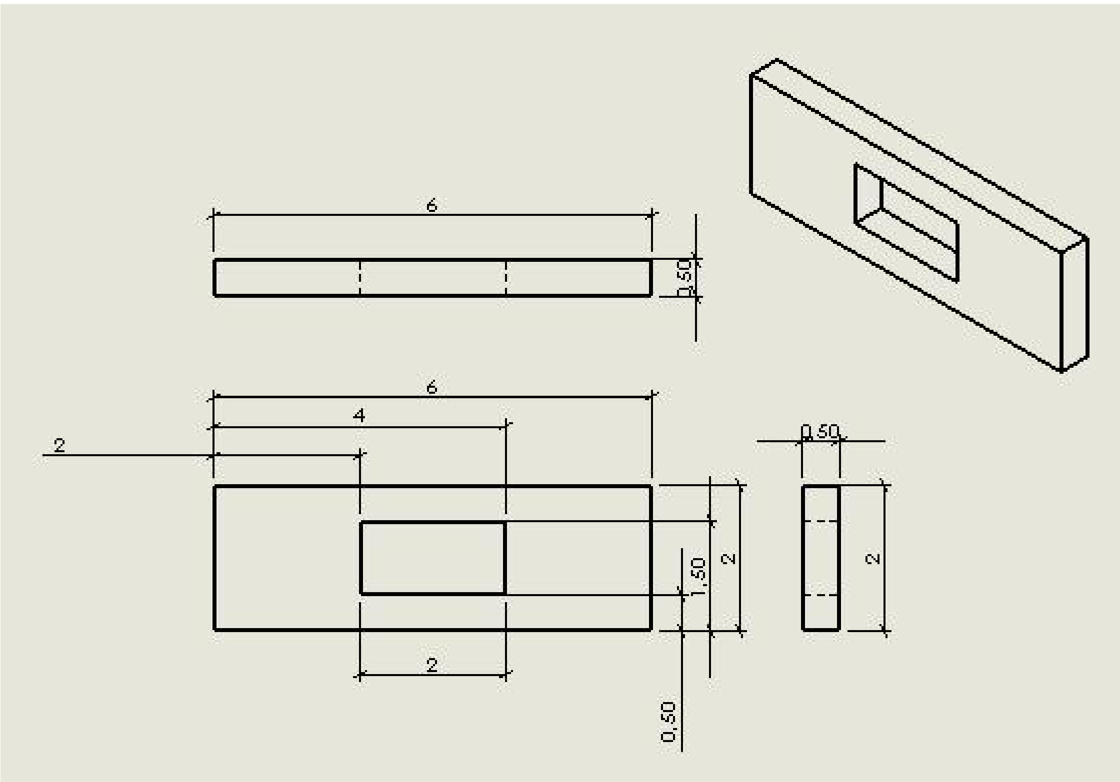
Week 05 - ribWBKII

Theorie: Integraalrekening
Onderwerp: Belastingen, dwarskrachten en momenten

Stalen ligger

Berekening oppervlakte en inhoud



Uitwerking

Oppervlakte grote rechthoek:

f(x)=2

$$A_1 = \int_0^6 2dx = [2x]_0^6 = 12 - 0 = 12$$

Oppervlakte kleine rechthoek

f(x)=1

$$A_2 = \int_0^2 1dx = [x\ ]_0^2 = 2$$

Totale oppervlakte

$$A_{tot} = 12 - 2 = 10m^2$$

Inhoud

$$V_{tot} = 10 * \frac{1}{2} = 5m^3$$

OF

$$Inhoud = dA1 * z + dA2 * z + dA3 * z.......enz. \Rightarrow \sum dAz \quad \rightarrow \quad z = ½ \text{ m}$$

$$V_{tot} = \int_0^6 \frac{1}{2} 2dx - \int_0^2 \frac{1}{2} 1dx = [x\ ]_0^6 - \left[\frac{1}{2}x\ \right]_0^2 = 6 - 1 = 5m^3$$

