

# DOORBUIGING VAN BETONCONSTRUCTIES

## 1. De buigstijfheid $EI$

1.1 Inleiding

1.2 De relatie tussen moment en kromming:  $EI$

1.3 Tension Stiffening

1.4 M- $\kappa$  diagrammen voor de UGT en de BGT

1.4.1 Berekening van het M- $\kappa$  diagram voor de BGT

## 2. Eisen m.b.t. de doorbuiging

## 3. Berekening en toetsing van de doorbuiging

3.1 Berekening van de doorbuiging op basis van  $EI$  of  $\kappa$ ?

3.2 "Methoden" voor de berekening van de doorbuiging

(1) Algemene methode

(2) Methode van de equivalente buigstijfheid

(3) GTB-ontwerp- en toetsingsgrafieken

## 4. Opgaven

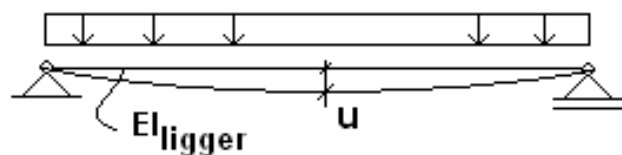
## Literatuur

- ~ CB2, hoofdstukken 16.1 en 2
- ~ CB4, hoofdstukken 1.3 en 1.5 t/m 1.5.4
  
- ~ GTB-ontwerp-en toetsingsgrafieken 13.2
  
- ~ NEN6720 hoofdstukken 4.2 en 8.6
- ~ NEN6702 hoofdstukken 10.1 t/m 10.5

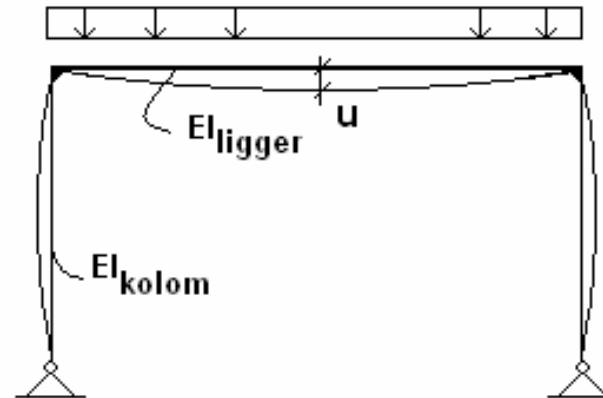
# 1 De buigstijfheid EI en het M-κ diagram

## 1.1 Inleiding

Er zijn twee redenen waarom we de buigstijfheid EI van gewapend beton willen weten.



SB- constructie



SO-constructie

Vraag (1): Hoe groot is  $EI_{\text{beton}}$  voor de sterkteberekening?

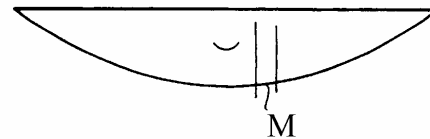
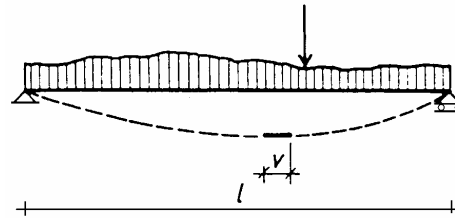
Vraag (2): Hoe groot is  $EI_{\text{beton}}$  voor de vervormingsberekening?

Vraag (3): Welke eisen worden aan de doorbuiging gesteld?

Vraag (4): Hoe berekenen we de doorbuiging?

## 1.2 De relatie tussen moment en kromming: afleiding EI

Stel een lineair materiaal gedrag:



$$(h - x) : \Delta v \approx \rho : v$$

$$\frac{(h - x)}{\rho} \stackrel{(1)}{\approx} \frac{\Delta v}{v} = \varepsilon$$

rek in de onderste vezel

$$\text{met } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

wet van Hooke

$$\text{met } \sigma = \frac{M (h - x)}{I}$$

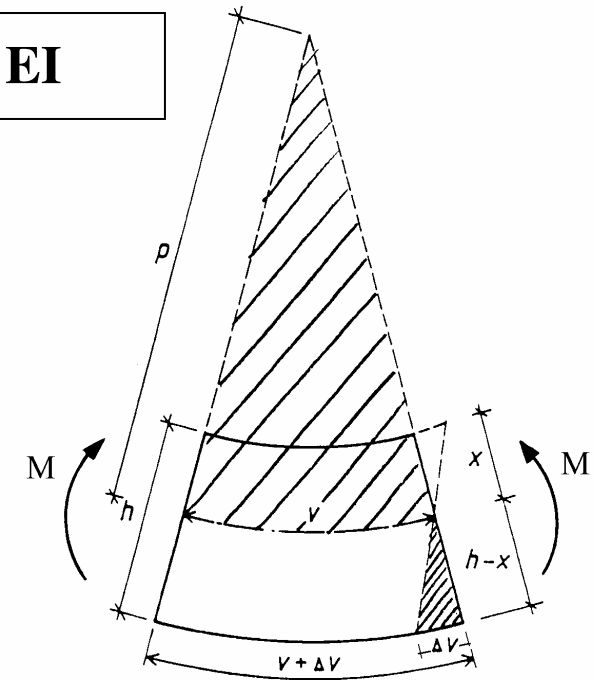
spanning in de  
onderste vezel

$$\frac{(h - x)}{\rho} \approx \frac{M (h - x)}{EI}$$

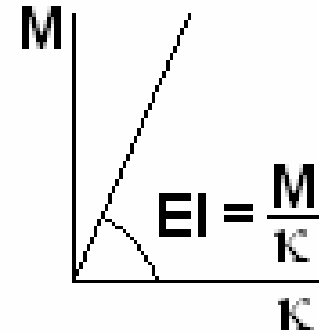
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$\kappa$  = kromming

$$EI = \frac{M}{\kappa}$$



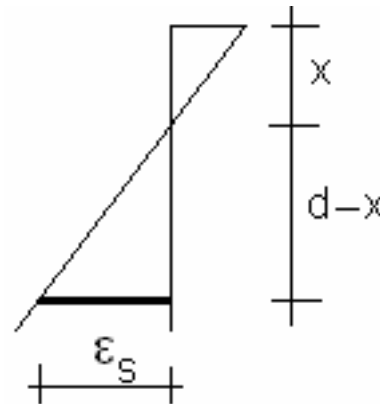
Voor een constante E geeft dit een lineair verband tussen moment en kromming



(1) Voor gescheurd beton in bezwijkstadium geldt dan:

$$\frac{(d - x)}{\rho} \approx \epsilon_s$$

$$\frac{1}{\rho} = \kappa \approx \frac{\epsilon_s}{d - x}$$



In de Basis cursus is vastgesteld dat de EI van gewapend beton van veel variabelen afhankelijk is.

## 1.3 Tension stiffening

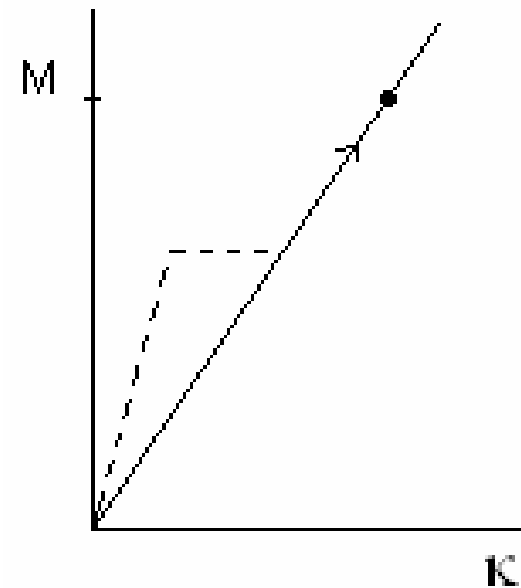
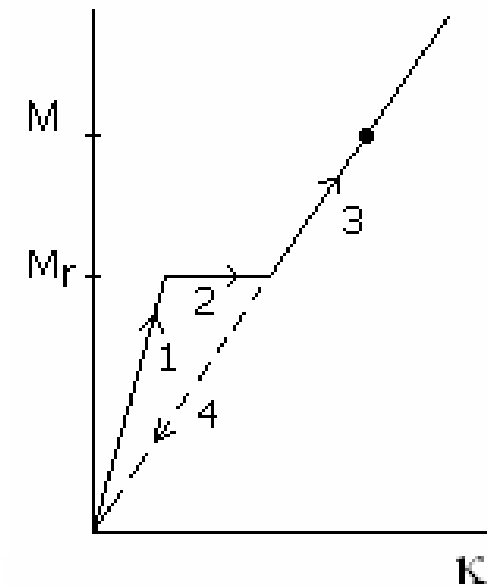
**Beschouw een doorsnede van gewapend beton die scheurt**

Opvoeren van de belasting tot een moment  $M$  verloopt volgens de takken 1, 2 en 3

