

Begrippen voor Hogere Wiskunde en Statistiek

1ste kan BMW en Farmacie
2003-2004

Jan Sijbers

Aanbevolen studiemateriaal

- Cursus (cursusdienst)
- Rekentoestel met statistische functies:

$$\sum x \quad \sum y \quad \sum x^2 \quad \sum y^2 \quad \sum xy$$

Begeleiding / inhaallessen

Mevr. Tania Solomaniuck

Aanwezig, elke namiddag in het
Studielandschap (Gebouw S)

Bibliografie (oefeningen)

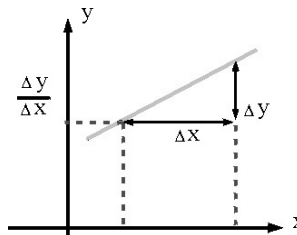
- Flanders H., "Calculus", W.H. Freeman and Company, New York, 1985
- Swokowsky E. W., "Calculus with analytic geometry", PWS Kent publishing Company Boston (1998)
- Sherlock, Roebuck, Godfrey, "Calculus". Edward Arnold (1982)
- Bittinger, Morrel, "Applied Calculus", Addison-Wesley (1993)

➤ Bibliotheek S320

Helling van een rechte (slope)

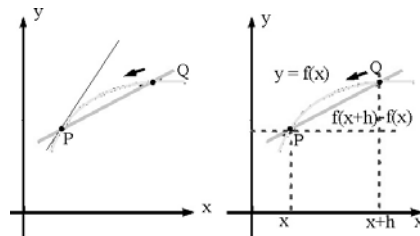
- Helling van een rechte

$$\text{Helling} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



- Helling in een punt P v.e. functie $y=f(x)$

$$\text{Helling}(PQ) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Afgeleiden: definitie

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De afgeleide bestaat, op voorwaarde dat deze limiet bestaat!

$$\text{Vb: } E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E \left[\text{kg} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]$$

$$p = \frac{dE}{dv} = \dots = mv$$

$$p \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Afgeleiden: formules

$$\frac{da}{dx} = 0$$

Met a een constante

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\text{Bv: } \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Afgeleiden: formules

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

indien $z = f(y)$ en $y = g(x)$
(kettingregel)

Vb: afgeleide via kettingregel

Stel: $y = f(x) = \left[\frac{1+x}{1+x^2} \right]^3$: bereken de afgeleide

Met $u = \frac{1+x}{1+x^2}$ is $y = u^3$

Nu is $\frac{du}{dx} = \frac{(1+x^2) - (1+x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$

Zodat $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3u^2 \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$
 $= 3 \left[\frac{1+x}{1+x^2} \right]^2 \left[\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{3(1+x)^2(1-2x-x^2)}{(1+x^2)^4}$

In dit voorbeeld werd een nieuwe veranderlijke u ingevoerd.
Mits enige oefening is dit niet meer nodig.

Vb: afgeleide via kettingregel

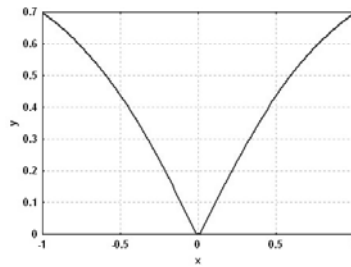
Bereken de afgeleide van : $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 1}}$

Schrijf $y = \sqrt{u}$ waarbij $u = 1 - \frac{1}{v}$ en $v = x^2 + 1$

Dan is $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2}$, $\frac{du}{dv} = v^{-2}$ en $\frac{dv}{dx} = 2x$

Zodat

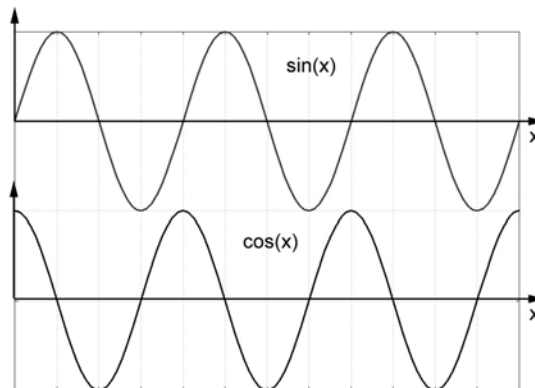
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 1}}} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} 2x \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^2 |x|}\end{aligned}$$



Afgeleiden: sinus & cosinus

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$



Afgeleiden: formules

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d(\cotan x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Afgeleiden: formules

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

Limieten – Regel de l'Hospital

Algemeen is: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ indien $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

Voor een onbepaaldheid van de gedaante $0/0$ of ∞/∞ geldt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)}$$

Voorbeeld: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ Onbepaaldheid wegens: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{cases}$

Daarom: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Limieten – Regel de l'Hospital



Johann Bernoulli
(1667-1748)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)}$$



Guillaume De l'Hôpital
(1661-1704)

Functie bespreking

- domein + eventuele periode
- snijpunten met x-as en y-as
- asymptoten
- $f'(x)$ en $f''(x)$
- extrema (maxima,minima)
- buigpunten
- grafiek

Functie bespreking: vb

Vb: $y = 16x^2(1-x)^2$ Nulpunten: $(0,0)$ en $(1,0)$

$$y' = 32x(1-x)^2 + 16x^2[-2(1-x)] = \underline{32x(x-1)(2x-1)} = 32(2x^3 - 3x^2 + x)$$

Extrema:

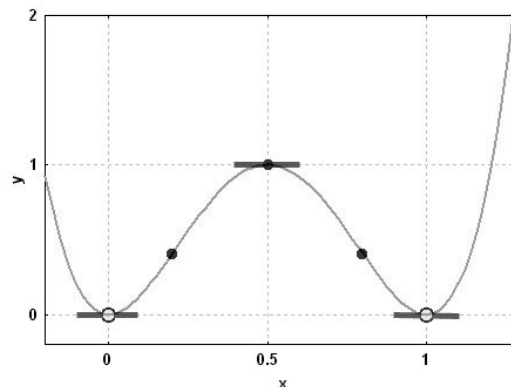
$(0,0)$, $(1,0)$ en $(0.5,1)$

Buigpunten:

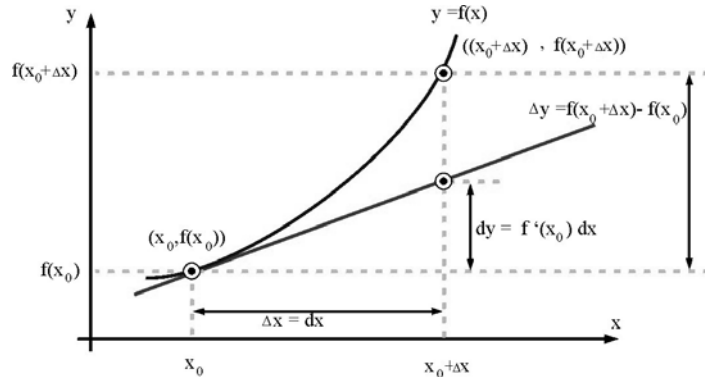
$$y'' = 32(6x^2 - 6x + 1)$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{12} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

$(0.21, 0.44)$ en $(0.79, 0.44)$



Differentiaal van een functie



$$\Delta y \cong dy$$

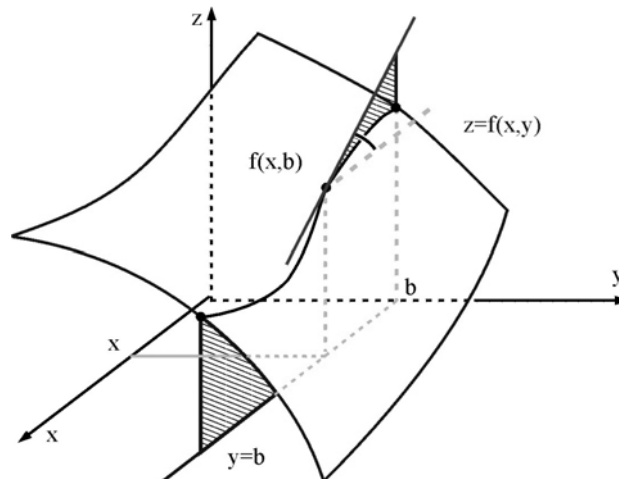
indien

$$\Delta x \cong 0$$

Indien $y=f(x)$ een afgeleide heeft, $f'(x)$,
dan is de differentiaal: $dy = f'(x)dx$

Alle afleidingsformules kunnen met differentialen
geschreven worden: $d \sin x = \cos x dx$

Partiële afgeleide



$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Voorbeeld: partiële afgeleide

$$w = f(x, y, z) = x^3 y^2 \sin z$$

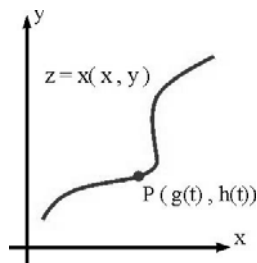
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 y^2 \sin z \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2x^3 y \sin z \quad \frac{\partial w}{\partial z} = x^3 y^2 \cos z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xy^2 \sin z \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 6x^2 y \sin z$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2x^3 \sin z \quad \dots \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -x^3 y^2 \sin z$$

Totale afgeleide (kettingregel)



Curve in xy-vlak,
gegeven een
parametervoorstelling: $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$

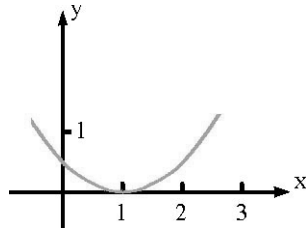
Voor elke waarde van t is een punt P op de curve bepaald.
De variabele t noemt men de parameter. Merk op dat nu
 $z = f[g(t), h(t)]$ functie is van slechts één variabele t
Dit is een beperking van $f(x, y)$!