Zwaartepunt t.o.v. y-as

Sy=Atot * x

$$S_y = \int_0^6 2*3dx - \int_0^2 1*3dx = [6x]_0^6 - [3x]_0^2 = 36 - 6 = 30$$

$$x = \frac{S_y}{A_{tot}} = \frac{30}{10} = 3m$$

Zwaartepunt t.o.v. x-as

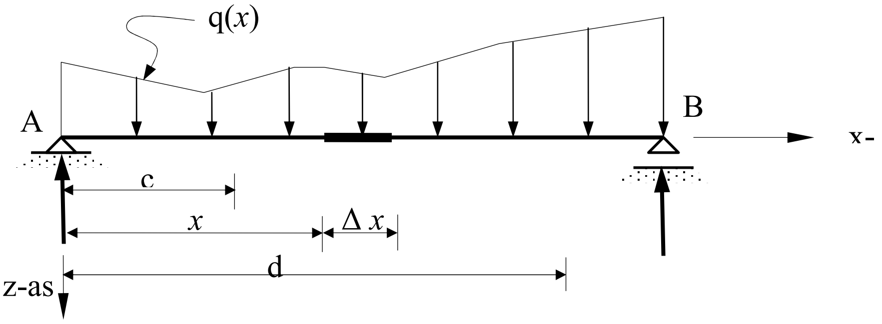
Sx=Atot * y

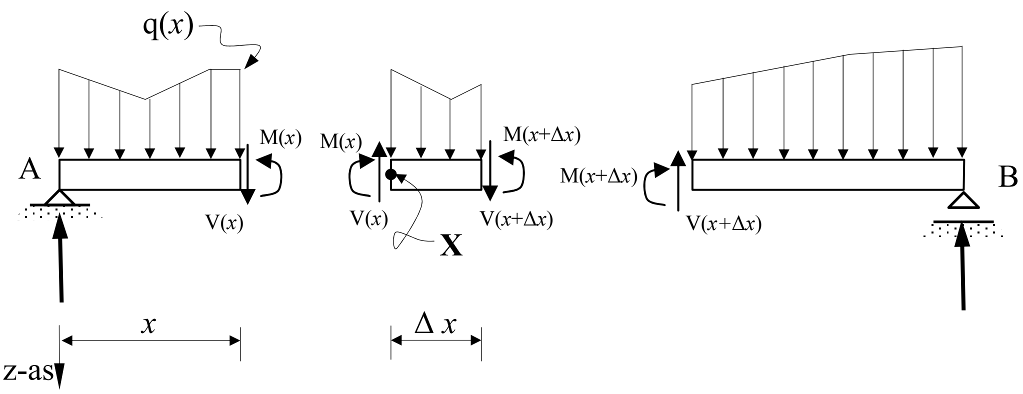
$$S_x = \int_0^2 6*1dy - \int_0^1 2*1dy = [6y]_0^2 - [y]_0^1 = 12 - 2 = 10$$

$$y = \frac{S_x}{A_{tot}} = \frac{10}{10} = 1m$$

Het zwaartepunt van de stalen ligger ligt op de coördinaten (3,1)

__**Verband tussen belasting en dwarskracht**__





In de ligger, met een willekeurige continue belasting, zijn twee doorsneden aangegeven: Een negatieve doorsnede op afstand x vanaf de oorsprong en een positieve doorsnede op afstand $(x + \Delta x)$ vanaf de oorsprong.

Beschouw het liggerdeel met lengte Δx:

Σ V = 0 (evenwicht van de verticale krachten)

$$-V(x)+q(x)_{gemiddeld}*\Delta x+V(x+\Delta x)=0$$

$$V(x+\Delta x)-V(x)=-q(x)_{gemiddeld}*\Delta x$$

$$\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}=\frac{-q(x)_{gemiddeld}*\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}=-q(x)_{gemiddeld}$$

$$\underset{\Delta x\to 0}{LIM}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{LIM}-q(x)_{gemiddeld}$$

$$\frac{dV(x)}{dx}=-q(x)\Leftrightarrow V'(x)=-q(x)$$

$$V'(x)=-q(x)$$

De belastingsfunctie is de afgeleide van de dwarskrachtfunctie
De dwarskrachtfunctie is een primitieve van de belastingsfunctie

$$V'(x)=-q(x)\to V(x)=-qx+C$$

De verzameling van alle primitieven van V(x) is:

$$V(x)=\int -q(x)dx$$

<u>Verband tussen dwarskracht en moment:</u>

ΣM(x)=0 (evenwicht van de momenten

$$-M(x)-q(x)_{gemiddeld}*\Delta x*\frac{\Delta x}{2}-V(x+\Delta x)*\Delta x+M(x+\Delta x)=0$$