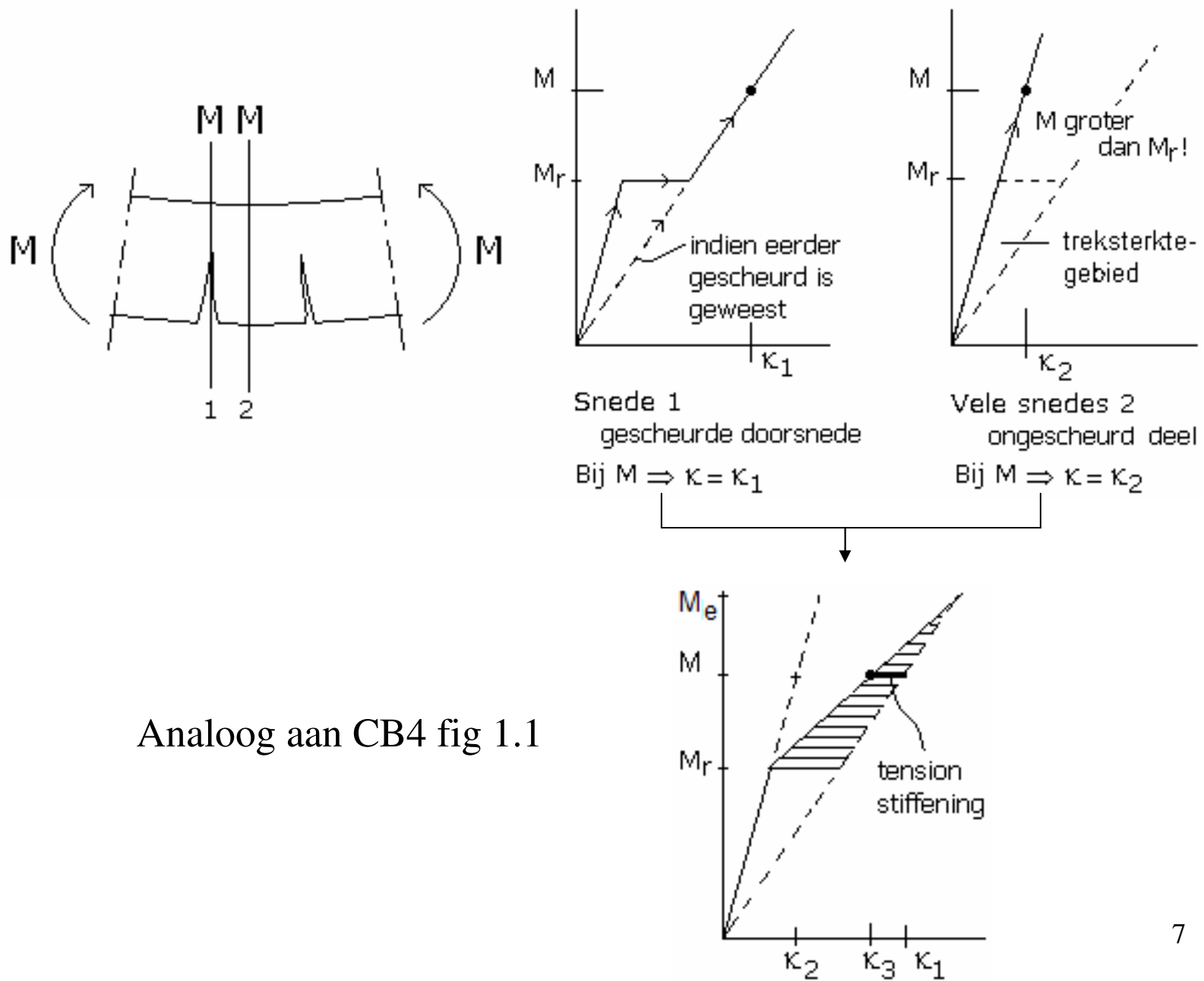
Weghalen van de belasting verloopt volgens 4

Een opnieuw aangebrachte belasting verloopt voor de gescheurde doorsnede volgens de "gescheurde" tak.

Indien elke doorsnede van de staaf gescheurd zou zijn, zou met nevenstaand  $M$ - $\kappa$  diagram gerekend moeten worden!



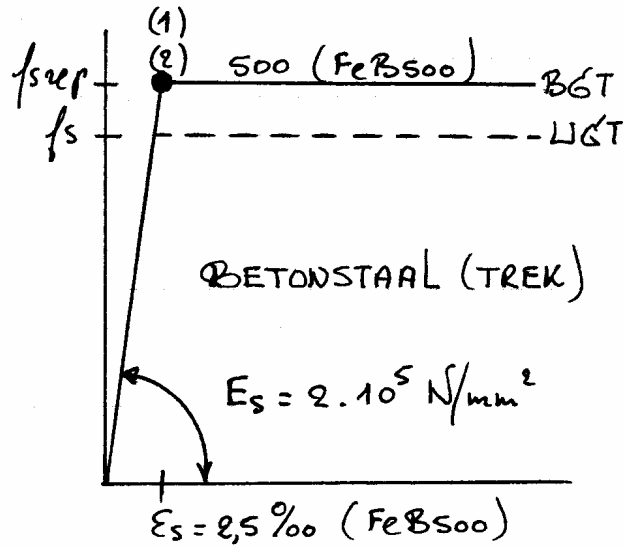
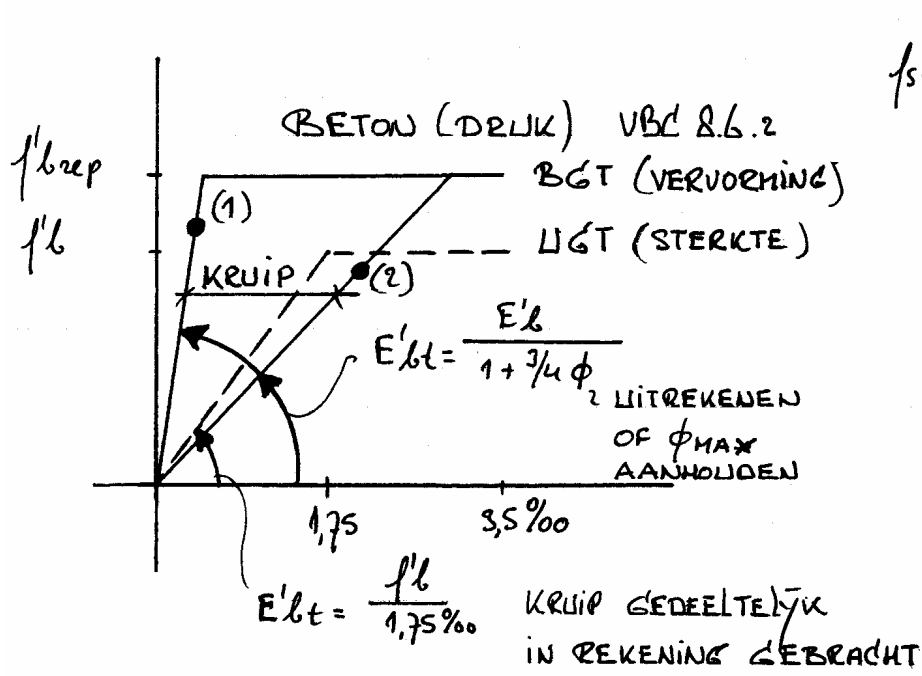
Echter in een op buiging belaste staaf zijn niet alle doorsneden gescheurd.



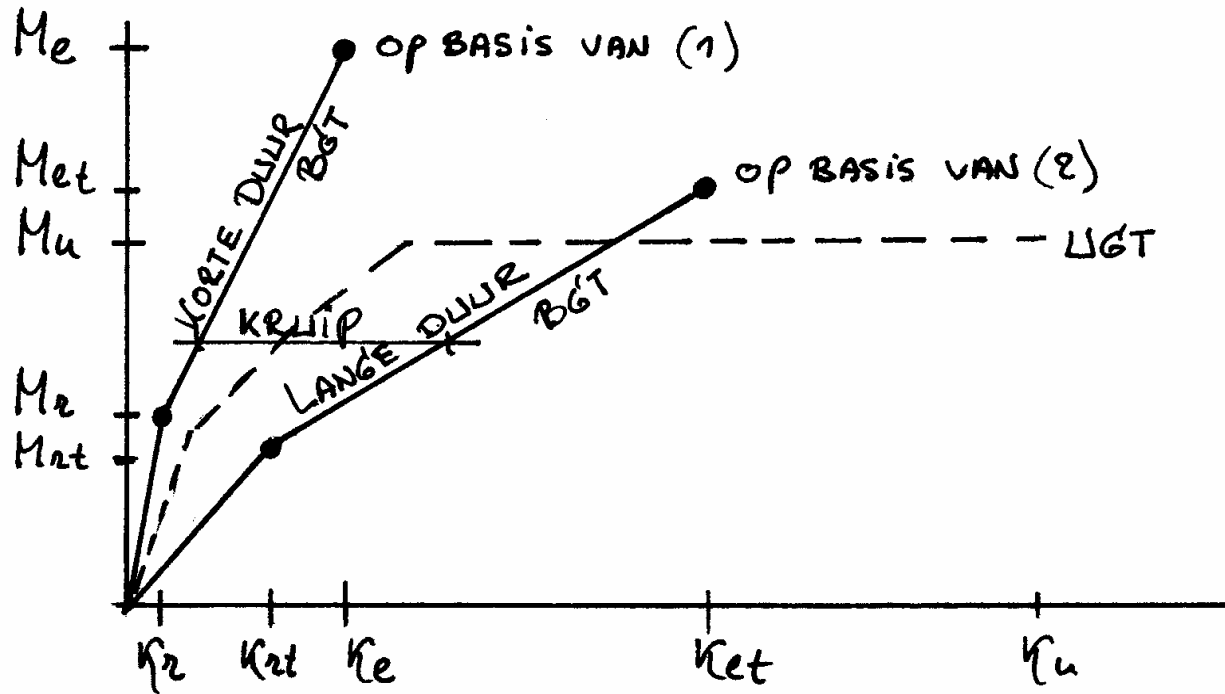
Analoog aan CB4 fig 1.1

# 1.4 M-κ diagrammen voor de UGT en de BGT

Materiaaleigenschappen van beton en betonstaal



Op basis hiervan zijn M- $\kappa$  diagrammen te berekenen voor de BGT en de UGT



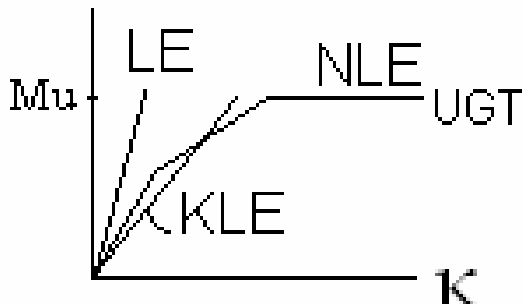
$M_e$  en  $M_{et}$  zijn groter dan  $M_u$ ! Vreemd?

