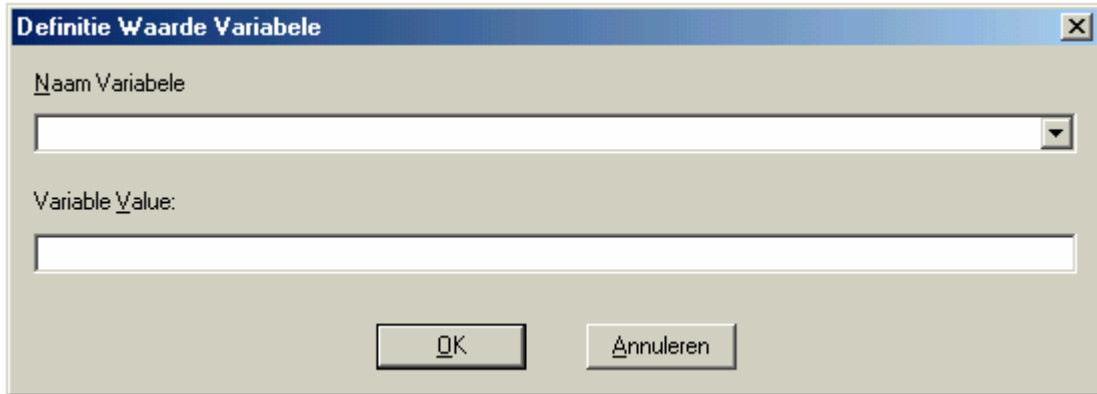
Een andere mogelijkheid gebruikt het icoon 

Geef nu eerst de volgende matrix in en stel die dan gelijk aan A . $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

- Selecteer daarvoor de matrix en kies in het menu **Toekennen** voor **Waarde Variabele**.



Je krijgt dan dit dialogvenster te zien:



Geef bij 'Naam Variabele' de naam van de matrix in, A dus.
Geef bij 'Variable Value' de matrix zelf in met behulp van F3.

Naast het optellen, vermenigvuldigen met een reëel getal en vermenigvuldigen van matrices, kan je ook nog andere bewerkingen uitvoeren. Enkele voorbeelden zijn:

a `	de getransponeerde matrix (` met Ctrl + T)
det (a)	de determinant
(matrix)^2	het kwadraat van een vierkante matrix
(matrix)^-1	de inverse van een vierkante matrix
row_reduce(matrix)	de rij-canonieke matrix
identity_matrix(3)	de eenheidsmatrix 3 x 3

Andere bewerkingen vind je bij Help.

Een aantal elementaire bewerkingen met matrices kun je uitvoeren met de volgende matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



5. Oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels.

Enkele voorbeelden. De werkwijze is heel eenvoudig.

#1: $x^3 - 4 \cdot x = 0$

#2: `SOLVE(x3 - 4·x = 0, x, Real)`

#3: $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 0$

#4: $x^3 - 4 \cdot x > 0$

#5: `SOLVE(x3 - 4·x > 0, x, Real)`

#6: $-2 < x < 0 \vee x > 2$

#7: `SOLVE([4·x + 10·y = 5, -2·x + 3·y = 2.3], [x, y])`

#8: $x = -\frac{1}{4} \wedge y = \frac{3}{5}$


6. Grafieken maken met DERIVE

Met DERIVE kun je net als met je grafische rekenmachine grafieken maken.

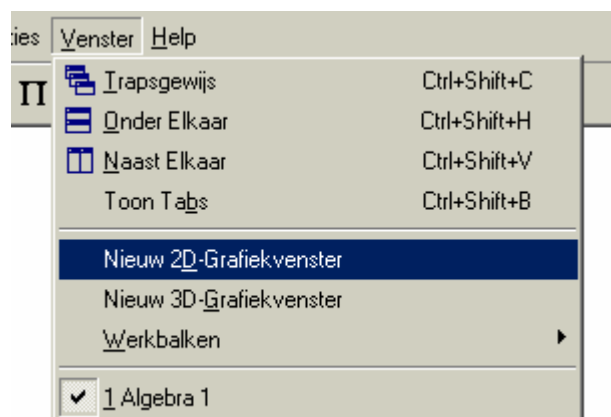
Maak eerst het algebrafenster volledig schoon en voer de volgende functie in:

#1: $f(x) = x^3 - 4x$


Op de werkbalk vind je uiterst rechts twee knoppen die je naar het grafiekvenster

brenge. De linker daarvan is een knop met een klein sinusgrafiekje , daarmee ga je naar het tweedimensionale grafiekvenster (2D plot).