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} f[g(t), h(t)]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Kettingregel

Voorbeeld: totale afgeleide



Stel: $z = f(x, y) = xy + y^3$

Parametrische vgl: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

Nu is $z = f(2t+1, t^2)$ zodat we vinden a.h.v. de kettingregel:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y & \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 3y^2 \\ \frac{dx}{dt} &= 2 & \frac{dy}{dt} &= 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= y^2 + (x + 3y^2)2t \\ &= 2t^2 + (2t + 1 + 3t^4)2t \\ &= 2t + 6t^2 + 6t^5 \end{aligned}$$

Afgeleide van impliciete functies

De afgeleide van een impliciete functie $F(x, y) = 0$ naar de gekozen onafhankelijke (bv. x) wordt bekomen door $F(x, y) = 0$ af te leiden naar x en de bekomen vgl op te lossen naar y'

Voorbeeld: $F(x, y) = y - \cos xy = 0$ $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dF}{dx} = 0 + y \sin xy + (1 + x \sin xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

of: $y \sin xy + \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} \sin xy = 0$

waaruit: $y' = -\frac{y \sin xy}{1 + x \sin xy}$ met: $y - \cos xy = 0$

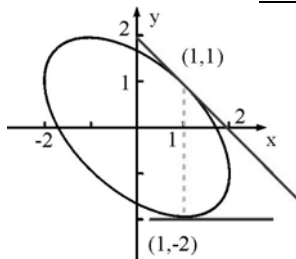
Afgeleide impliciete functie: vb

Gegeven: $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ (1) Bereken: $\frac{dy}{dx}$ voor $x=1$

Volgens: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ bekomt men: $(2x + y) + (x + 2y) \frac{dy}{dx} = 0$

zodat: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$ met: $x \neq -2y$

Voor $x=1$ volgt uit (1) een vierkantsvergelijking:



$y^2 + y - 2 = 0$ met wortels: $y_1 = 1$ en $y_2 = -2$

We zoeken dus y' voor de punten op de kromme met coördinaten $(1, 1)$ en $(1, -2)$:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = -\frac{2+1}{1+2} = -1 \quad \text{en} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,-2)} = -\frac{2-2}{1-4} = 0$$

Totale differentiaal

Definitie:
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

We kunnen deze differentiaal schrijven als

$$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

met:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{en} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dan geldt steeds:
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{mogelijke test})$$

Integrerende factor

Stel dat $df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

geen totale differentiaal is, dan is $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

Er bestaat altijd een nog onbekende functie: $\mu(x, y)$ zodat

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy$$

wel een totale differentiaal wordt.

$\mu(x, y)$ noemt men de INTEGRERENDE FACTOR

Voorwaarde: $\frac{\partial(\mu.P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.Q)}{\partial x}$

of $\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$

of $P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

Meestal zeer moeilijk. Slechts in zeer bijzondere gevallen kan men de functie

$$\mu(x, y)$$

op eenvoudige wijze bepalen.

Integrerende factor

Vb: $df = (y + xy^2)dx - xdy$

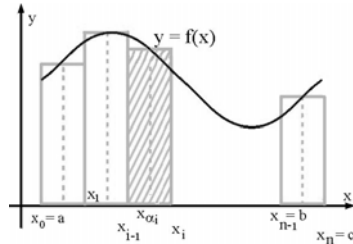
$$\begin{cases} P(x, y) = y + xy^2 \\ Q(x, y) = -x \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq \frac{\partial P}{\partial y}$$

Is $\mu = y^{-2}$ een integrerende factor?

$$\begin{cases} \mu(x, y)P(x, y) = \frac{1}{y^2}(y + xy^2) = \frac{1}{y} + x & \frac{\partial \mu \cdot P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\ \mu(x, y)Q(x, y) = \frac{-x}{y^2} & \frac{\partial \mu \cdot Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Wiskunde: Integralen

Bepaalde integralen



Beschouw $y=f(x)$ met

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, c]$$

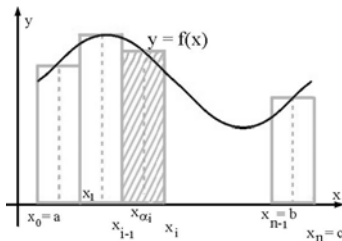
Oppervlakte tussen de x-as, de kromme $y=f(x)$ en de rechten $x=a$ en $x=c$ kan men benaderen door:

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_{\alpha_i})$$

Indien de limiet voor $n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0$ bestaat, dan spreekt

men van een **BEPAALED INTEGRAAL** : $\int_a^c f(x) dx$

Onbepaalde integraal



- Ondergrens vaste waarde
- Bovengrens veranderlijk

$$\int_a^t f(x) dx = F(t)$$

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \int_a^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx \cong f(\tau) \Delta t$$

$$\text{of } f(\tau) \cong \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

Bij limiet $\Delta t \rightarrow 0$ zal $\tau \rightarrow t$ zodat $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$

Men noemt $F(t)$ de primitieve functie van $f(t)$

Onbepaalde integraal

Onbepaalde integraal $\rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ ← constante

↑ Primitieve functie van $f(x)$

Opgelet: een groot verschil!

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{is een getal!}$$

$$\int f(x)dx \quad \text{is een functie!}$$

Opmerking: het symbool om de variabele aan te geven in een bepaalde integraal heeft geen invloed op de berekening. Dwz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du = \dots$$

Integratieformules

Deze volgen onmiddellijk uit de afgeleidenformules, zoals:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx \quad \int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Vbn: rechtstreekse integratie

$$\int (x^2 - 2x) dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$

$$\int 4 \sin x dx = -4 \cos x + C$$

$$\int (x^4 - x + 2) dx = \int x^4 dx - \int x dx + \int 2 dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^2 + 2x + C$$

$$\int (3 \cos x - \sin x) dx = 3 \int \cos x dx + \int (-\sin x) dx = 3 \sin x + \cos x + C$$

$$\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^2} \right) dx = 4 \frac{x^{-2}}{(-2)} - 3 \frac{x^{-1}}{(-1)} + C = -2x^{-2} + 3x^{-1} + C$$

$$\int (e^{2x} + 6e^{6x}) dx = \int e^x dx + 6 \int e^{6x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + 6 \frac{e^{6x}}{6} + C = \frac{e^{2x}}{2} + e^{6x} + C$$

$$\int \left(\frac{2}{5} x + e^{5x} - \sin 5x \right) dx = \frac{x^2}{5} + \frac{e^{5x}}{5} + \frac{1}{5} \cos 5x + C$$

Integratie - substitutie

$$\int f[u(x)] \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du \quad \text{met} \quad u \equiv u(x)$$

$$\text{Indien} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{dan:} \quad \int f[u(x)] \frac{du}{dx} dx = F[u(x)] + C$$

Voorbeelden:

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^u du \quad \text{Stel: } u = x^2 \quad \text{Dan is: } du = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\int (e^x + x)^2 (e^x + 1) dx = \quad \text{Stel: } u = e^x + x \quad \text{Dan is: } du = (e^x + 1) dx$$

$$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(e^x + x)^3}{3} + C$$

Integratie – substitutiemethode: vb

Voorbeeld:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \quad \text{Stel: } u = 3x+5 \quad \text{Dan is: } du = 3dx$$
$$= \frac{2}{3} u^{1/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+5} + C$$

Voorbeeld:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du \quad \text{Stel: } u = \ln x \quad \text{Dan is: } du = \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

Partiële integratie

Uit: $d(uv) = u dv + v du$ volgt: $\int u dv = uv - \int v du$

Voorbeelden:

$$\int x \cos x dx = \int x d(\sin x) \quad \text{Stel: } u = x \quad \text{en: } v = \sin x$$
$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$


$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int y e^y dy \quad \text{Stel: } y = x^2 \quad \text{en dus: } dy = 2x dx$$
$$= \frac{1}{2} \int y e^y dy = \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} \int e^y dy$$
$$= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y + C = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$$

Partiële integratie: opmerking

Beschouw: $\int xe^x dx$

Bij P.I. hebben we veelal meerdere keuzes. Hier:

Keuze 1: $\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = \dots$

Keuze 2: $\int xe^x dx = \frac{1}{2} \int e^x dx^2 = \frac{x^2}{2} e^x - \int x^2 e^x dx = \dots$ 

Algemeen: Laat je keuze leiden door de complexiteit van de resterende integraal!