**UGT: Uiterste grenstoestand VBC 7.2** (géén tentamenstof).

Voor de krachtsverdeling wordt een M- $\kappa$  diagram gebruikt waarin kruip deels in rekening is gebracht.

NLE en KLE: of M- $\kappa$  diagram zelf berekenen (zie CB4-1.1 t/m 1.4)  
of M- $\kappa$  diagram benaderen  $\rightarrow$  VBC tabel 15

LE: geen M- $\kappa$  diagram benodigd (rekenen me  $EI_{\text{ongescheurd}}$ )  
alleen 1<sup>e</sup> orde berekeningen



**BGT: Bruikbaarheidsgrenstoestand VBC 8.6**

Voor de doorbuigingsberekening gebruiken we een M- $\kappa$  diagram met en zonder kruip.

Algemene methode:

M- $\kappa$  diagram zelf berekenen

Methode equivalente buigstijfheid:

M- $\kappa$  diagram benaderd dmv tabel 35

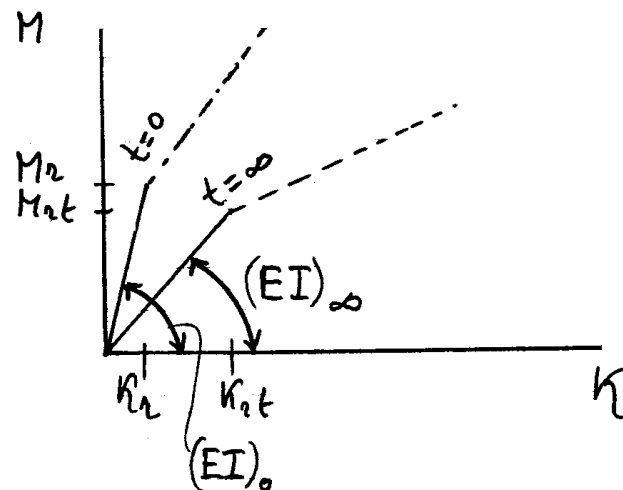
## 1.4.1 Berekening van het M-k diagrammen voor de BGT

ALGEMENE METHODE VBC 8.6.2

geen tentamenstof, je moet er wel mee kunnen werken!

WERKWIJZE : BEREKENEN ~  $EI_{\text{ONGESCHEUWD}}$  EN  $M_r \Rightarrow \psi_r$  VOOR  $t=0$   
~  $EI_{\text{ONGESCHEUWD}}$  EN  $M_{at} \Rightarrow \psi_{at}$  VOOR  $t=\infty$   
~  $M_e$  EN  $\psi_e$  VOOR  $t=0$   
~  $M_{et}$  EN  $\psi_{et}$  VOOR  $t=\infty$

- BEREKENING VAN  $EI_{\text{ONGESCHEUWD}}$  :  $(EI)_0$  EN  $(EI)_\infty$



$$t=0 \sim \left. \begin{array}{l} E'_{b0} = E'_l \text{ VBC TABEL} \\ \sim I = k_I \times \frac{1}{12} b h^3 \end{array} \right\} \Rightarrow (EI)_0$$

$$\sim M_r = k_w \times W(1,4 f_{br} + \sigma'_{bm}) \text{ VBC 8.6.2}$$

$$\text{VBC 6.1.2.}^2 (1,6-h) f_{bm} \neq f_{bm}$$

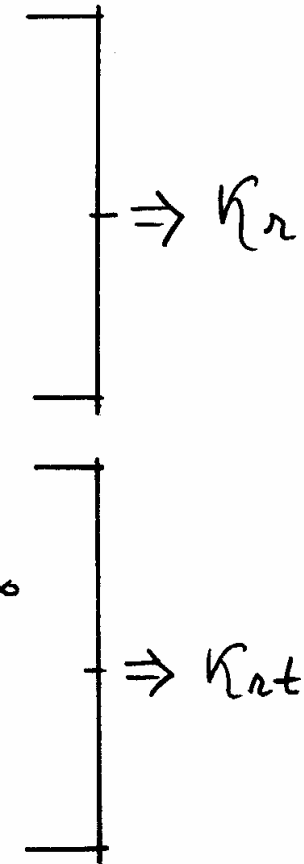
zie Basiscursus

$$t=\infty \sim E'_{b\infty} = \frac{E'_l}{1 + \frac{3}{2} \phi} \text{ VBC 8.6.2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{LITREKENEN OF } \phi_{\text{MAX}} \text{ AANHOUDEN} \end{array} \right\} \Rightarrow (EI)_{\infty}$$

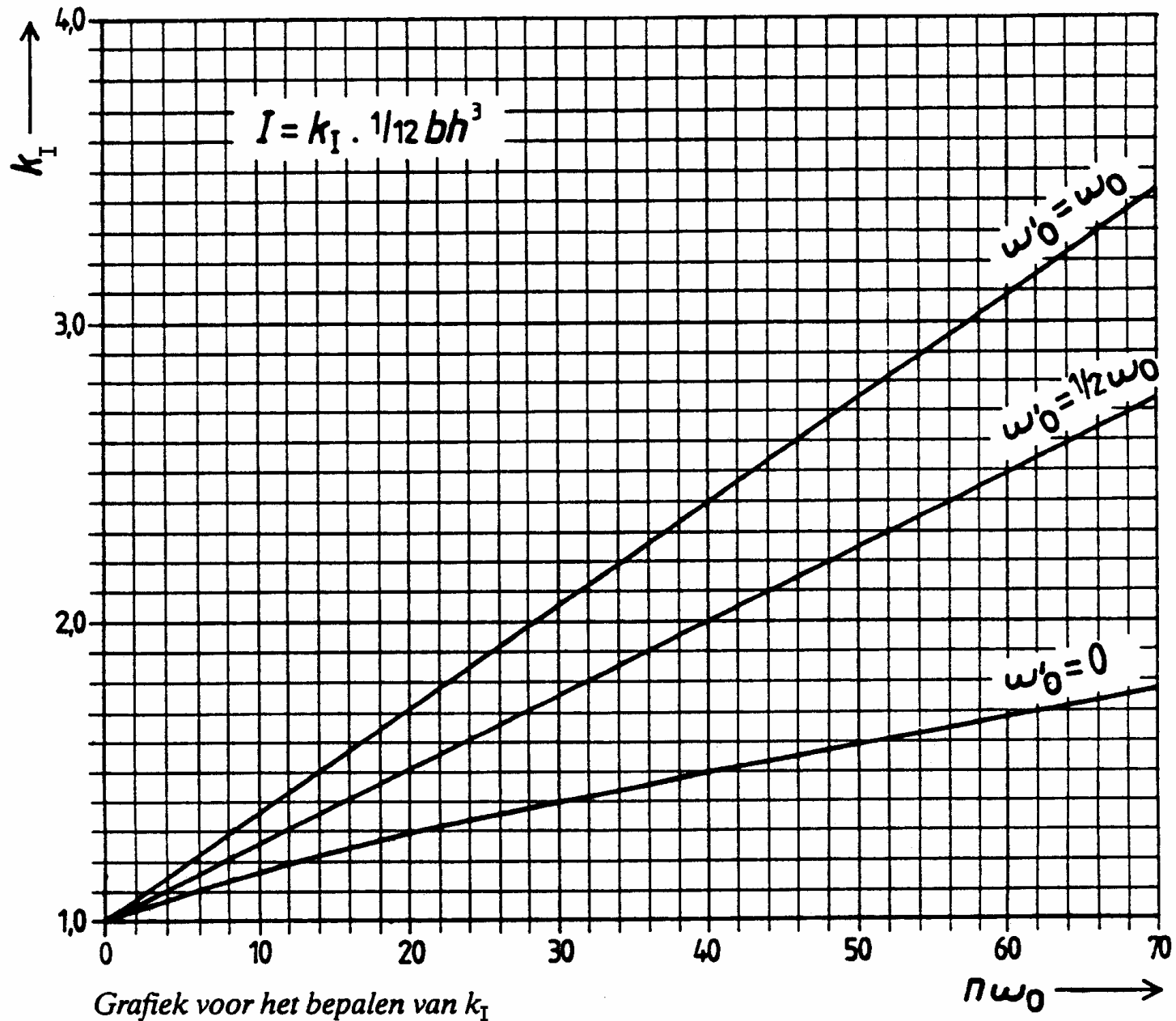
$$\sim I = k_I \times \frac{1}{12} b h^3$$