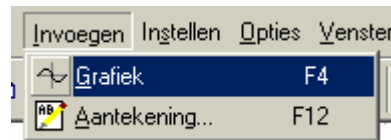
Je kunt ook werken met: **Venster** en **Nieuw 2D-Grafiekvenster**.



Als je in dat scherm terecht bent gekomen, krijg je nog geen grafiek in beeld. Dat gebeurt

pas als je in het 2D-grafiekvenster opnieuw op de knop met het sinusgrafiekje  hebt gedrukt. Je ziet dan de grafiek verschijnen.

Ook nu kun je in plaats van de genoemde knop werken met de menubalk: je drukt op **Invoegen – Grafiek**.

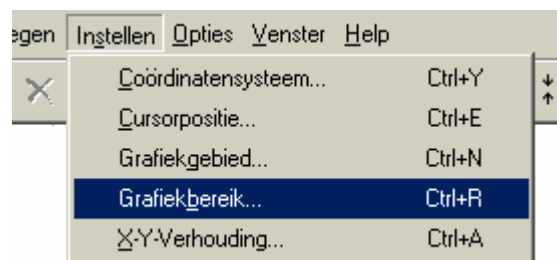


Bemerk:

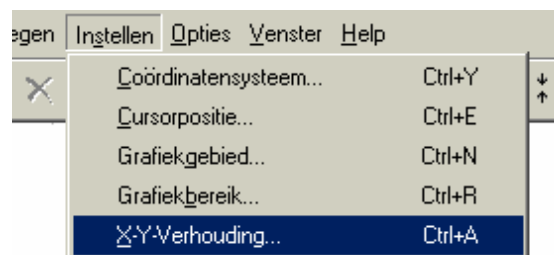
- Je kunt het Algebra en Grafiekvenster naast elkaar plaatsen met



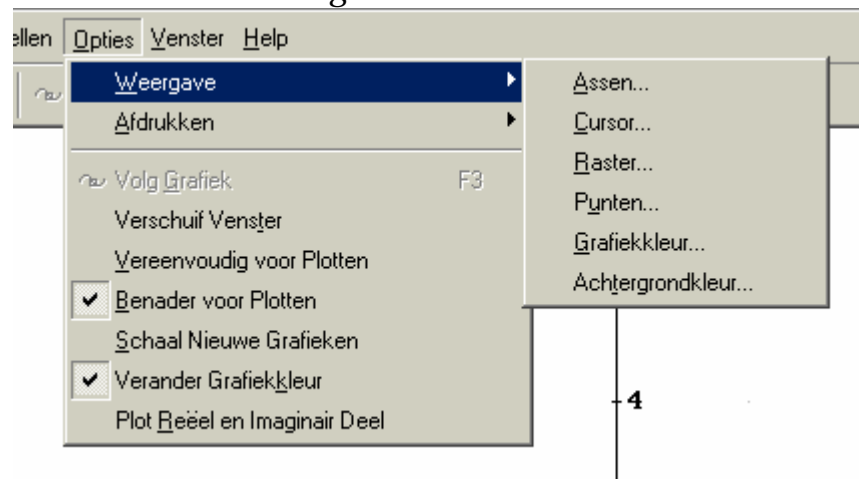
- Je kunt de grafiekgrenzen manueel instellen met



- Je kunt de eenheden op X- en Y-as even groot maken met

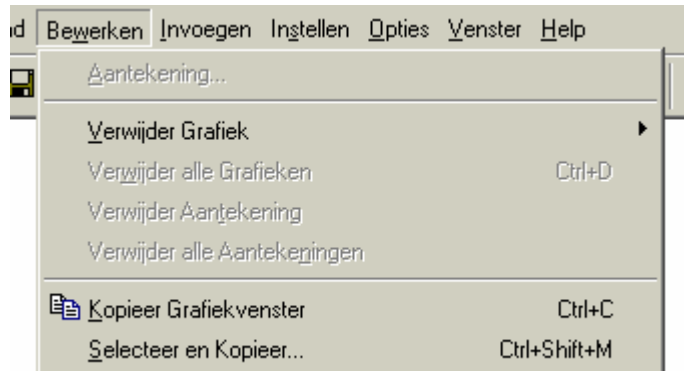


- Je kunt het uitzicht van de grafiek veranderen met

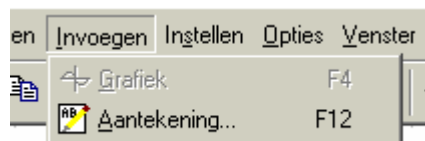




- Je kunt het volledig grafische venster kopiëren met **Bewerken – Kopieer Grafiekvenster** en geselecteerde delen met **Bewerken – Selecteer en Kopieer**. Je kunt dit dan in andere documenten invoeren met de Paste knop.