Integralen: Oefening P.I.

$\int \arcsin x dx =$ Stel: $\begin{cases} u = \arcsin x \\ v = x \end{cases} \quad \begin{cases} du = dx / \sqrt{1-x^2} \\ dv = dx \end{cases}$

$\stackrel{PI}{=} x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ Substitutie: $\begin{cases} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{cases}$

$\stackrel{Subst.}{=} x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$= x \arcsin x + t^{1/2} + C$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Partiële integratie: oefening

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d \sin x$$

Stel: $\begin{cases} u = e^x \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\stackrel{PI}{=} e^x \sin x - \int (\sin x) e^x dx$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x)$$

Stel: $\begin{cases} u = e^x \\ v = \cos x \end{cases}$

$$\stackrel{PI}{=} e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

We vinden dezelfde integraal terug in beide leden, zodat:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

Integralen: oplossing a.h.v. algebra

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}} dx$$

Vermenigvuldigen v. teller en noemer met $(1+x)$

$$= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Substitutie: $u = 1-x^2$

Bekende integraal: arcsinx

$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Integralen: machtsverlaging

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx && \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx && \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (\cos 4x + 1) \, dx \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C\end{aligned}$$

Integralen van rationale functies

Voor het berekenen van: $\int \frac{F(x)}{f(x)} \, dx$ waarbij $F(x)$ en $f(x)$ polynomen zijn met reële coëfficiënten, maakt men gebruik van:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{f(x)}$$

waarbij $A(x)$ en $B(x)$ polynomen zijn en waarbij de graad van $B(x)$ kleiner is dan de graad van $f(x)$.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx &= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} \, dx = \int \left(\frac{x^4 - 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx \\ &= \int x^2 \, dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C\end{aligned}$$

Splitsen in partieelbreuken

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

Indien $g(x)$ en $f(x)$ polynomen zijn, waarbij de graad van $g(x)$ kleiner is dan de graad van $f(x)$, dan kan $g(x)/f(x)$ geschreven worden als een som van uitdrukkingen van de vorm:

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{f(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \dots + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{P_mx+Q_m}{(x^2+px+q)^m} + \dots \end{aligned}$$

met a, b, \dots de reële nulpunten van $f(x)$ en $x^2 + px + q, \dots$ kwadratische functies met negatieve discriminant en $\alpha, \beta, \dots, m, n, \dots$ de machten van de ontbonden factoren.

Splitsen in partieelbreuken: vb.

Voorbeeld:

$$\int \frac{1+2x}{(x-3)(x-4)} dx =$$

Nu is: $\frac{1+2x}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$

Vermenigvuldig met $(x-3)(x-4)$:

$$1+2x = A(x-4) + B(x-3) = -(4A+3B) + (A+B)x$$

$$\begin{cases} 4A+3B = -1 \\ A+B = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -7 \\ B = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} dx &= \int \frac{-7}{x-3} dx + \int \frac{9}{x-4} dx \\ &= \int \frac{-7}{x-3} d(x-3) + \int \frac{9}{x-4} d(x-4) \\ &= -7 \ln(x-3) + 9 \ln(x-4) + C \end{aligned}$$

Bepaalde integralen

Indien $f(x)$ continu is in een interval $[a,b]$ en $F(x)$ een willekeurige primitieve functie is van $f(x)$, dan geldt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Bij overgang naar een nieuwe variabele u kan de berekening volledig met deze nieuwe variabele gebeuren, op voorwaarde dat de grenzen a en b eveneens worden aangepast:

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u \equiv u(a) \\ u \equiv u(b) \end{cases}$$

Bepaalde integralen: vb

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \int_0^4 2\sqrt{x^2+9}x dx &= \int_{??}^{??} \sqrt{u} du \\ &= \int_9^{25} \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_9^{25} \\ &= \frac{2}{3} (5^3 - 3^3) = \frac{196}{3} \end{aligned}$$

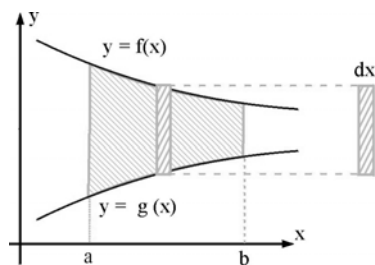
Substitutie: $\begin{cases} u = x^2 + 9 \\ du = 2x dx \end{cases}$

Aanpassen van de grenzen:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u(0) = 9 \\ u(4) = 25 \end{cases}$$

Wiskunde: Toepassingen op Integralen

Integralen- toepassingen



De oppervlakte tussen $f(x)$ en $g(x)$ met $f(x) \geq g(x)$ en de rechten $x=a$ en $x=b$?

Oppervlakte opsplitsen in rechthoekjes: $[f(x) - g(x)]dx$

De oppervlakte is dan: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Algemeen :

- Teken figuur
- Kies geschikt oppervlakteëlementje
- Integreer

Vlakke oppervlakte (vb)

Bereken de oppervlakte begrensd door

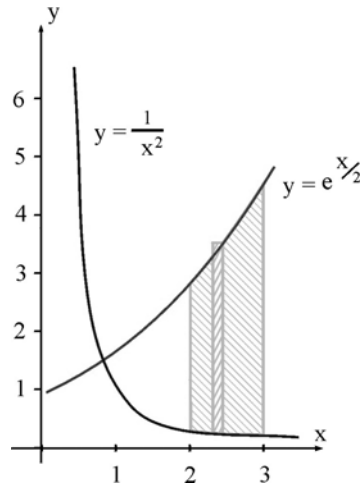
$$y = e^{x/2}, y = 1/x^2, x = 2 \text{ en } x = 3$$

Keuze elementair opp. elementje:

$$dA = \left(e^{x/2} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

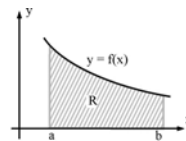
Oppervlakte:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 \left(e^{x/2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[2e^{x/2} + \frac{1}{x} \right]_2^3 \\ &= \left(2e^{3/2} + \frac{1}{3} \right) - \left(2e + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2(e^{3/2} - e) - 1/6 \end{aligned}$$



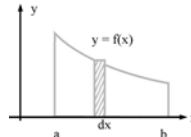
Volume v.e. omwentelingsopp.

Omwentelingslichaam
ontstaat door R te laten
draaien om de x-as



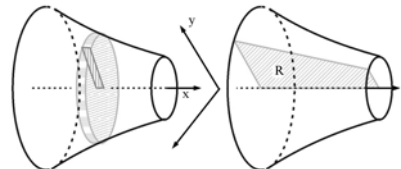
Elementair vol. elementje:

$$dV = \pi f(x)^2 dx$$



Volume:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$



Booglengte v.e. vlakke kromme

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\Delta l}{\Delta s} = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}$$

Vermits $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta s} = 1$ geldt bij
limietovergang $\Delta x \rightarrow 0$

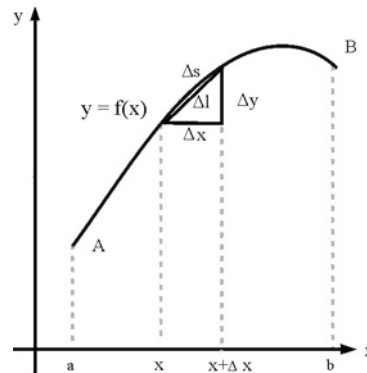
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Differentiaal:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Booglengte:

$$\text{boog } AB = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Wiskunde: Rijen en reeksen

Introductie

Griekse filosoof Zeno (5de eeuw v.C.)



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = ?$$



Wat bedoelen we met de som van een oneindige reeks getallen? We zullen nagaan welke de voorwaarden zijn opdat een oneindige som

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

naar een eindige waarde convergeert.

Rij (sequence)

Een rij van reële getallen is een functie waarvan het domein de verzameling is van de positieve gehele getallen. De waarden aangenomen door de functie worden de termen van de rij genoemd. Notatie: $\{a_n\}$

$$Vb: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Reeks (series)

Indien $\{a_n\}$ een rij is, dan wordt de oneindige som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks genoemd.

$$Vb: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{8}{9} + \frac{32}{27} + \dots$$

Rijen: voorbeelden

Voorbeeld: $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ De n-de term is: $\frac{n}{n+1}$

De termen zijn: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Merk op dat: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Voorbeeld: $\{(-1)^n\}$

De termen zijn: $-1, +1, -1, +1, \dots$

Voorbeeld: $\{a_n\}$ met: $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

De termen zijn: $2; 2.5; 2.6667; 2.70833; 2.71667; \dots$

De rij convergeert naar: $e = 2,718281828\dots$

Reeks: convergentie

- Een (oneindige) reeks is convergent als de som van de n eerste termen steeds dichtert nadert tot een getal S als men n laat toenemen.
- Een reeks is convergent als voor ieder willekeurig vooropgesteld klein getal $\epsilon > 0$ een getal N bestaat zodat voor iedere $n > N$ de betrekking $|S_n - S| < \epsilon$ geldt.

$$S_n = \sum_{n=1}^N a_n$$

Machtreeks: Mac Laurin (1/2)

- Een machtreeks is een oneindige reeks v.d. gedaante

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Deze reeks is functie van x: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$

- Omgekeerd kan elke functie $f(x)$ als een machtreeks geschreven worden

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

op voorwaarde dat ze convergeert.