$$\sim M_{nt} = k_w \times W(1,2 f_{br} + \sigma'_{bm})$$

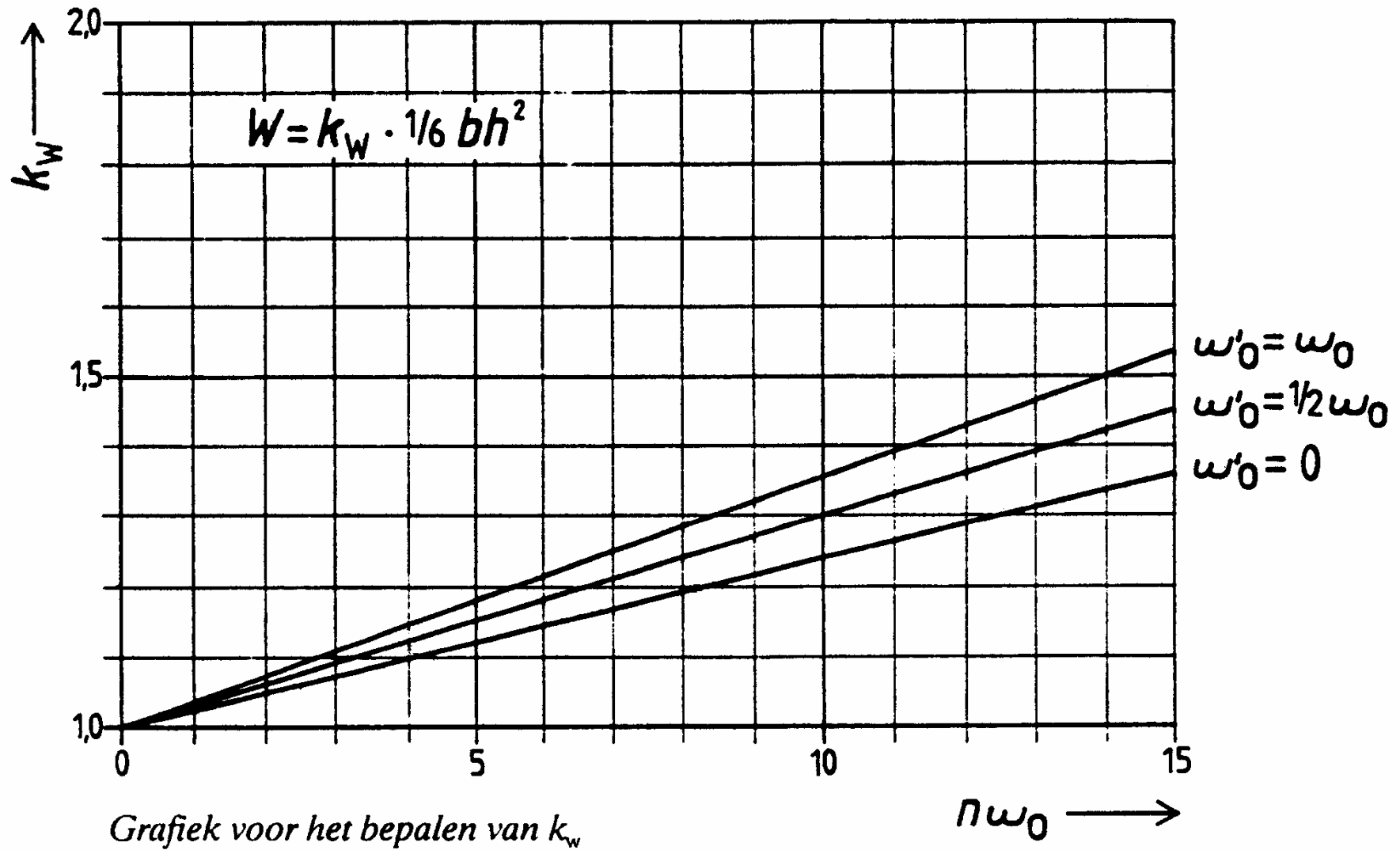


INDIEN DE INVLOED VAN DE WAPENING WORDT VERWAARLOOSD:  $k_w=1,0$  EN  $k_I=1,0$

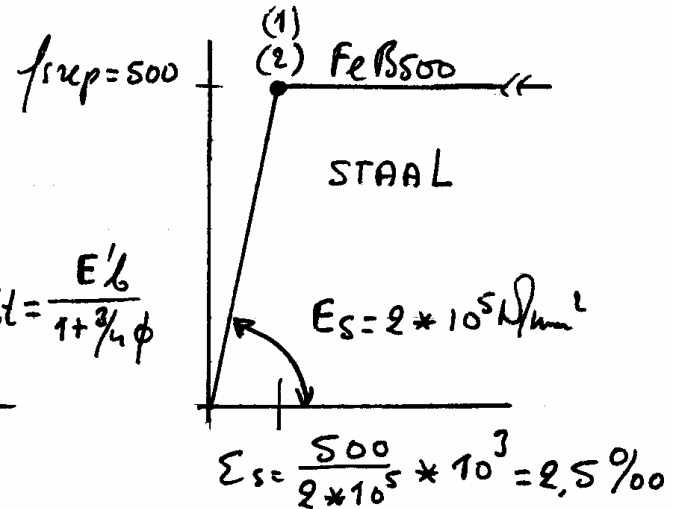
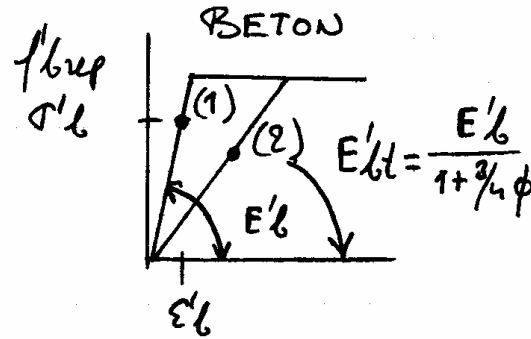
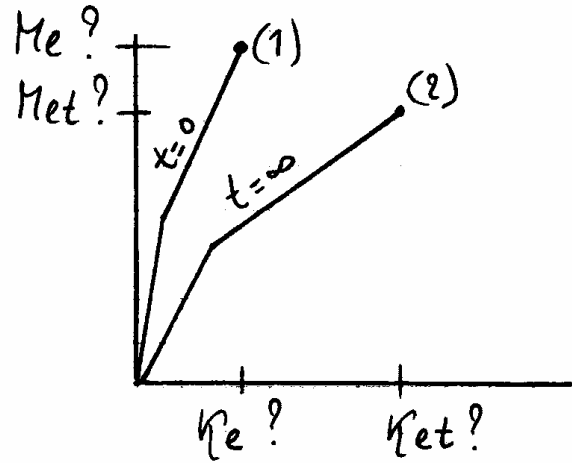
CB4 figuur 1.28 blz 43



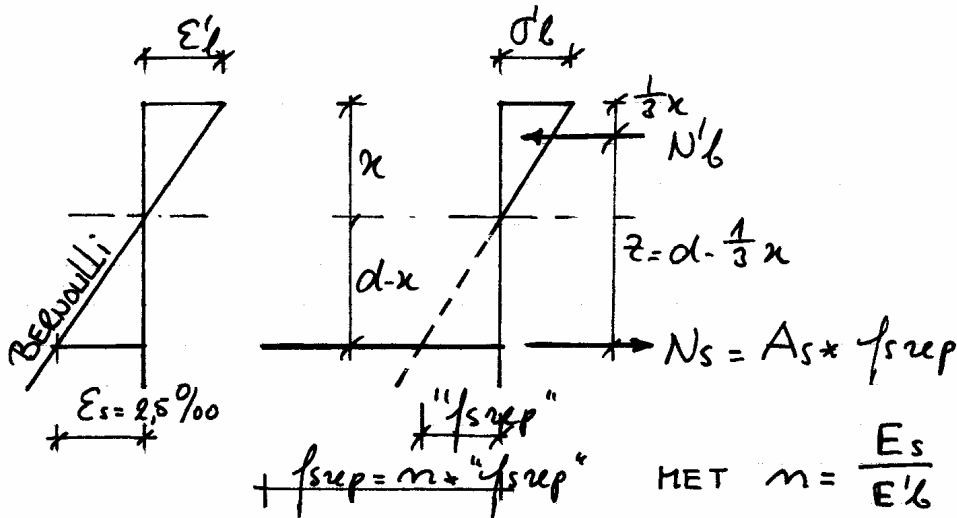
CB4 figuur 1.27 blz 42



● BEREKENING VAN  $M_e$  EN  $\kappa_e$  RESP  $M_{et}$  EN  $\kappa_{et}$



$t=0$  :



INWENDIG EVENWICHT:  $N'lt = N_s$   
 $\frac{1}{2} b x \sigma'lt = A_s * f_{brup}$

$\sigma'_b$  is onbekend en dus is  $x$  onbekend.

$M_e = N_s \times z$

Hoe groot is  $z$ ?

Ook daarvoor moeten we  $x$  weten.