$$M(x+\Delta x)-M(x)-q(x)_{gemiddeld}*\frac{1}{2}\Delta x^2=V(x+\Delta x)*\Delta x$$

$$\frac{M(x+\Delta x)-M(x)-q(x)_{gemiddeld}*\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}=\frac{V(x+\Delta x)*\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{M(x+\Delta x)-M(x)}{\Delta x}-q(x)_{gemiddeld}*\frac{1}{2}\Delta x=V(x+\Delta x)$$

$$\underset{\Delta x\to 0}{LIM}\frac{M(x+\Delta x)-M(x)}{\Delta x}-q(x)_{gemiddeld}*\frac{1}{2}\Delta x=\underset{\Delta x\to 0}{LIM}V(x+\Delta x)$$

$$\frac{M(x+\Delta x)-M(x)}{\Delta x}=V(x)$$

$$\frac{M(x)}{dx}=V(x)$$

$$M'(x)=V(x)$$

De dwarskrachtfunctie is de afgeleide van de momentfunctie
De momentfunctie is een primitieve van de dwarskrachtfunctie

$$M'(x)=V(x)\to M(x)=(-qx+C)x+D\Leftrightarrow M(x)=-qx^2+Cx+D$$

De verzameling van alle primitieven van de momentfunctie is:

$$M(x)=\int V(x)dx=\int(-qx+C)dx=-\tfrac{1}{2}qx^2+Cx+D$$

(*C en D zijn integratieconstanten)*

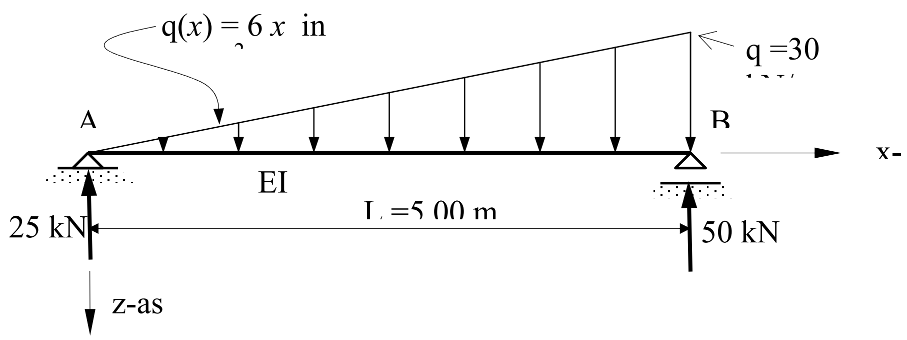
Differentiaalvorm

$$V'(x)=-q(x)$$
$$M'(x)=V(x)$$

Onbepaalde integraal

$$V(x)=\int -q(x)dx$$
$$M(x)=\int V(x)dx$$

Voorbeeld#1



01. Bereken de V(x) en M(x) m.b.v de integraalrekening
02. Bereken M(max) en teken de V- en M-lijn

Bepaal eerst de randvoorwaarden van de opleggingen.
Uit de mechanica weten we dat de momenten t.p.v. de opleggingen nul zijn.

De functie q(x) is gelijk aan de lineaire vergelijking met de vorm $y = ax^2 + b$

$$a = {}^{30}\!/_{5} = 6$$

$$30 = 6x + 0$$

$$y = 6x \rightarrow q(x) = 6x$$

Dwarskracht

$$V(x) = \int -q(x)dx = \int -6xdx = -3x^2 + C$$

Moment

$$M(x) = \int V(x)dx = \int -3x^2 + Cdx = -x^3 + Cx + D$$

$M(0) = -0^3 + C*0 + D = 0$ → D=0

$M(l) = -l^3 + C*l + 0 = 0$ → C=$l^2 = 5^2 = 25$

$$M(x) = -x^3 + 25x$$

$$V(x) = -3x^2 + 25$$

M(x) heeft een extreem waar de afgeleide gelijk is aan nul:
(dwarskrachtfunctie is de afgeleide van de momentfunctie)

$$-3x^2 + 25 = 0 \rightarrow -3x^2 = -25 \rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2.887m$$