Machtreeks: Maclaurin (2/2)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Dan is: $f(0) = a_0$

$$a_0 = f(0)$$

Verder: $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$$f'(0) = a_1$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots$$

$$f''(0) = 2a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$f^{(3)}(x) = 6a_3 + \dots$$

$$f^{(3)}(0) = 6a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{6} f^{(3)}(0)$$

...

...

...

Algemeen: $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

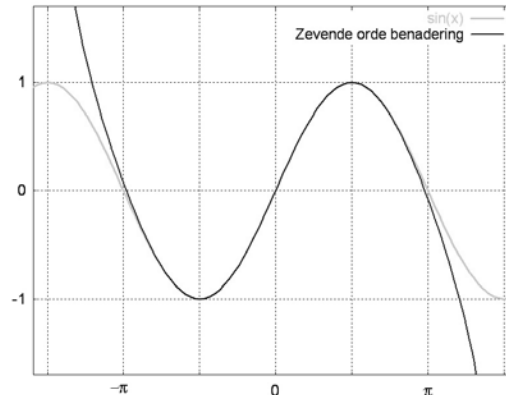
Zodat: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots$

Opmerking: $f(x)$ en alle $f^{(n)}(x)$ moeten eindig zijn in $x = 0$

Maclaurin reeks: vb: sin(x)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \\ f^{(5)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(6)}(x) &= -\sin(x) \\ &\dots \end{aligned}$$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Machtreeks: Taylor

Indien $f(x)$ bij $x=d$ een afgeleide heeft voor elke orde n , dan kan men algemeen schrijven:

$$f(x) = f(d) + (x-d)f'(d) + \frac{(x-d)^2}{2!} f''(d) + \dots + \frac{(x-d)^n}{n!} f^{(n)}(d) + \dots$$

of:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-d)^n}{n!} f^{(n)}(d)$$

Merk op: De Taylor reeks wordt een Maclaurin reeks bij $x=0$

Voorbeeld:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Machtreeksen: convergentie

Test v. D'Alembert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ is } \begin{cases} \text{convergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| < 1 \\ \text{divergeert als } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| > 1 \end{cases}$$



1717-1783

Opmerking: De test geeft geen antwoord als de limiet = 1

Vermits de limiet functie kan zijn van x, is het mogelijk dat de reeks slechts convergeert binnen een bepaald interval voor x

Convergentiestraal R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{divergeert} & ? & \text{convergeert} & ? & \text{divergeert} \\ & & \bullet & & \\ & \text{d-R} & \text{d} & \text{d+R} & \end{array}$$

Convergentie machtreeksen: vb

Voorbeeld: $f(x) = 1 + \frac{x}{1^1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$

d'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{xn^n}{(n+1)^{n+1}} \right| = 0 < 1$

De reeks convergeert voor alle x-waarden

Voorbeeld: $f(x) = 1 + 4x + 4^2 x^2 + \dots + 4^n x^n + \dots$

d'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} x^{n+1}}{4^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |4x| = |4x|$

Convergentiestraal R: $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1}}{4^n} \right| = 4$

Convergentie-interval: $] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$ $\begin{array}{ccccccc} \text{divergeert} & ? & \text{convergeert} & ? & \text{divergeert} \\ & & \bullet & & \\ & -1/4 & & 1/4 & \end{array}$

Convergentie machtreeksen: vb

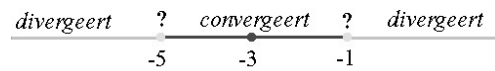
Voorbeeld: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(x+3)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n}(x+3)^n + \dots$

d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1} 2^n}{2^{n+1} (x+3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+3}{2} \right| < 1 \text{ voor } -5 < x < -1$$

Convergentiestraal R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot 1} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad R = 2$$

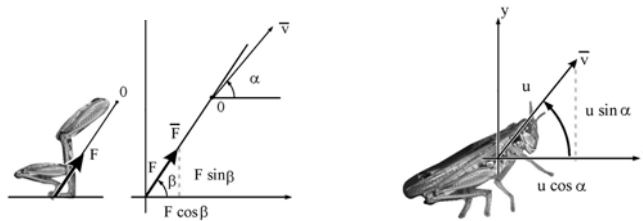


Wiskunde: Vectoren

Inleiding

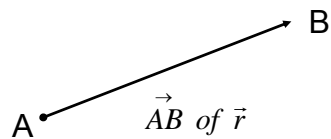
Scalair : Een fysische grootheid die enkel uitgedrukt wordt in termen van één enkel reëel getal (grootte)
Vb: temperatuur, lengte, massa, ...

Vector : Een fysische grootheid die gekarakteriseerd wordt door zowel een grootte, een richting als een zin.
Vb: kracht, snelheid, plaats, ...



Vector

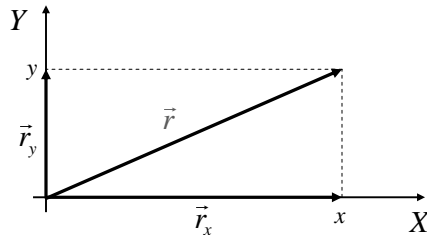
Voorbeeld: verplaatsing van punt A naar punt B



- grootte, norm: $|\vec{AB}| = AB = |\vec{r}| = r$
- richting
- zin

Componenten v.e. vector

Rechthoekig assenstelsel:



Componenten:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_x + \vec{r}_y \\ &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ &= x(1,0) + y(0,1) \\ &= (x, y)\end{aligned}$$

Enheidsvectoren:

Algemeen: $\vec{r}/|r|$

$$\vec{e}_x = \vec{i}_x = \vec{i} = (1,0) \quad |\vec{e}_x| = 1$$

$$\vec{e}_y = \vec{i}_y = \vec{j} = (0,1) \quad |\vec{e}_y| = 1$$

Norm van een vector:

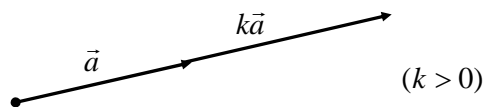
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Product van vector en scalair

Vermenigvuldiging v.e. vector \vec{a} met een reëel getal k :

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

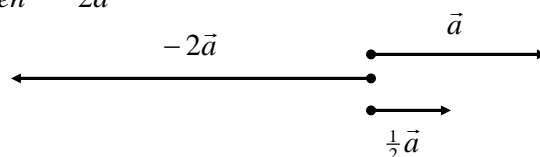
$$k\vec{a} \equiv (ka_x, ka_y, ka_z)$$



Commutativiteit: $k\vec{a} = \vec{a}k$

Norm: $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = |k|a$

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\vec{a}$ en $-2\vec{a}$



Som van vectoren

Beschouw:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y = (u_x, u_y)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = (v_x, v_y)$$

Dan:

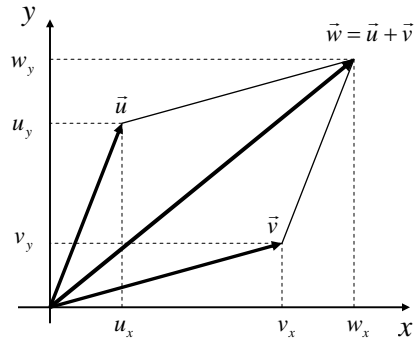
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$= (u_x, u_y) + (v_x, v_y)$$

$$= (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Dus: $\vec{w} = (w_x, w_y)$

Met:
$$\begin{cases} w_x = u_x + v_x \\ w_y = u_y + v_y \end{cases}$$



Eenheidsvectoren:

$$\vec{e}_x = (1,0) \text{ en } \vec{e}_y = (0,1)$$

Afstand tussen 2 punten

Beschouw 2 plaatsvectoren:

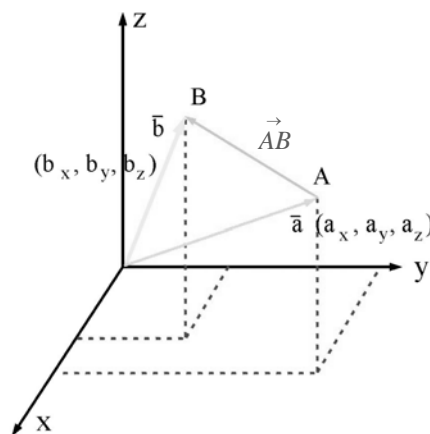
$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \quad \vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$$

Afstandsvector:

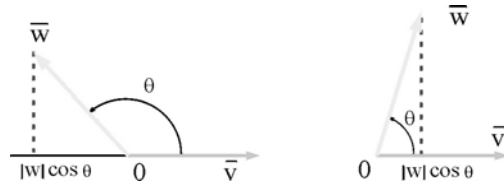
$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{b} - \vec{a} \\ &= \vec{b} + (-\vec{a}) \\ &= (b_x, b_y, b_z) + (-a_x, -a_y, -a_z) \\ &= (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) \end{aligned}$$