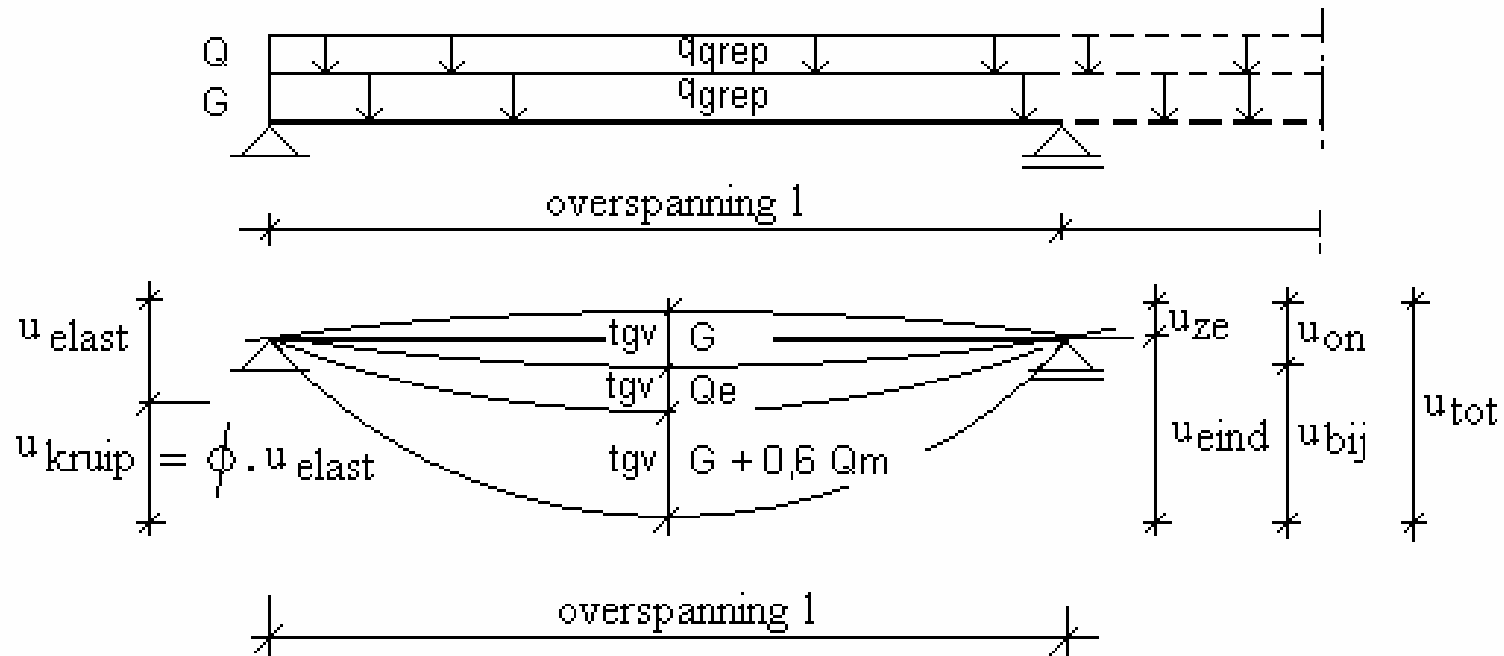
$\kappa_e = \frac{\epsilon_s}{d-x}$  zie blz 3

Ook daarvoor moeten we  $x$  weten.

①



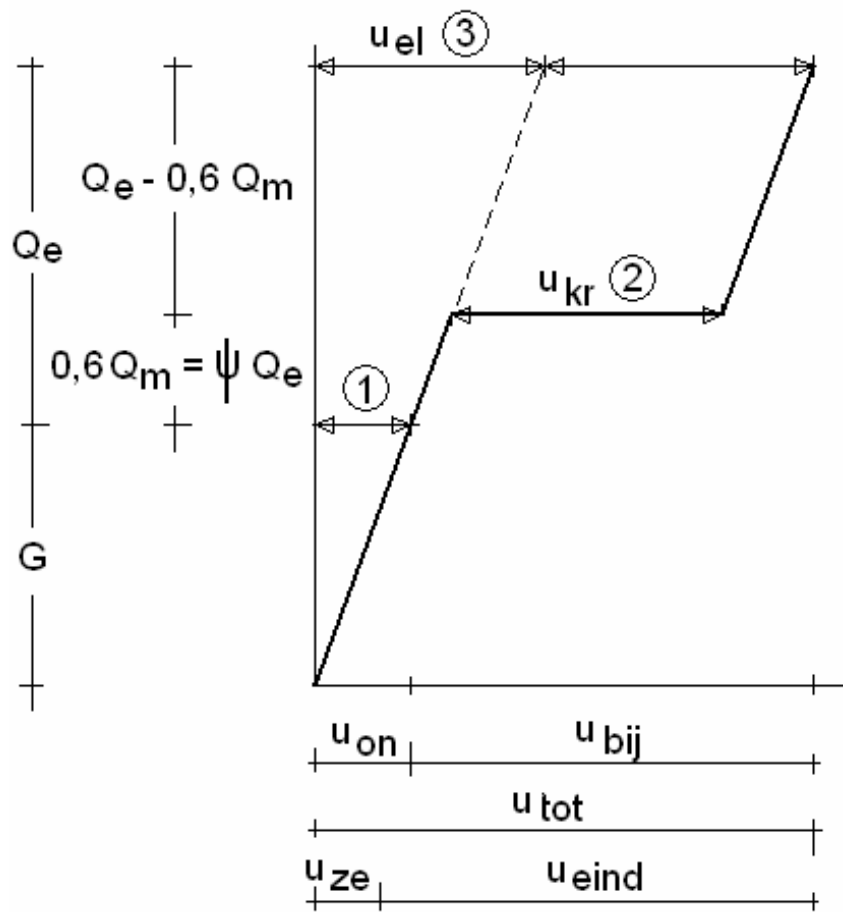
## 2. Eisen m.b.t. de doorbuiging



~ **Statisch** (NEN6702-10.1):  $u_{bij} \leq$  0,003  $l$  vloeren  
 0,002  $l$  vloeren met scheidingswanden  
 0,004  $l$  daken

$$u_{eind} \leq 0,004 l$$

Let op. Dit zijn minimale eisen!



$$\textcircled{1} = u_{on} \operatorname{tg} v G$$

$$\textcircled{2} = u_{kr} \operatorname{tg} v G + 0,6 Q_m$$

$$\textcircled{3} = u_{el} \operatorname{tg} v G + Q_e$$

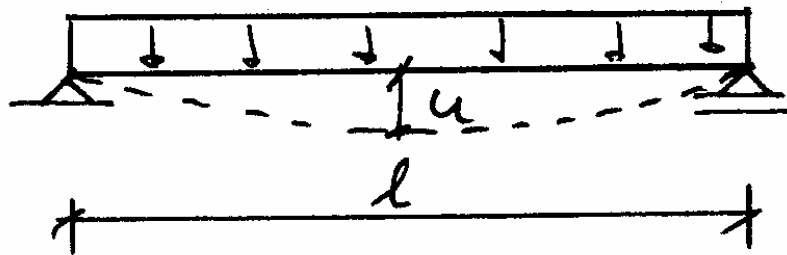
Bereken:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow u_{on} \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} \Rightarrow u_{tot} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_{bij} = u_{tot} - u_{on} \\ u_{eind} = u_{tot} - u_{ze} \end{array}$$

### 3 Berekening en toetsing van de doorbuiging

#### 3.1 Berekening van de doorbuiging op basis van EI of $\kappa$ ?

Voorbeeld ligger op 2 steunpunten



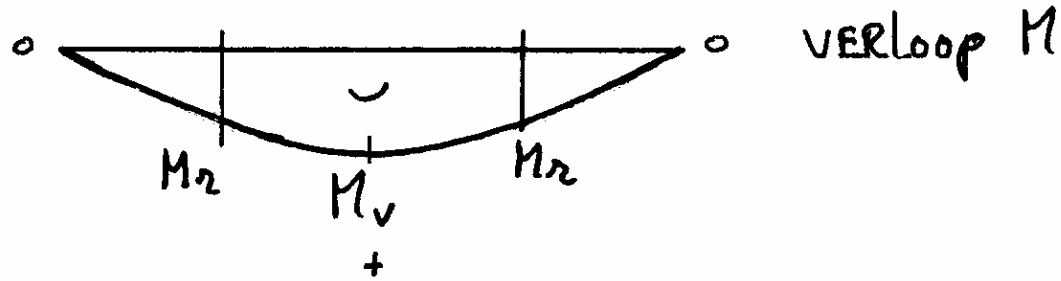
$$\begin{aligned} u &= \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \\ &= \frac{5}{48} \frac{\frac{1}{8} q l^2}{EI} l^2 \\ &= \frac{5}{48} \frac{M_v}{EI} l^2 \end{aligned}$$

indien EI = constant !

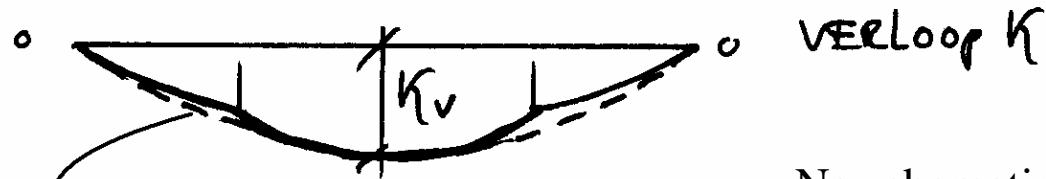
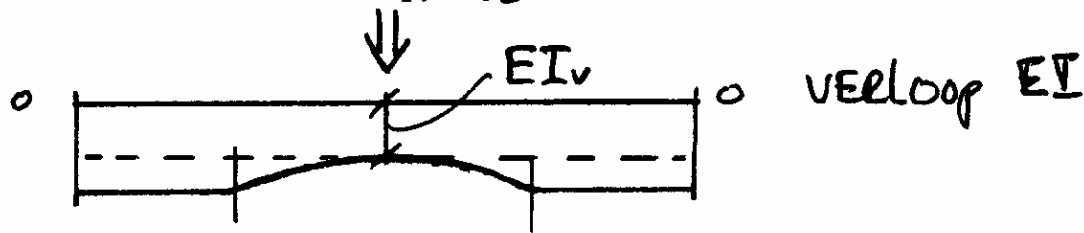
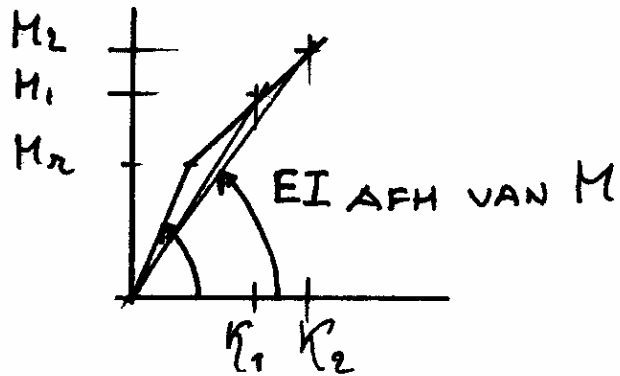
$$u = \frac{5}{48} \kappa_v l^2$$

indien EI = constant !