$$M(x) = -2.887^3 + 25 * 2.887 = 48.1kNm$$

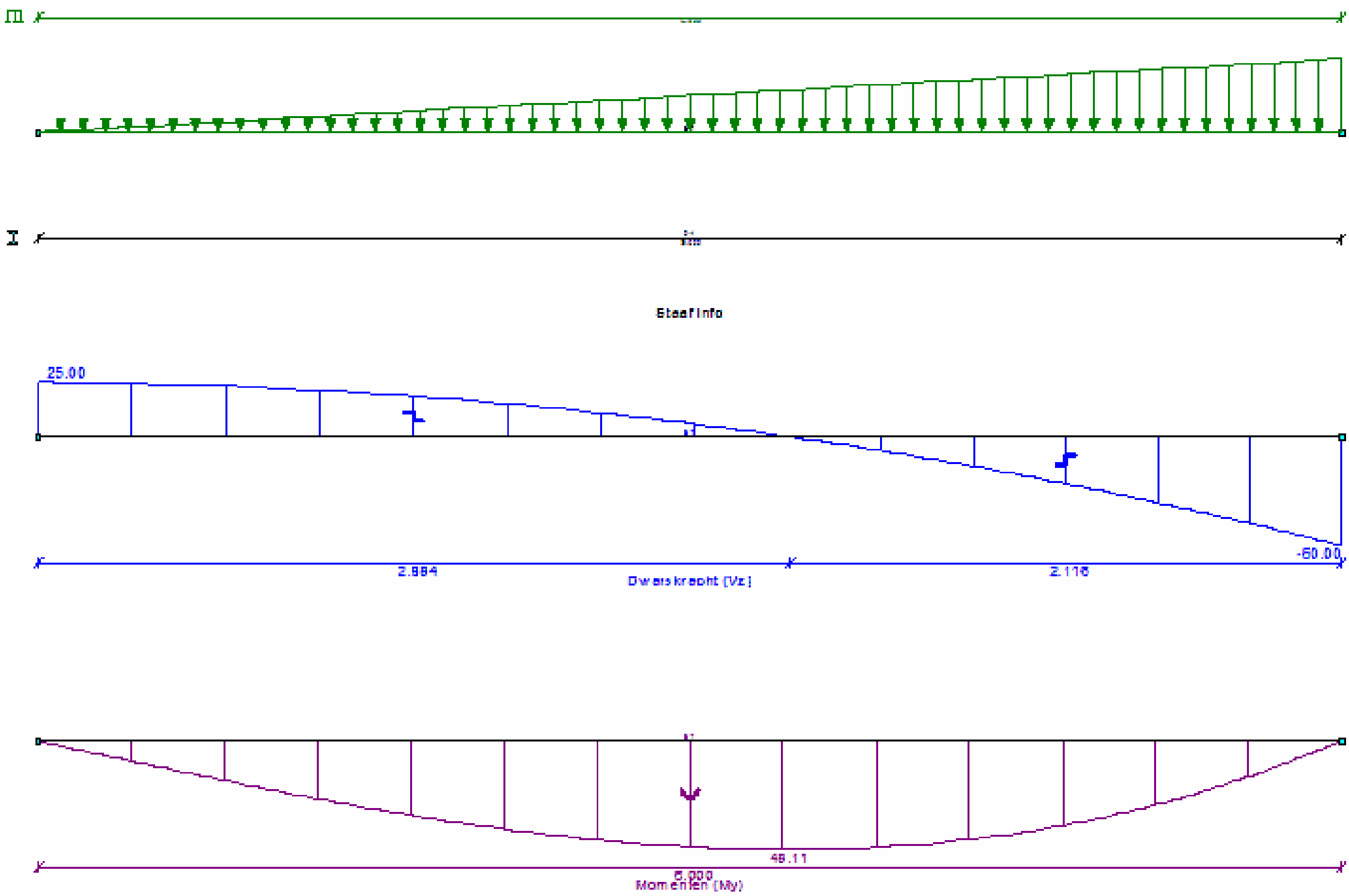
<u>Dwarskracht in A:</u>

$$V(0) = -3 * 0^2 + 25 = 25kN$$

<u>Dwarskracht in B:</u>

$$V(5) = -3 * 5^2 + 25 = -50kN$$

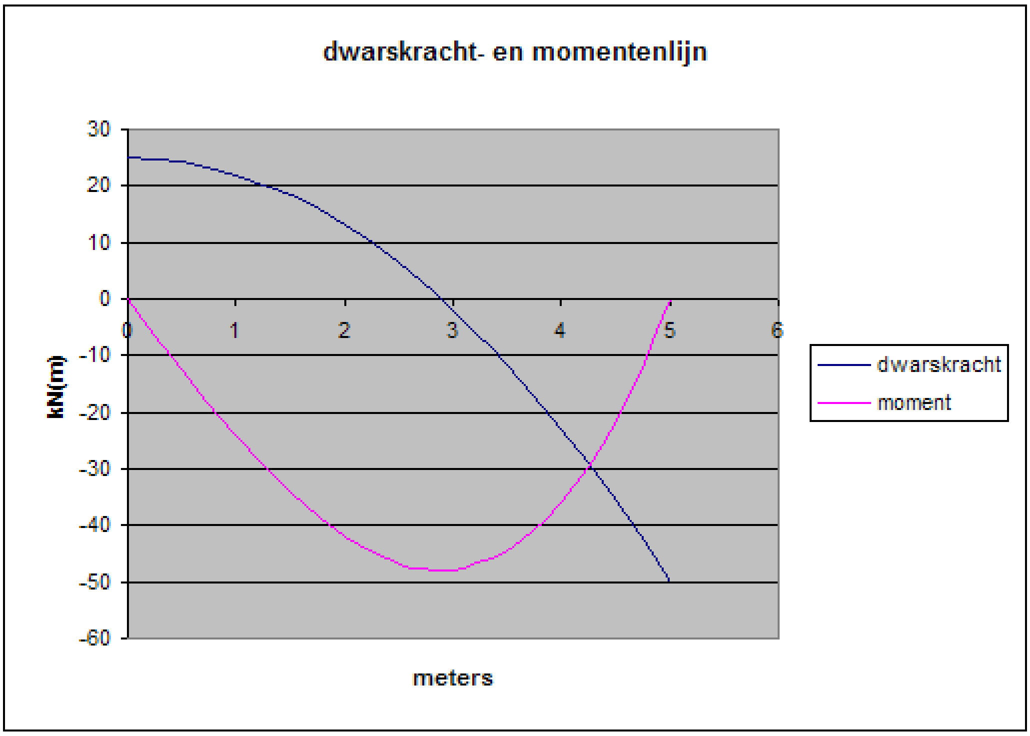
<u>In Matrixframe:</u>



In excel:

V(x)=-3x^2+25
M(x)=-x^3+25x

lengte		q		V(x)		M(x)	
0	m	0	kN/m	25	kN	0	kNm
0,5	m	3	kN/m	24,25	kN	-12,375	kNm
1	m	6	kN/m	22	kN	-24	kNm
1,5	m	9	kN/m	18,25	kN	-34,125	kNm
2	m	12	kN/m	13	kN	-42	kNm
2,5	m	15	kN/m	6,25	kN	-46,875	kNm
2,886751	m	17,32051	kN/m	0	kN	-48,1125	kNm
3	m	18	kN/m	-2	kN	-48	kNm
3,5	m	21	kN/m	-11,75	kN	-44,625	kNm
4	m	24	kN/m	-23	kN	-36	kNm
4,5	m	27	kN/m	-35,75	kN	-21,375	kNm
5	m	30	kN/m	-50	kN	0	kNm



Bijlage

Differentiaalrekening

Afstandsfunctie → $y = x^2$

x in seconden
y in meters

Bepaald de afgeleide:

Op interval: $(x, x + \Delta x)$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ (kleine toename in tijd geeft een kleine toename in de afgelegde weg)

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - y$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = 2x$ (snelheidsfunctie)

De afgeleide van de afstandsfunctie is dus een snelheidsfunctie.