Afstand:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$



Scalair product (1/2)



Stel: $\vec{v} = (v_x, v_y)$
 $\vec{w} = (w_x, w_y)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

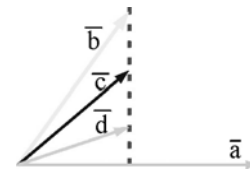
$$= vw \cos \theta$$

Ook: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y$

In 3D: $\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z = (b_x, b_y, b_z) \end{cases}$

Dan: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Scalair product: dot product



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d}$$

Scalair product (2/2)

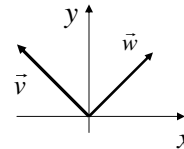
Commutatief: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

Associatief: $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (a\vec{v}) = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Distributief: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Loodrechte vectoren:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

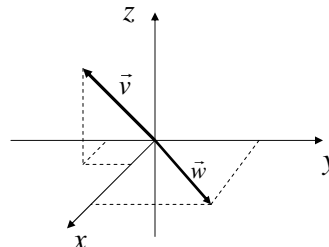


Voorbeeld:

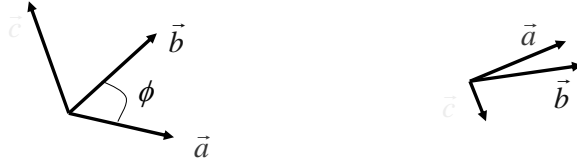
$$\vec{v} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{w} = (2, 2, 0)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$



Vectorieel product



$\vec{a} \times \vec{b}$ is een nieuwe vector \vec{c} met grootte $|\vec{c}| = ab \sin \phi$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

Vectorieel product: cross product

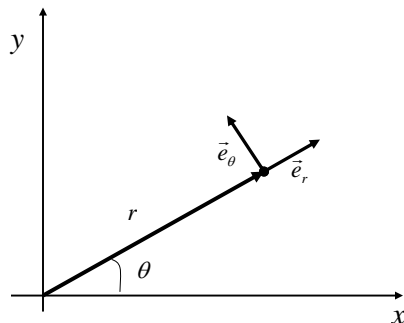
Gradiënt van een functie

Carthesische coördinaten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Poolcoördinaten:

$$\vec{\nabla} f(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$



Vector functies

Indien: \vec{s} (bv. de plaatsvector van een bewegend deeltje) functie is van een scalaire grootte (bv. tijd), dan:

$$\vec{s} \equiv \vec{s}(t)$$

of in componentvorm:

$$\vec{s}(t) = (s_x(t), s_y(t), s_z(t))$$

Dan ook:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{s}(t+h) - \vec{s}(t)}{h} \\ &= \left(\frac{ds_x}{dt}, \frac{ds_y}{dt}, \frac{ds_z}{dt} \right) \end{aligned}$$

Vectoriële afgeleide: vb

Gegeven een plaatsvector \vec{r} van een deeltje op tijdstip t . Bepaal de snelheid en absolute waarde van de snelheid.

Voorbeeld: $\vec{r}(t) = (t^2, t^3 + t^4, 1)$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t, 3t^2 + 4t^3, 0) \quad \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{4t^2 + (3t^2 + 4t^3)^2}$$

Voorbeeld: $\vec{r}(t) = (A \cos \omega t, A \sin \omega t, B)$

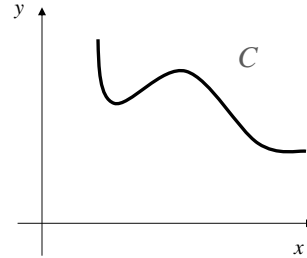
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= (-A\omega \sin \omega t, A\omega \cos \omega t, 0) \\ \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| &= \sqrt{(A\omega \sin \omega t)^2 + (A\omega \cos \omega t)^2} = |A\omega| \end{aligned}$$

Lijnintegralen

Parametervoorstelling voor C:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad \begin{cases} dx = g'(t)dt \\ dy = h'(t)dt \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$



$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

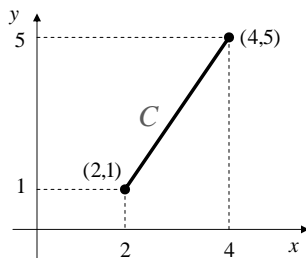
$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(g(t), h(t)) h'(t) dt$$

Lijnintegralen: Vb1

Bereken de lijnintegraal: $\int_C (xy dx + x^2 dy)$

indien C bestaat uit het lijnsegment (2,1) naar (4,5)



Parameterisatie van C

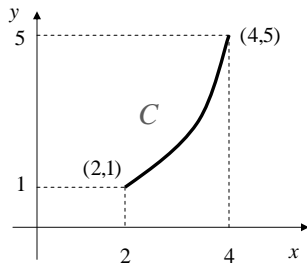
$$y = 2x - 3 \text{ met } 2 \leq x \leq 4$$

$$\text{Dan is: } dy = 2dx$$

$$\int_C (xy dx + x^2 dy) = \int_2^4 (x(2x - 3) dx + x^2 2 dx) = \int_2^4 (4x^2 - 3x) dx = \frac{170}{3}$$

Lijnintegralen: Vb2

Bereken de lijnintegraal: $\int_C (xydx + x^2dy)$ indien C wordt voorgesteld door $x = 3t - 1$ en $y = 3t^2 - 2t$ met $1 \leq t \leq \frac{5}{3}$



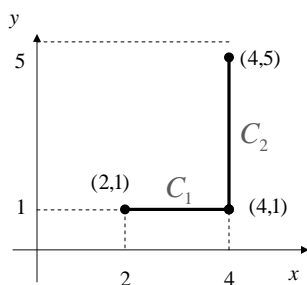
Uit parametervoorstelling:

$$\begin{cases} dx = 3dt \\ dy = (6t - 2)dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C (xydx + x^2dy) &= \int_1^{5/3} [(3t-1)(3t^2-2t)3dt + (3t-1)^2(6t-2)dt] \\ &= \int_1^{5/3} (81t^3 - 81t^2 + 24t - 2)dt = \dots = 58 \end{aligned}$$

Lijnintegralen: Vb3

Bereken de lijnintegraal: $\int_C (xydx + x^2dy)$ indien C bestaat uit de lijnsegmenten van $(2,1)$ naar $(4,1)$ en van $(4,1)$ naar $(4,5)$



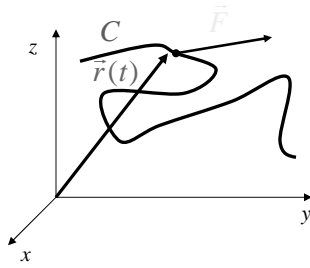
Parametervoorstelling:

$$\begin{cases} C_1 : x = t \quad y = 1 \quad 2 \leq t \leq 4 & dx = dt \\ C_2 : x = 4 \quad y = t \quad 1 \leq t \leq 5 & dy = dt \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{C_1} (xydx + x^2dy) &= \int_2^4 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_2^4 = 6 \\ \int_{C_2} (xydx + x^2dy) &= \int_1^5 16 dt = 64 \end{aligned} \right\} \int_C (xydx + x^2dy) = \int_{C_1} \dots + \int_{C_2} \dots = 70$$

Lijnintegralen: Arbeid

Krachtveld: $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{e}_x + Q(x, y, z)\vec{e}_y + R(x, y, z)\vec{e}_z$
 met P , Q en R continue functies



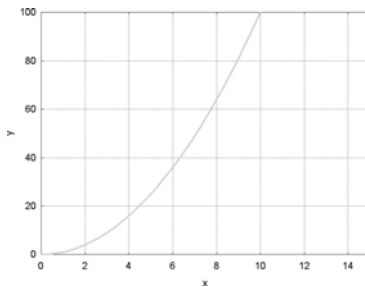
Verder is: $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
 met: $x = g(t)$; $y = h(t)$; $z = k(t)$
 de plaatsvector voor het punt
 (x, y, z) op de curve C

Arbeid W verricht wegens de kracht \vec{F} langs het pad C :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (Pdx + Qdy + Rdz)$$

Arbeid: vb

Laat C een deel zijn van de parabool $y = x^2$ tussen de punten $P(0,0)$ en $Q(3,9)$. Indien de kracht gegeven is: $\vec{F} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$, bereken dan de arbeid verricht door \vec{F} langs C .