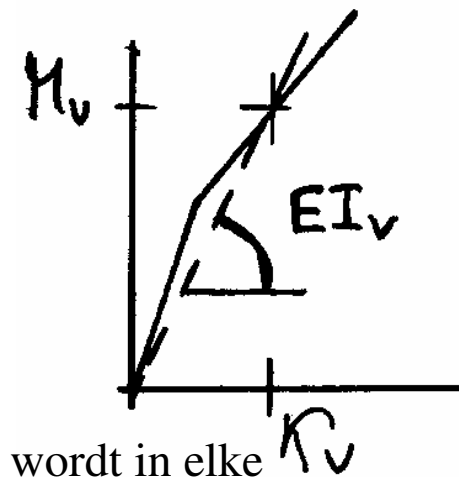
Echter EI is meestal niet constant (varieert per doorsnede)



M- $\kappa$  DIAGRAM

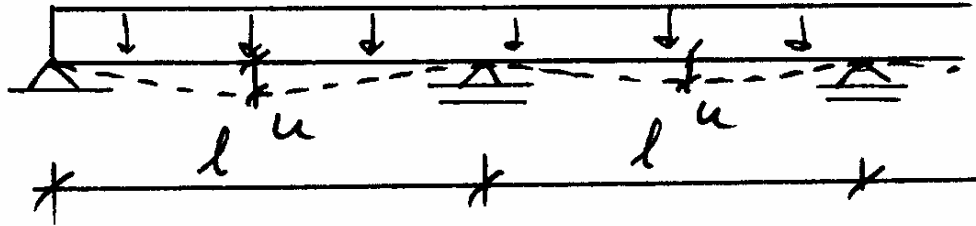


geschematiseerd



Na schematisering wordt in elke doorsnede gerekend met  $EI_v$

## Voorbeeld ligger op meerdere steunpunten (handberekening)



ZONDER AFLEIDING, CUR MS/VBC 8.6.2

ALGEMENE UITDRUKKING:

$$u = \frac{1}{48} \frac{5-k}{1+k} (K_{st} + K_v) l^2$$

met:  $k = \frac{(M_{stl} + M_{stn})/2}{M_v}$   
2 MIDDEN!

met:  $K_{st} = (K_{stl} + K_{stn})/2$

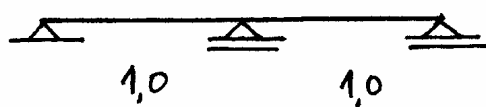
Voor onderstaande schema's:

- q-last gelijkmatig verdeeld en even groot op alle velden
- gelijke overspanningen

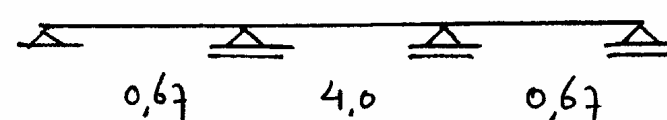
zijn de k-factoren:



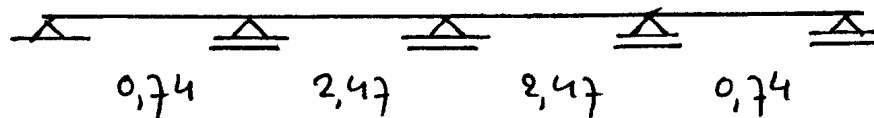
$$k = \frac{(0 + 0)/2}{1/8} = 0$$



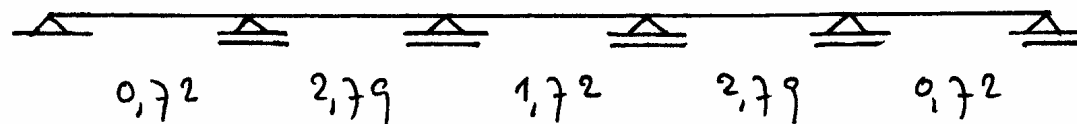
$$k = \frac{(0 + 1/8)/2}{1/16} = 1,0$$



$$k = \frac{(0 + 1/16)/2}{3/40} = 0,67 \quad k = \frac{(1/16 + 1/16)/2}{1/40} = 4,0$$



enz



enz

In alle andere gevallen de k-factoren berekenen op basis van de aanwezige momenten. 22

## 3.2 "Methoden" voor de berekening van de doorbuiging

VBC8.6.2 (1) Algemene methode

→ zelf M- $\kappa$  diagram construeren

VBC8.6.3 (2) Methode Equivalente Buigstijfheid → VBC tabel 35 en GTB 13.1.a

GTB tabel (3) Tabellen 13.2.c t/m 13.2.l

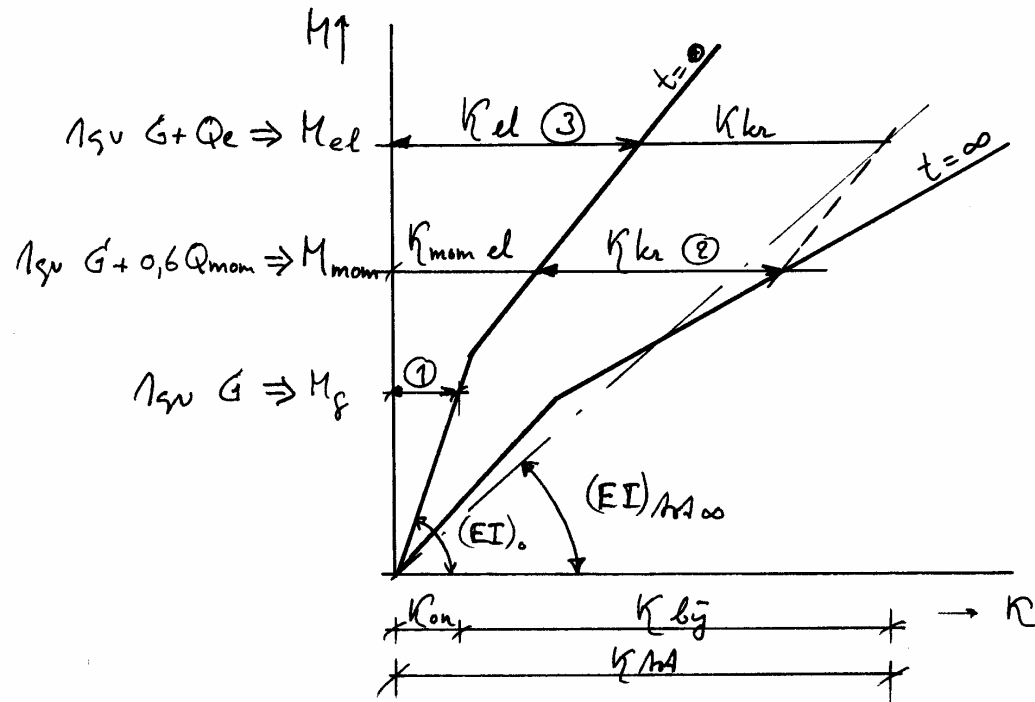
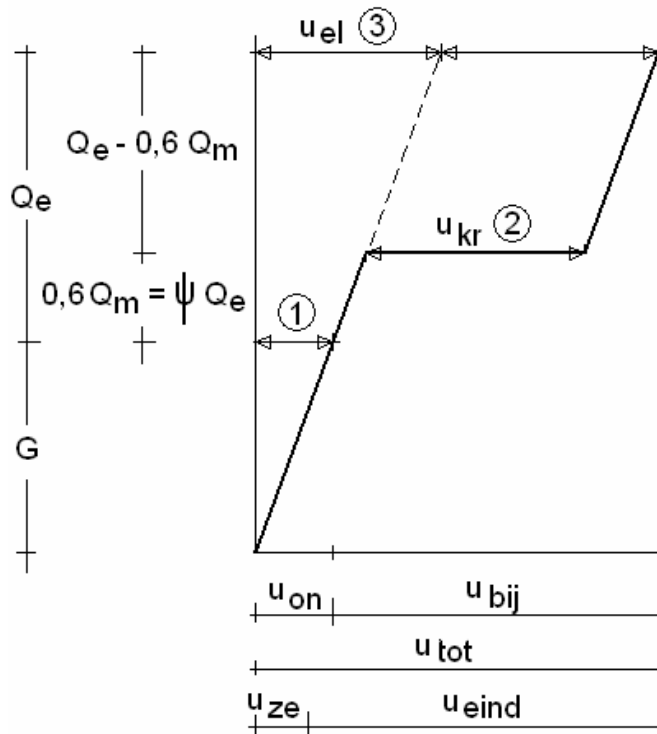
→ ontwerp- en toetsingsgrafieken

ad (1) Algemene methode VBC8.6.2

┌ geen tentamenstof, je moet er wel mee kunnen werken

- construeer het M- $\kappa$  diagram zoals in hoofdstuk 1.4.1 is beschreven.
- "vertaal" de doorbuigingseisen van NEN6702, zoals in hoofdstuk 2 is beschreven, in het M- $\kappa$  diagram (= analoog aan VBC fig. 73).