$y=x^2$										
x	Tijd in sec.		3		5		10		
y	Weg in meters		9		25		100		
dx	Toename in tijd (s)			2		5			
dy	Toename in weg (m)			18		75			
dy/dx	Gemiddelde toename in snelheid			8		15			
y'	Werkelijk snelheid op moment a		6		10		20		

Integraalrekening

De primitieve van de snelheidsfunctie is de afstandsfunctie

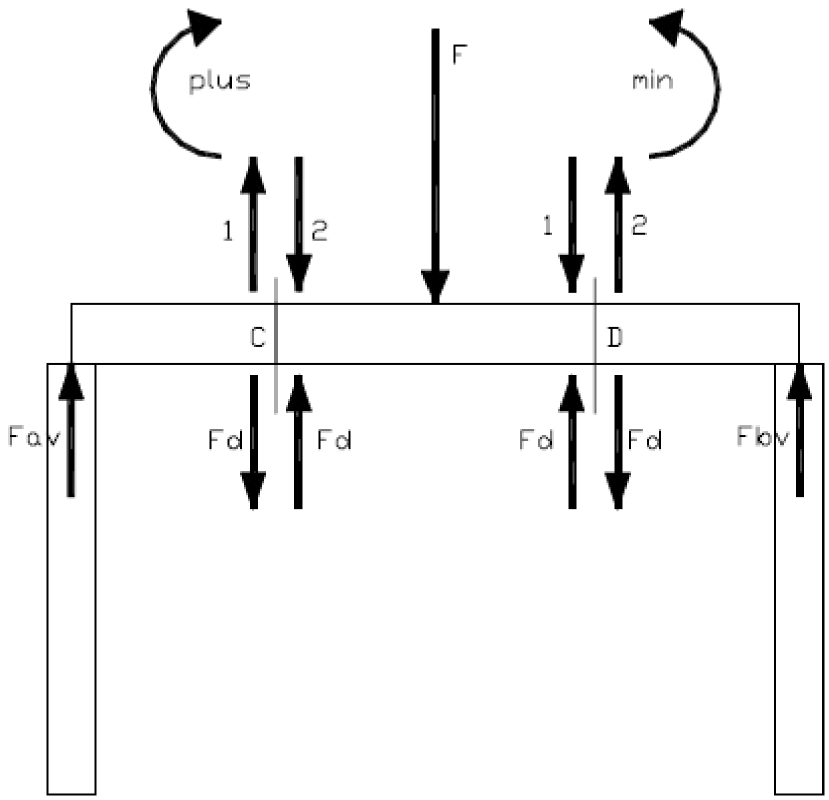
$F'(x) = f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + C$

De verzameling van alle primitieven van F(x) is:

$f(x) = \int 2xdx$ (afstandsfunctie)

$f(3) = \int 2xdx = x^2 = 3^2 = 9m$

Inwendige krachten in lineaire constructiedelen



Breng een denkbeeldig snede aan in ligger(AB) t.p.v. C.

1. Het liggerdeel AC wil t.g.v. de kracht Fav naar boven bewegen (zie pijl 1)
2. Het liggerdeel CB wil t.g.v. de ontbrekende reactiekracht Fav naar beneden bewegen (zie pijl 2)

3. Als het deel AC in evenwicht moet zijn zal er op AC een kracht met grootte gelijk aan de kracht Fav (=Fd) naar omlaag moeten werken.
4. Als het deel BC in evenwicht moet zijn zal er op BC een kracht met een grootte gelijk aan de kracht Fav (=Fd) naar omhoog moeten werken.
5. De krachten Fd in het vlak de snede, die nodig zijn om t.p.v. een denkbeeldige snede de beide door deze snede gescheiden delen in evenwicht te houden, noemen we de dwarskracht.

Tekensymbolen

De kurkentrekkerregel.

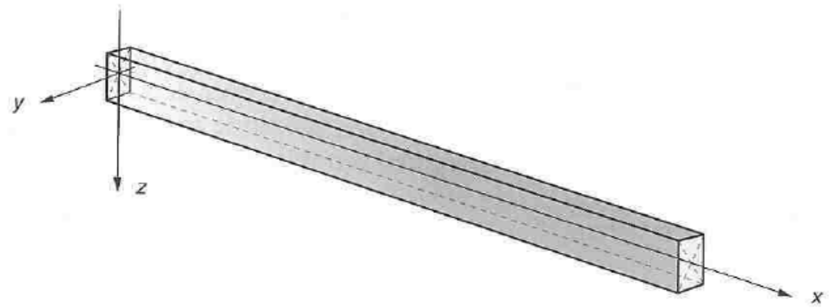
z- as positief

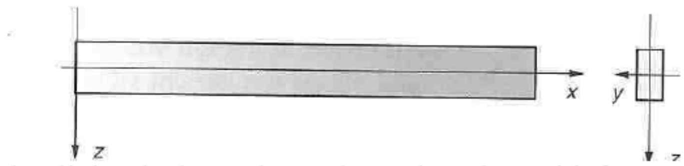
Assenstelsel in een ligger

De x –as in lengterichting van de ligger.
De y – as loodrecht op de lengteas
De z-as naar beneden gericht.