- Je kunt tekst toevoegen bij de grafiek met **Invoegen – Aantekening** of met de knop



Speciaal geval: Een functie met **een meervoudig voorschrift** geef je in met behulp van de IF – functie.

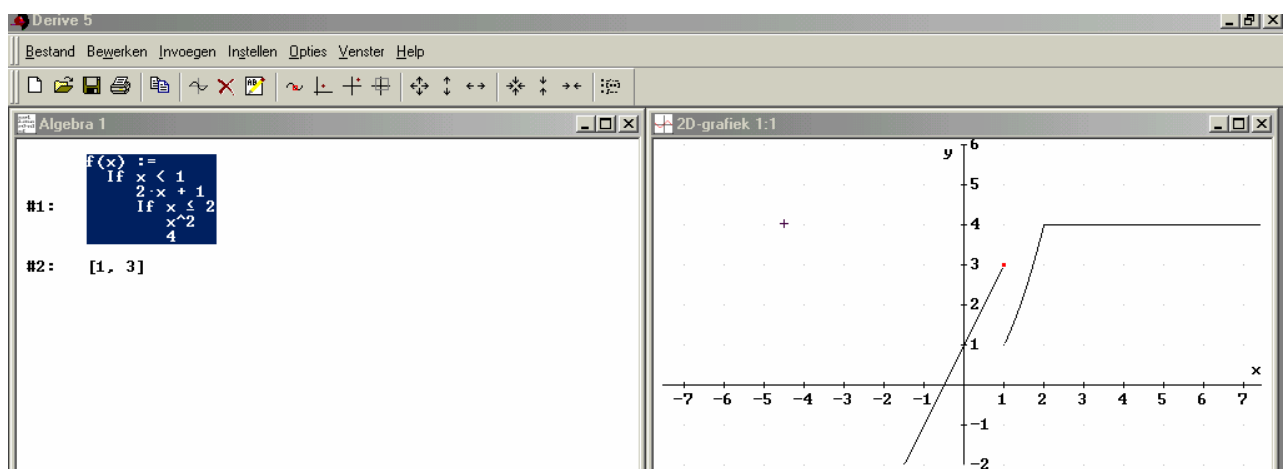
Voorbeeld:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{voor } x < 1 \\ x^2 & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{voor } 4 < x \end{cases}$$

Geef de functie als volgt in $f(x) := \text{IF}(x < 1, 2 \cdot x + 1, \text{IF}(x \leq 2, x^2, 4))$.

Kijk naar de opmaak bij de weergave in DERIVE.

Je kunt bovendien het punt (1,3) in het rood laten plotten



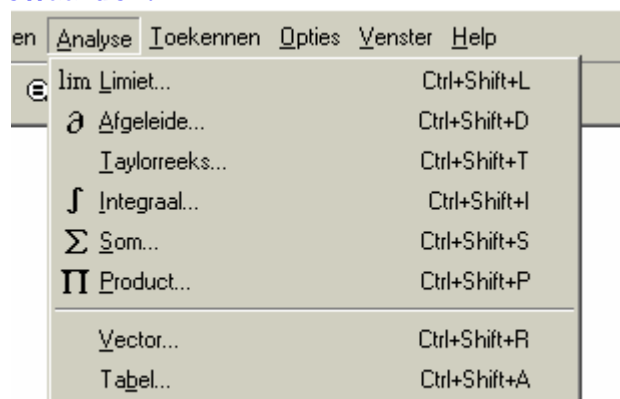


De knoppen in de werkbalk van het Grafiek Venster hebben de volgende betekenis:



- 1 Kopieer Grafiekvenster
- 2 Uitdrukking plotten
- 3 Verwijder laatste grafiek
- 4 Aantekening invoegen
- 5 Grafiek volgen: deze knop laat toe de cursor te verplaatsen op de grafiek
- 6 Centreren op cursor
- 7 Centreren op oorsprong
- 8 Bereik instellen met box
- 9 Uitzoomen
- 10 Verticaal uitzoomen
- 11 Horizontaal uitzoomen
- 12 Inzoomen
- 13 Verticaal inzoomen
- 14 Horizontaal inzoomen
- 15 Terug naar Algebra Venster

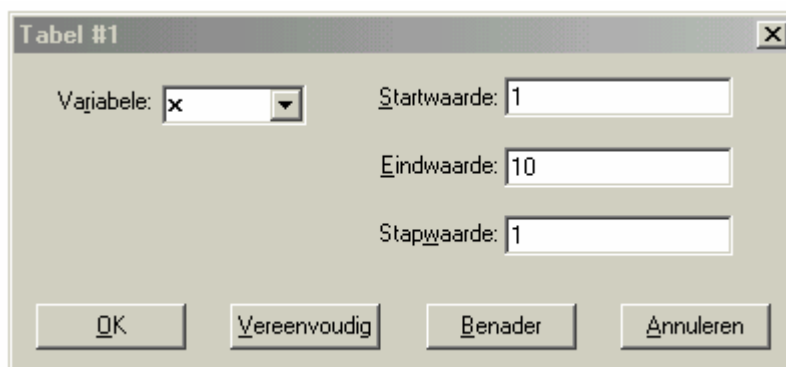
7. Tabellen met functiewaarden.