# "Vertaling" van de doorbuigingseisen naar het M-κ diagram



- BEREKEN ①, ② EN ③:

BEPAAL ~  $M_g$  EN  $(EI)_0$  OF  $\kappa_{on} \Rightarrow u_{on}$   
 ~  $M_{mom}$  EN  $\kappa_{kr}$   
 ~  $M_{el}$  EN  $\kappa_{el} + \kappa_{kr}$  OF  $(EI)_{\infty} \Rightarrow u_{MA}$

}  $\Rightarrow u_{bij}$

- TOETS

$$u_{bij} = u_{MA} - u_{on} \leq \dots \dots l$$

$$u_{eind} = u_{MA} - u_{ze} \leq \dots \dots l$$

ad (2) Methode equivalente buigstijfheid  $(EI)_{rep}$

VBC8.6.3

ALGEMEEN:

$$(EI)_{rep} = \alpha \cdot E' \cdot I$$

$\frac{1}{12} b h^3$  VOOR RECHTHOEKIGE DRSN.  
KORTE DUUR VBC 6.1.3 TABEL 3

BRENGT ALLE INVLOEDEN IN REKENING:

- GROOTTE VAN M
- TÏD
- WAP %
- BETONSTERKTEKLASSE

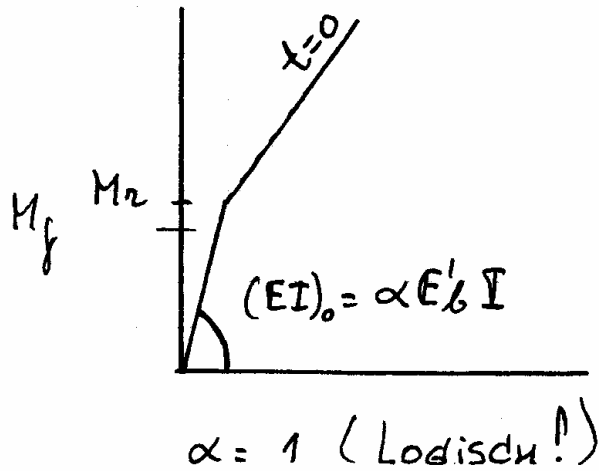
⇒ VERSCHILLENDE  
 $\alpha(s)$  VOOR  
GESCHELD,  
ONBESCHELD

BEKEND IS DAT WE  $u_{on}$  RESP  $u_{of}$  MOETEN UITREKENEN:

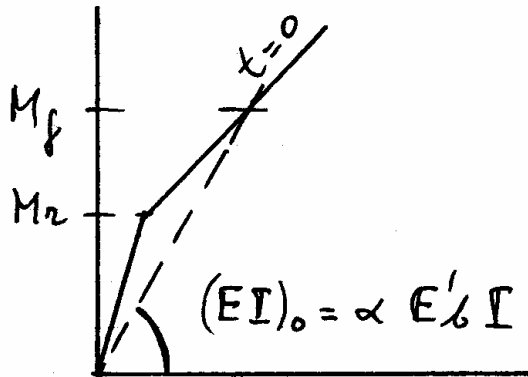
$u_{on}$  : TGV  $G_{DIRECT}$  (= DIRECT OPTREDENDE DOORBLIJING TGV PERM. BELASTING)

~ BEREKEN  $M_f$

~ VOOR  $M_f \leq M_r$  :



VOOR  $M_f > M_r$  :



$\alpha = \alpha_2 + \underbrace{\alpha_3 * W_0}_{\substack{\text{VEILIGE} \\ \text{ONDERGREN.}}} \neq \alpha_4$

BEPAALT DE STEILTE VAN DE GESCHIEDDE TAK.

AFH. VAN:  $\left. \begin{array}{l} - f'_{ck} \\ - k_h = 1,6 - h \\ - \frac{\sum M_{u_i}}{\sum M_{gr_i}} \approx \frac{q_u}{q_{gr}}$  \end{array} \right\} \text{BEPALEN LICHTING VAN } M\_r

$\alpha_2$  EN  $\alpha_3$  : ZIE VBC TABEL 35

# VBC tabel 35

Factoren  $\alpha_1$  t.m.  $\alpha_4$  voor FeB 500 (VBC – tabel 35)

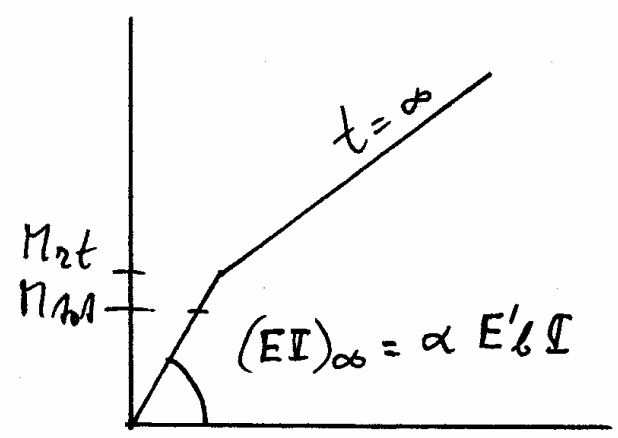
$f'_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	totale doorbuiging			onmiddellijk optredende doorbuiging					$\alpha_3$
	$\frac{\Sigma M_u^{1)}}{\Sigma M_{rep}}$	$\alpha_1$		$\frac{\Sigma M_u^{1)}}{\Sigma M_g}$	$\alpha_2$		$\alpha_4$		
		$k_h = 1,0$	$k_h = 1,4$		$k_h = 1,0$	$k_h = 1,4$	$k_h = 1,0$	$k_h = 1,4$	
15	1,2	0,215	0,265	1,5	0,105	0,165	0,255	0,360	0,33
	1,4	0,240	0,280	2,0	0,140	0,220	0,340	0,480	
	1,6	0,265	0,295	2,5	0,175	0,275	0,425	0,600	
	1,8	0,290	0,310	3,0	0,210	0,330	0,510	0,720	
25	1,2	0,230	0,280	1,5	0,120	0,180	0,270	0,380	0,30
	1,4	0,255	0,295	2,0	0,160	0,240	0,360	0,505	
	1,6	0,280	0,310	2,5	0,200	0,300	0,450	0,630	
	1,8	0,305	0,325	3,0	0,240	0,360	0,540	0,755	
35	1,2	0,245	0,295	1,5	0,135	0,195	0,285	0,400	0,27
	1,4	0,270	0,310	2,0	0,180	0,260	0,380	0,530	
	1,6	0,295	0,325	2,5	0,225	0,325	0,475	0,660	
	1,8	0,320	0,340	3,0	0,270	0,390	0,570	0,790	
45	1,2	0,260	0,310	1,5	0,150	0,210	0,300	0,420	0,24
	1,4	0,285	0,325	2,0	0,200	0,280	0,400	0,560	
	1,6	0,310	0,340	2,5	0,250	0,350	0,500	0,700	
	1,8	0,335	0,355	3,0	0,300	0,420	0,600	0,840	
55	1,2	0,275	0,325	1,5	0,165	0,225	0,315	0,440	0,21
	1,4	0,300	0,340	2,0	0,220	0,300	0,420	0,590	
	1,6	0,325	0,355	2,5	0,275	0,375	0,525	0,740	
	1,8	0,350	0,370	3,0	0,330	0,450	0,630	0,890	
65	1,2	0,290	0,340	1,5	0,180	0,240	0,330	0,460	0,18
	1,4	0,315	0,355	2,0	0,240	0,320	0,440	0,620	
	1,6	0,340	0,370	2,5	0,300	0,400	0,550	0,780	
	1,8	0,365	0,385	3,0	0,360	0,480	0,660	0,940	

<sup>1)</sup> Bij FeB 400 de waarden in deze kolom met 1,25 vermenigvuldigen.

U<sub>M</sub> : TGV (G+Q<sub>e</sub>) DIRECT + (G+0,6 Q<sub>mom</sub>) KRUIP (= DOORBUIGING IN EINSTAAND)

~ BEREKEN M<sub>M</sub> TGV (G+Q<sub>e</sub>)

~ VOOR:  $M_M \leq M_{rt}$



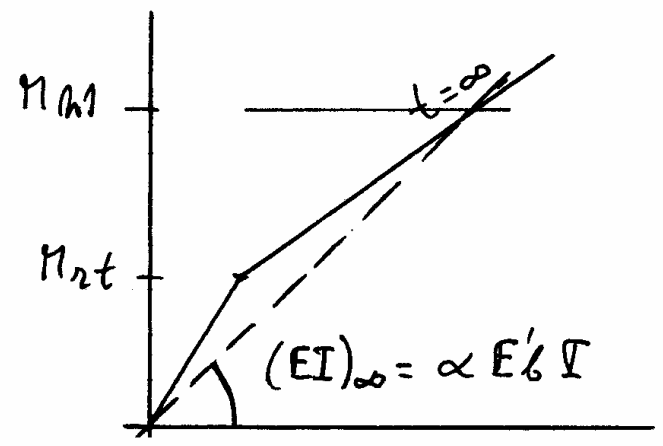
$$\alpha E'l = E'l t$$

$$E'l t = \frac{E'l}{1 + \frac{3}{4} \phi}$$

$$E'l t = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \phi} E'l$$

MAW:  $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \phi}$  (Logisch!)