Positieve asrichtingen

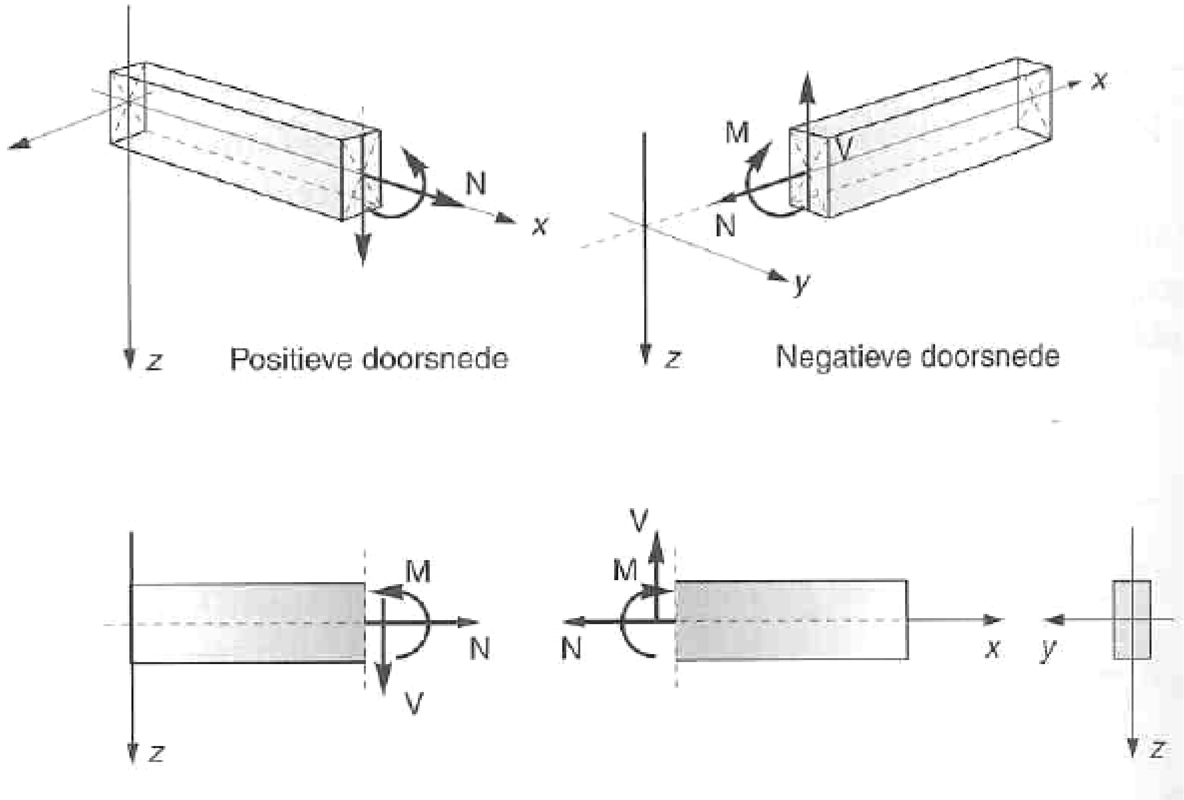
In het x-z vlak bevindt zich dan de langsdoorsnede van de ligger.
In het y-z vlak bevindt zich dan de dwarsdoorsnede.





Op het linkerdeel van de snede werken de positief genoemde inwendige krachten in de positieve richting van de assen, daarom heet dit deel **de positieve doorsnede.**

De positief genoemde inwendige krachten op het rechterdeel werking in negatieve richting van de assen, dit deel wordt daarom **de negatieve doorsnede** genoemd


N
x
z
Positieve doorsnede
M
V
N
x
y
z
Negatieve doorsnede
M
N
V
z
V
M
N
x
y
z