Wis de vorige gegevens. Definieer de volgende functie:

$$f(x) = \frac{3x}{x-4}$$

Kies in het menu **Analyse - Tabel**. Je krijgt dan dit dialoogvenster te zien:





Geef dan de waarden in en je bekomt de tabel.

#1: $f(x) := \frac{3 \cdot x}{x - 4}$

#2: $\text{TABLE} \left(f(x) := \frac{3 \cdot x}{x - 4}, x, 1, 10, 1 \right)$

#3:

1	-1
2	-3
3	-9
4	$\pm\infty$
5	15
6	9
7	7
8	6
9	$\frac{27}{5}$
10	5

8. Limieten berekenen, afleiden en integreren met DERIVE


8.1 Limieten

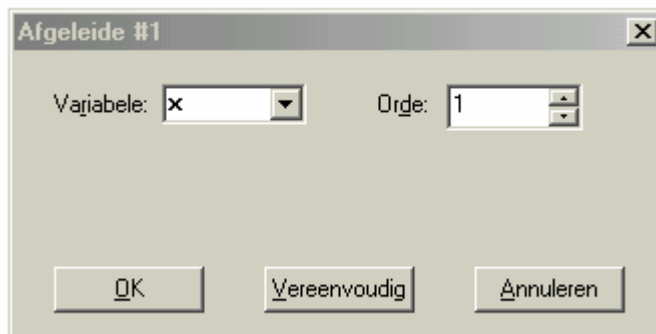
Wis de vorige gegevens. Definieer de volgende functie:

$$f(x) := \frac{3x}{x-4}$$

Met **Analyse – Limiet** of icoon  kunnen we van $f(x)$ de limieten berekenen in 1, $+\infty$, $-\infty$, alsook de linker- en de rechterlimiet in 4.

8.2 Afgeleiden

Met **Analyse – Afgeleide** of icoon  kunnen we van de reeds gedefinieerde functie $f(x)$ de afgeleide bepalen. Je bepaalt zelf de orde van de afgeleide.



Afgeleide #1

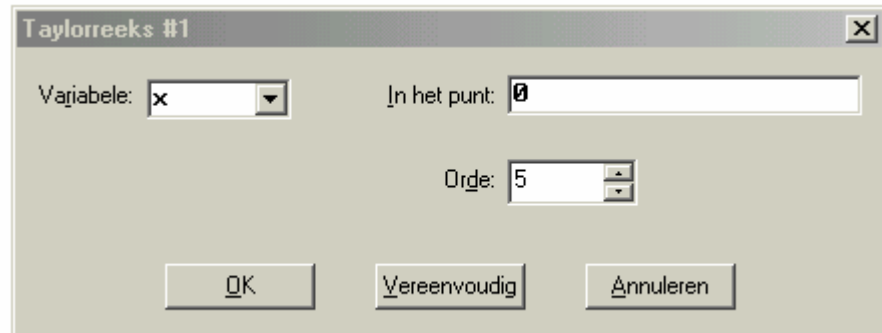
Variabele: Orde:



8.3 Taylorreeksen

Met **Analyse – Taylorreeks** bekom je na het bepalen van de veranderlijke, het punt en de graad, een Taylorbenadering van de gegeven functie.

Voorbeeld: de Taylor ontwikkeling van e^x in het punt 0, van de 5^{de} orde
Je krijgt dan dit dialoogvenster te zien:




#1: e^x

#2: `TAYLOR(e^x , x, 0, 5)`

#3:


$$\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

8.4 Onbepaalde integraal


Met **Analyse – Integraal** of icoon  bekom je na het bepalen van de integrand, de veranderlijke en de integratieconstante, en met **Vereenvoudig** de onbepaalde integraal van de gegeven functie.

Voorbeeld: $\int \frac{3x}{x-4} dx$

8.5 Bepaalde integraal

Met **Analyse – Integraal** of icoon  bekom je na het bepalen van de integrand, de veranderlijke, het soort integraal (bepaalde) en de integratiegrenzen, met **Vereenvoudig** de bepaalde integraal van de gegeven functie.

Voorbeeld: $\int_1^2 \frac{3x}{x-4} dx$

Met het icoon  krijg je een benaderende waarde.