Parametervoorstelling:

$$0 \leq t \leq 3$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2tdt \end{cases}$$

Arbeid W verricht wegens de kracht \vec{F} langs het pad C :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (-ydx + xdy) = \int_0^3 (-t^2 dt + t(2tdt)) = \int_0^3 t^2 dt = 9$$

Wiskunde: DV

DV van de eerste orde

Algemeen: diff. vgl. van de eerste orde: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$

Probleem: zoek alle functies $y(x)$ zodat: $\frac{dy(x)}{dx} = F(x, y(x))$

Mogelijke oplossingsmethode: scheiden der veranderlijken

Start met de aanname dat : $F(x, y) = g(x)h(y)$

Dan: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ of: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$

Na integratie: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$

Resultaat van de vorm: $H(y) = G(x) + C$

DV van de eerste orde

Voorbeeld: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y-1)}{x^2+1}$ Vorm: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

Scheiden der veranderlijken:

Dan: $\frac{dy}{y-1} = \frac{2x}{x^2+1} dx$ en: $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$

Uitwerken: $\ln|y-1| = \ln|x^2+1| + C$

$|y-1| = K(x^2+1)$ met: $K = e^C$

$y-1 = \pm K(x^2+1)$

Dus: $y = 1 + K(x^2+1)$ waarbij K elke willekeurige constante is

DV van de eerste orde

Voorbeeld: $2y + (xy + 3x)\frac{dy}{dx} = 0$ Vorm: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

Scheiden der veranderlijken:

Herschrijven : $2ydx + (xy + 3x)dy = 0$

Delen door xy : $\frac{2}{x}dx + \left(1 + \frac{3}{y}\right)dy = 0$ of : $2\frac{dx}{x} = -\left(1 + \frac{3}{y}\right)dy$

Na integratie : $2\ln|x| = -(y + 3\ln|y|) + C$

of : $\ln|x|^2 + \ln|y|^3 = C - y$ of : $\ln|x|^2|y|^3 = C - y$

zodat : $|x|^2|y|^3 = ke^{-y}$

Eerste orde lineaire DV

Het zijn DV van de vorm: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

1) $Q(x)=0$ Dan: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

Scheiden van de veranderlijken: $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$

Na integratie: $\ln y = -\int P(x)dx + C_1$

of: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Eerste orde lineaire DV

Voorbeeld: Zoek de integraal van: $y'+2y=0$ met beginvoorwaarde $y(1)=0.4$ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

Oplossing: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ met: $P(x) = 2$

Dan: $\int P(x)dx = \int 2dx = 2x$

zodat: $y = Ce^{-2x}$

Beginvoorwaarde: $y(1) = 0.4 \rightarrow Ce^{-2} = 0.4$
 $\rightarrow C = 0.4e^2$

Integraal: $y = 0.4e^{2-2x}$

Eerste orde lineaire DV

Algemeen geval $Q(x) \neq 0$: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Reeds oplossing voor $Q(x) = 0$: nl: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

2) $Q(x) \neq 0$

Voor de algemene oplossing schrijven we C als een nog onbekende functie van x , nl: $C(x)$ zodat:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Eerste orde lineaire DV

Algemeen geval $Q(x) \neq 0$: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

met: $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ en: $\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx}$

Invullen:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - \cancel{CP(x)e^{-\int P(x)dx}} + \cancel{P(x)C}e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

waaruit:

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + \Gamma$$

zodat:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left(\Gamma + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

Eerste orde lineaire DV (vb.1)

Integreer: $\frac{dy}{dx} - y = e^x$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\Gamma + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

In dit geval is: $P(x) = -1$ en $Q(x) = e^x$

Nu is: $\int P(x)dx = -\int dx = -x$

zodat: $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int e^x e^{-x} dx = x + C$

De algemene integraal is dan: $y = e^x(C + x)$

Eerste orde lineaire DV (vb.2)

Integreer: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3 + 1$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\Gamma + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

In dit geval is: $P(x) = -\frac{1}{x}$ en $Q(x) = x^3 + 1$

Nu is: $\int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$ en: $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x$

zodat: $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int (x^3 + 1) \frac{dx}{x} = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + \ln x$

De algemene integraal is dan: $y = x(C + \frac{x^3}{3} + \ln x)$

Eerste orde lineaire DV (vb.3)

Integreer: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{1}{1-x}$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\Gamma + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

In dit geval is: $P(x) = -\frac{1}{x}$ en $Q(x) = \frac{1}{1-x}$

Nu is: $\int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$ en: $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x$

zodat: $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{1-x} \frac{dx}{x} \stackrel{P.B.}{=} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$
 $= \ln x - \ln(1-x) = \ln \frac{x}{1-x}$

De algemene integraal is dan: $y = x \left(C + \ln \frac{x}{1-x} \right)$

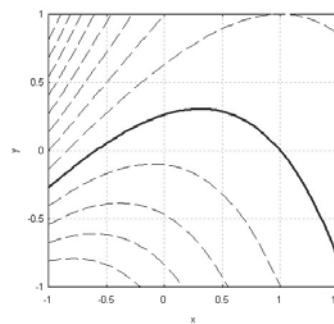
Eerste orde lineaire DV (vb.4)

Los op: $\frac{dy}{dx} - y = -x$ met $y(1) = 0$

$P(x) = -1$ $Q(x) = -x$

$\int P(x)dx = -x$ en: $e^{-\int P(x)dx} = e^x$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = -\int xe^{-x} dx = -\int ye^y dy$
 $= xe^{-x} + e^{-x}$



De algemene integraal is dan: $y = e^x(C + xe^{-x} + e^{-x}) = x + 1 + Ce^x$

Wegens $y(1) = 0$ volgt: $Ce + 2 = 0$ of: $C = -2e^{-1}$

Particuliere integraal: $y = x + 1 - 2e^x$

2de orde lineaire DV

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{met } a \text{ en } b \text{ constanten}$$

Voorgestelde integraal: $y = e^{\lambda x}$ met λ een constante

Invullen in de DV geeft: $y'' + ay' + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$

Aan de originele DV is dan enkel voldaan als: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Dit wordt de *karakteristieke vergelijking* genoemd.

De oplossingen worden bepaald door de discriminant:

$D = a^2 - 4b$ We onderscheiden $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$

Tweede orde lineaire DV: $D > 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{Geval 1: } D = a^2 - 4b > 0$$

De waarden voor λ zijn reëel en verschillend:
$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{D}) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{D}) \end{cases}$$

De integraal wordt dan: $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

Voorbeeld:

$y'' - 3y' + 2y = 0$ De karakteristieke vgl is: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

Vermits $D = 1 > 0$ en de wortels $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$ zijn,

vindt men voor de algemene integraal: $y = Ae^{2x} + Be^x$

Tweede orde lineaire DV: D=0

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{Geval 2: } D = a^2 - 4b = 0$$

Dan is $\lambda = -\frac{a}{2}$ een dubbele wortel v.d. karakteristieke vgl.

Bijgevolg is $e^{\lambda x}$ een oplossing, maar ook $x e^{\lambda x}$ (ga na)

De algemene integraal wordt dan: $y(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}$

Voorbeeld:

$y'' - 6y' + 9y = 0$ De karakteristieke vgl is: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

Vermits $D=0$, is de dubbele wortel van deze vgl: $\lambda = -3$

en volgt voor de algemene integraal: $y(x) = (A + Bx)e^{-3x}$

2de orde lineaire DV: herhaling

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

Voorgestelde oplossing: $y = e^{\lambda x}$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Stel: $D = a^2 - 4b$

• $D > 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$ $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

• $D = 0$ $\lambda = \frac{-a}{2}$ $y(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}$

• $D < 0$? ?

Interludium: definitie e^{ix} en e^{-ix}

Definitie: $i^2 = -1$ Dan is $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; ...

Beschouw: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ $-\infty < x < \infty$

Substitueer: $x \rightarrow ix$ Dan:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

Dus: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

2de orde lineaire DV: $D < 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{Geval 3: } D = a^2 - 4b < 0$$

De wortels zijn dan complex: $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{D})$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{D})$

$$\text{Herschrijven: } \begin{cases} \lambda_1 = p + qi \\ \lambda_2 = p - qi \end{cases} \quad \text{met: } \begin{cases} p = -a/2 \\ q = \sqrt{-D}/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Dan: } y(x) &= Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{(p+qi)x} + Be^{(p-qi)x} = e^{px}(Ae^{iqx} + Be^{-iqx}) \\ &= e^{px}(A \cos qx + iA \sin qx + B \cos qx - iB \sin qx) \\ &= e^{px}[(A+B) \cos qx + i(A-B) \sin qx] \end{aligned}$$

De integraal wordt dan: $y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$

Voorbeeld: $D < 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Beginvoorwaarden: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ $D = -16 < 0$ $\sqrt{D} = \pm i4$

$$\text{Bijgevolg: } \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm i2$$

Algemene integraal: $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$$\text{BVW: } y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Verder: } y'(x) &= e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) - e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \\ &= e^{-x}(-2C_1 - C_2) \sin 2x + e^{-x}(2C_2 - C_1) \cos 2x \end{aligned}$$

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_2 - C_1 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 1/2$$

Particuliere integraal: $y(x) = e^{-x}[\cos 2x + (1/2)\sin 2x]$

2de orde lineaire DV

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad \text{met } a \text{ en } b \text{ constanten}$$

Stelling:

De algemene integraal $y(x)$ van de DV met tweede lid, is de som van een willekeurige partikuliere oplossing $y^*(x)$ van deze DV en van de algemene integraal $y_0(x)$ van de overeenstemmende DV zonder tweede lid: $y'' + ay' + by = 0$

$$\text{Dwz: } y(x) = y_0(x) + y^*(x)$$

Eenmaal de algemene integraal van de DV zonder tweede lid gekend, wordt het probleem herleid tot het vinden van een *willekeurige partikuliere oplossing* v.d. DV met 2de lid.