VOOR:  $M_M > M_{rt}$



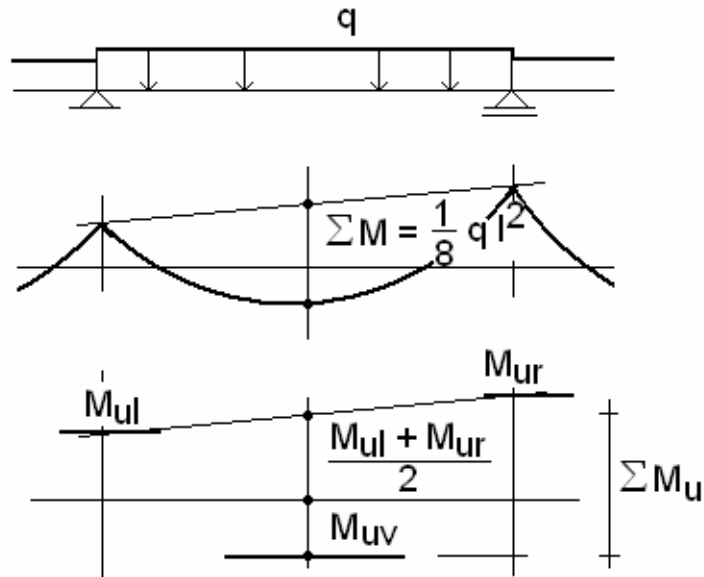
$$\alpha = 0,27 \sqrt{w_0} \leq \alpha_1 = 0,1 \frac{\sum M_{mom}}{\sum M_{rep}}$$

M<sub>mom</sub> : TGV G+0,6 Q<sub>mom</sub>

M<sub>rep</sub> : TGV G+Q<sub>e</sub>

α<sub>1</sub> : ZIE VBC TABEL 35

# toelichting $\Sigma M$



voor  $q = q_{\text{gref}}$   $\Sigma M_{\text{gref}} = 1/8 q_{\text{gref}} l^2$

voor  $q = q_{(g+0,6 \text{ qm})\text{rep}}$   $\Sigma M_{\text{mom}} = 1/8 q_{(g+0,6 \text{ qm}) \text{ rep}} l^2$

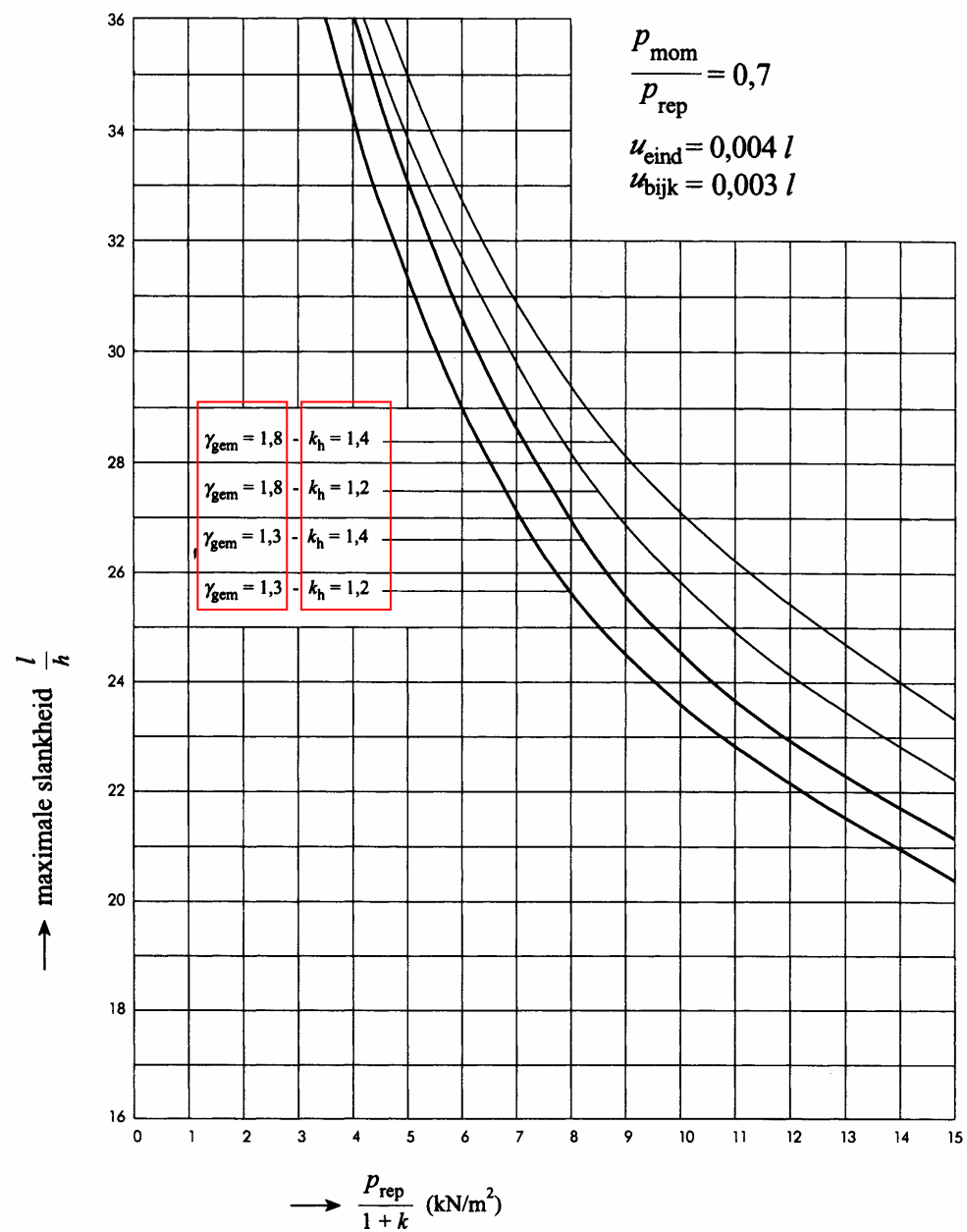
voor  $q = q_{(g+q)\text{rep}}$   $\Sigma M_{\text{rep}} = 1/8 q_{(g+q) \text{ rep}} l^2$

met  $M_u \cong \frac{\text{Astoeg}}{\text{Asben}} \times M_d$

### **ad (3) GTB ontwerp- en toetsingsgrafieken**

Er zijn grafieken gemaakt, gebaseerd op de kennis van ad(1) en ad(2).

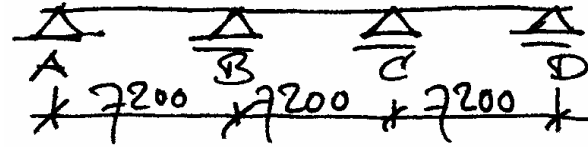
## toets C20/25 - 0,7 - 0,003 l



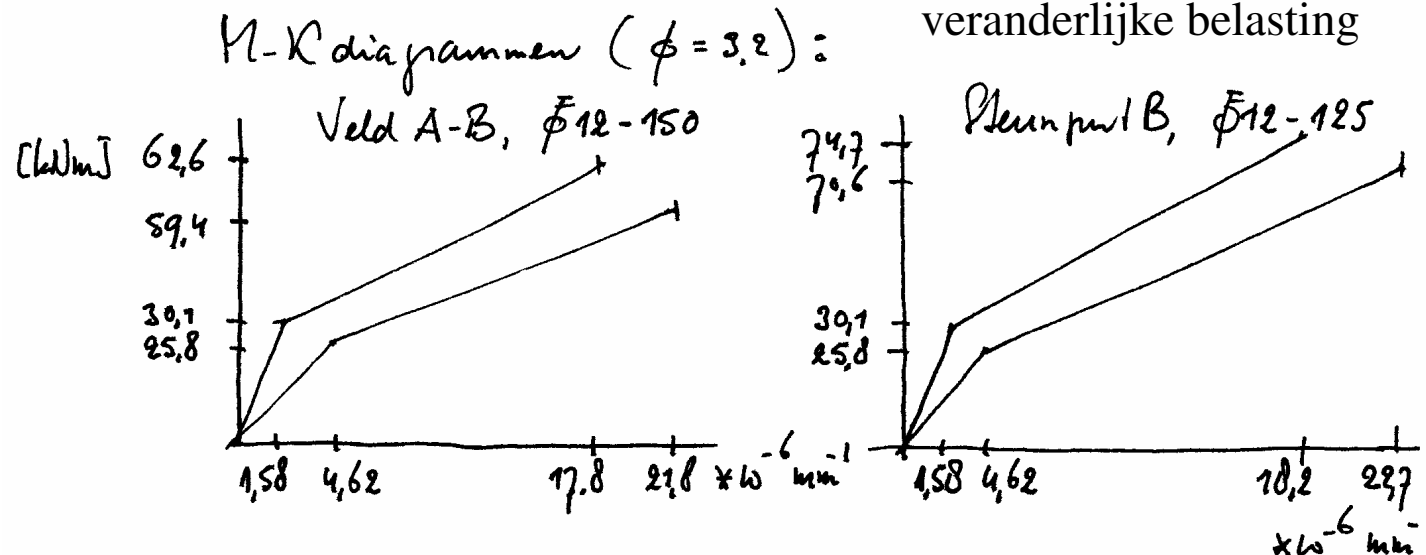
## 4. Opgaven

1. Bestudeer CB4-1.5.4 rekenvoorbeeld 3

2. Gegeven: vloer kantoorgebouw  
 $h = 200 \text{ mm}$   
 C20/25  
 droog milieu  
 representatieve belastingen:



afwerklaag  $1,00 \text{ kN/m}^2$   
 scheidingswanden  $1,20$   
 veranderlijke belasting  $3,00$



Gevraagd: (a) Bereken voor het maatgevende veld de wapening.

- (b) Toets de doorbuiging: (1) volgens de algemene methode  
 (2) volgens methode equivalente buigstijfheid 32  
 (3) m.b.v. GTB-grafiek