2de orde lineaire DV

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

Bijzonder geval: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

- α is geen wortel van de karakteristieke vgl $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Dan: $y^*(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$

- α is enkelvoudige wortel van de karakteristieke vgl

Dan: $y^*(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

- α is dubbele wortel van de karakteristieke vgl $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Dan: $y^*(x) = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$

met $Q_n(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ waarbij de coëfficiënten $\{A_n\}$ bepaald worden via substitutie van $y^*(x)$ in de volledige DV.

DV met 2de lid: Vb 1

Gegeven: $y'' + 4y' + 3y = x$

- Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ waaruit: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -3$

Algemene integraal: $y_0(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

- Het rechterlid is van de vorm: xe^0 Vermits '0' geen wortel is van $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ kan men de particuliere integraal schrijven als $y^*(x) = A_0 + A_1x$.

Invoeren: $0 + 4A_1 + 3(A_0 + A_1x) = x$ of $3A_1x + (4A_1 + 3A_0) = x$

Hieruit: $\begin{cases} 3A_1 = 1 \\ 4A_1 + 3A_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/3 \\ A_0 = -4/9 \end{cases} \longrightarrow y^*(x) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$

Algemene integraal: $y(x) = y_0(x) + y^*(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$

DV met 2de lid: Vb 2 (1/2)

Gegeven: $y''+9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

- Het rechterlid is van de vorm: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$
- Algemene integraal v.h. linkerlid

$$y''+9y = 0$$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + 9 = 0$ Hier is: $D < 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$p = 0 ; q = 3$$

Algemene integraal van het linkerlid:

$$y_0(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

DV met 2de lid: Vb 2 (2/2)

- Particuliere integraal $y''+9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

Vermits '3' geen wortel is van $\lambda^2 + 9 = 0$ kan men de

de particuliere integraal schrijven als $y^*(x) = (A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{3x}$

Nu: $y^{*'}(x) = (A_0 + A_1x + A_2x^2)3e^{3x} + (A_1 + 2A_2x)e^{3x}$

$$y^{*''}(x) = (A_0 + A_1x + A_2x^2)9e^{3x} + 2(A_1 + 2A_2x)3e^{3x} + 2A_2e^{3x}$$

$$9(A_0 + A_1x + A_2x^2) + 6(A_1 + 2A_2x) + 2A_2 + 9(A_0 + A_1x + A_2x^2) = x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 18A_2 = 1 \\ 18A_1 + 12A_2 = 0 \\ 18A_0 + 6A_1 + 2A_2 = 1 \end{cases} \begin{cases} A_0 = 5/81 \\ A_1 = -1/27 \\ A_2 = 1/18 \end{cases} \quad y^*(x) = \left(\frac{5}{81} - \frac{1}{27}x + \frac{1}{18}x^2 \right) e^{3x}$$

Algemene integraal: $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{x^2}{18} - \frac{x}{27} + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$

DV met 2de lid: Vb 3 (1/2)

Gegeven: $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$

- Het rechterlid is van de vorm: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$
- Algemene integraal v.h. linkerlid

$$y'' - 7y' + 6y = 0$$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ Nu is: $D = 25 > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \quad \text{of:} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Algemene integraal van het linkerlid:

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$$

DV met 2de lid: Vb 3 (2/2)

- Particuliere integraal $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$

“1” is een enkelvoudige wortel is van $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

Dan: particuliere integraal: $y^*(x) = x(A_0 + A_1 x)e^x = (A_0 x + A_1 x^2)e^x$

Nu: $y^{*'}(x) = (A_0 + (2A_1 + A_0)x + A_1 x^2)e^x$

$y^{*''}(x) = (2(A_0 + A_1) + (4A_1 + A_0)x + A_1 x^2)e^x$

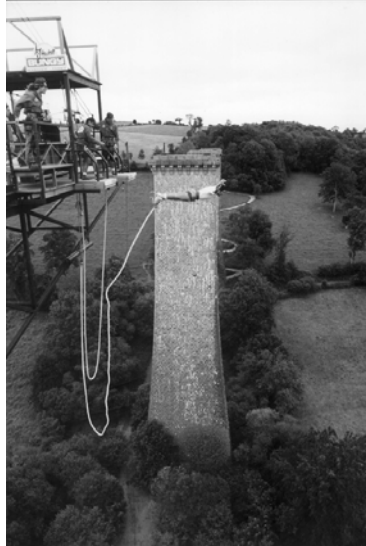
Invullen levert: $-10A_1 x + 2A_1 - 5A_0 = x - 2$

$$\begin{cases} 2A_1 - 5A_0 = -2 \\ -10A_1 = +1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 = 9/25 \\ A_1 = -1/10 \end{cases} \quad y^*(x) = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x$$

Algemene integraal:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + x \left(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25} \right) e^x$$

Harmonische beweging



Harmonische beweging

Oscillatie van een massa m aan een elastisch touw met veerconstante $k > 0$:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{of:} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{Karakteristieke vgl:} \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Wegens $D < 0$ wordt de algemene integraal:

$$x(t) = e^0 (C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t)$$

$$\text{Stelt men:} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Dan is de algemene integraal:} \quad x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$



Interludium

De harmonische beweging is gegeven door:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

Stel: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ Dan is: $\frac{C_1^2}{C^2} + \frac{C_2^2}{C^2} = 1$

Identieke vorm als: $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

Er bestaat dan altijd een hoek φ zodanig dat:

$$\cos \varphi = \frac{C_1}{C} \quad \text{en} \quad \sin \varphi = \frac{C_2}{C}$$

Dan wordt de algemene integraal :

$$x(t) = C(\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)$$

of:

$$x(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$



Gedempte harmonische beweging

Wrijvingscoëfficiënt : b

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad \text{of:} \quad x'' + \frac{b}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$

Nu is: $D = \frac{b^2}{m^2} - 4 \frac{k}{m}$

en: $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

De oplossing hangt ook nu weer af van het teken van D.



Geval 1: $D < 0$

Stel: $D = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} < 0$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Situatie treedt op als b klein is.

Dan: $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega'$

Bij de verdere bespreking zullen we, analoog aan: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
een nieuwe frequentie invoeren:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Oplissing: $x(t) = e^{-bt/2m}(C_1 \cos \omega' t + C_2 \sin \omega' t)$

of: $x(t) = Ce^{-bt/2m} \cos(\omega' t - \varphi)$



Geval 1: $D < 0$ (BVW)

$$x(t) = Ce^{-bt/2m} \cos(\omega' t - \varphi)$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Stel als beginvoorwaarde dat voor $t = 0$ de massa m de evenwichtstoestand passeert met een snelheid v_0 .

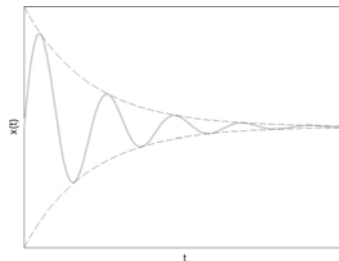
$$x(0) = C \cos(-\varphi) = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad x(t) = Ce^{-\frac{bt}{2m}} \sin(\omega' t)$$

Verder: $x'(t) = Ce^{-\frac{bt}{2m}} \omega' \cos(\omega' t) - \frac{bt}{2m} e^{-\frac{bt}{2m}} \omega' \sin(\omega' t)$

$$x'(0) = C\omega' = v_0 \quad \longrightarrow \quad C = v_0 / \omega'$$

Particuliere integraal:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega'} e^{-bt/2m} \sin(\omega' t)$$



Geval 2: $D > 0$

Is de wrijving zeer groot zodat $D > 0$, dan zijn de wortels v.d. karakteristieke vgl. reëel en verschillend:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{m} + \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}} \right) \text{ en } \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{m} - \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}} \right)$$

Vermits: $\frac{b}{m} > \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$ zijn beide wortels negatief

$$\text{met: } \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

De algemene integraal is dan:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Geval 2: $D > 0$ (BVW)

BVW:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$x(0) = 0 \longrightarrow B = -A \text{ zodat: } x(t) = A(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

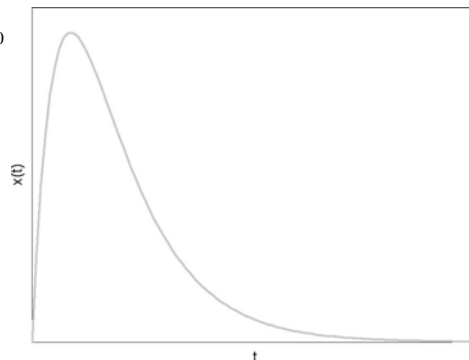
$$\text{Verder is: } x'(t) = A(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$$

$$x'(0) = v_0 \longrightarrow A(\lambda_1 - \lambda_2) = v_0$$

$$\longrightarrow A = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Particuliere integraal:

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$



Kanstheorie

Probabiliteit

De kans, of probabiliteit P wordt gedefinieerd als

$$P = \frac{\text{aantal gunstige gevallen}}{\text{aantal mogelijke gevallen}}$$

of ook:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$$

met n_A het aantal uitkomsten waarbij A optreedt, en N het aantal waarnemingen.

Ps: De laatste definitie, nl. limiet van de relatieve frequentie, is niet erg bruikbaar vermits we in de praktijk N nooit ∞ groot kunnen maken.

Probabiliteit

Vermits $0 \leq n_A \leq N$ is elke relatieve frequentie $0 \leq \frac{n_A}{N} \leq 1$ zodat voor elke probabiteit P geldt:

$$0 \leq P \leq 1$$

- Voor een absoluut zeker verschijnsel is:

$$P(A) = 1$$

- Voor een volstrekt onmogelijk verschijnsel is:

$$P(A) = 0$$

Somregel

Als twee gebeurtenissen elkaar uitsluiten, is de kans dat één van de twee gebeurtenissen zich voordoet gelijk aan de som van de kansen voor de gebeurtenissen afzonderlijk.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Voorbeeld:

Werpen van een dobbelsteen:

- Kans dat de uitkomst een 2 is: $P(2) = 1/6$
- Kans dat de uitkomst een 3 is: $P(3) = 1/6$
- Kans dat de uitkomst een 5 is: $P(5) = 1/6$

Kans op werpen van òf een 2 òf een 3 òf een 5: $P = 1/2$

Productregel

De kans dat 2 gebeurtenissen tegelijk optreden is gelijk aan het product van de kans van de ene gebeurtenis met de voorwaardelijke kans van de andere gebeurtenis:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Speciaal geval:

Indien de kans van B onafhankelijk is van gebeurtenis A:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

De kans op het gezamenlijk optreden van twee onafhankelijke gebeurtenissen is gelijk aan het product van de kansen van elke gebeurtenis afzonderlijk.

Voorbeeld

Drie bedienden, A, B, en C delen een kantoor slechts 1 telefoon. Willekeurige oproepen komen binnen voor A, B, en C. Deze oproepen zijn voor $\frac{2}{5}$ bestemd voor A, $\frac{2}{5}$ voor B en $\frac{1}{5}$ voor C. In verband met hun werk (buitendienst) zijn de bedienden verplicht op willekeurige tijdstippen het kantoor te verlaten. Zo is A afwezig gedurende $\frac{1}{2}$ van de normale werktijd; B en C elk $\frac{1}{4}$ van hun werktijd.

Voor oproepen tijdens de kantooruren, bereken de kans dat:

- 1) Niemand aanwezig is om de oproep te beantwoorden
- 2) De oproep kan beantwoord w door de gewenste persoon
- 3) Drie opeenvolgende oproepen bestemd zijn voor dezelfde persoon.
- 4) Drie opeenvolgende oproepen bestemd zijn voor verschillende personen
- 5) Een persoon die B wil spreken, meer dan 3x moet bellen

Voorbeeld (1/5)

	A	B	C
Voor:	2/5	2/5	1/5
Afw.:	1/2	1/4	1/4

1) Kans dat niemand aanwezig is om oproep te beantwoorden

De aanwezigheid van A sluit de aanwezigheid van B niet uit. De somregel mag bijgevolg niet gebruikt worden.

~~SOMREGEL~~

De aanwezigheid van A hangt niet af van de aanwezigheid van B. Idem dito voor C. Deze gebeurtenissen zijn dus onafhankelijk van elkaar.

PRODUCTREGEL

$$P_{A,B,C \text{ afwezig}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

Voorbeeld (2/5)

	A	B	C
Voor:	2/5	2/5	1/5
Afw.:	1/2	1/4	1/4

2) Oproep kan beantwoord worden door de gewenste persoon

De oproep is ofwel voor A, ofwel voor B, ofwel voor C. Deze kansen sluiten elkaar uit. Dus:

SOMREGEL

Kans dat oproep voor A is, is onafhankelijk van het feit of A al dan niet aanwezig is. Idem dito voor B en C. Daarom:

PRODUCTREGEL

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{GA} + P_{GB} + P_{GC} \\ &= P_{OA}P_A + P_{OB}P_B + P_{OC}P_C \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Voorbeeld (3/5)

	A	B	C
Voor:	2/5	2/5	1/5
Afw.:	1/2	1/4	1/4

3) 3 opeenvolgende oproepen bestemd voor dezelfde persoon
3 oproepen voor A sluit 3 oproepen voor B en C uit, en vice versa. We maken dus gebruik van de

SOMREGEL

1^{ste} oproep voor A sluit 2^e oproep voor A en 3^e oproep voor A niet uit. Deze zijn bovendien onafhankelijk:

PRODUCTREGEL

$$\begin{aligned}
 P &= P_{3A} + P_{3B} + P_{3C} \\
 &= P_{A1}P_{A2}P_{A3} + P_{B1}P_{B2}P_{B3} + P_{C1}P_{C2}P_{C3} \\
 &= \frac{2}{5} \frac{2}{5} \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \frac{2}{5} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5} = \frac{17}{125}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld (4/5)

	A	B	C
Voor:	2/5	2/5	1/5
Afw.:	1/2	1/4	1/4

4) 3 opeenvolgende oproepen bestemd voor
verschillende personen

Mogelijke oproepsequentie: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
Deze sluiten elkaar uit:

SOMREGEL

De eerste oproep voor A sluit de tweede oproep voor A niet uit, enz. Bovendien zijn deze twee feiten onafhankelijk:

PRODUCTREGEL

$$\begin{aligned}
 P &= P_{ABC} + P_{ACB} + P_{BAC} + P_{BCA} + P_{CAB} + P_{CBA} \\
 &= P_A P_B P_C + P_A P_C P_B + P_B P_A P_C + P_B P_C P_A + P_C P_A P_B + P_C P_B P_A \\
 &= \frac{2}{5} \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \frac{1}{5} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{2}{5} = \frac{24}{125}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld (5/5)

	A	B	C
Voor:	2/5	2/5	1/5
Afw.:	1/2	1/4	1/4

5) Kans dat persoon die B wil spreken meer dan 3x moet bellen

Aanwezigheid van B bij eerste oproep vertelt niets over de aanwezigheid van B bij de tweede oproep, etc. Deze gebeurtenissen zijn bovendien onafhankelijk. Vandaar:

PRODUCTREGEL

De kans dat B niet aanwezig is bij elk van de oproepen is dan:

$$\begin{aligned} P &= P_{\bar{B}1} P_{\bar{B}2} P_{\bar{B}3} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Permutaties, Variaties & Combinaties

Permutatie: Beschikt men over N elementen, dan kan men die op verschillende manieren rangschikken:

$$P_N = N(N-1)(N-2)\dots 3.2.1 = N!$$

Variatie: Op hoeveel manieren kan men uit N elementen n elementen kiezen, waarbij de volgorde van belang is?

$$V_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Combinatie: Op hoeveel manieren kan men uit N elementen n elementen kiezen, waarbij de volgorde niet van belang is?

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Medische statistiek

Sensitiviteit: Kans op een abnormaal resultaat bij aanwezigheid van ziekte.

$$1 - \text{sensitiviteit} = \text{FOUT-NEGATIEF KANS}$$

Specificiteit: Kans op een normaal resultaat bij afwezigheid van ziekte.

$$1 - \text{specificiteit} = \text{FOUT-POSITIEF KANS}$$

Prevalentie: Algemene kans dat een individu binnen de geteste populatie aan de ziekte lijdt.

VOORAFKANS

Medische statistiek

TESTUITKOMST			
	Afwijkende cellen	Geen afwijkende cellen	TOTAAL
WEL borst-kanker	283	51	334
GEEN borst-kanker	27	612	639
TOTAAL	310	663	973

Sensitiviteit: $283/334 = 0,85$ → Fout-negatief kans: 0,15

Specificiteit: $612/639 = 0,96$ → Fout-positief kans: 0,04

Prevalentie: $334/973 = 0,34$

Medische statistiek

	Abnormale testuitslag	Normale testuitslag	TOTAAL
Ziekte aanwezig	(sens)(prev)	(1-sens)(prev)	(prev)
Ziekte afwezig	(1-spec)(1-prev)	(spec)(1-prev)	(1-prev)
TOTAAL	P(T ⁺)	P(T ⁻)	1

Voorspellende waarde

- Kans “ziek” bij “afwijkende” test: $P(D | T^+) = \frac{(sens)(prev)}{(sens)(prev) + (1 - spec)(1 - prev)}$
- Kans “niet ziek” bij normale uitslag: $P(D^- | T^-) = \frac{(spec)(1 - prev)}{(spec)(1 - prev) + (1 - sens)(prev)}$

Ideale test: (sens)=(spec)=1, want voorspellende waarde 1

Statistiek: enkele begrippen

Populatie: de gehele groep waarop men een meting wil uitvoeren.

Steekproef: door eerlijk toeval, aselekt gekozen uit een populatie

Veranderlijken: 1) discrete veranderlijken
2) continue veranderlijken

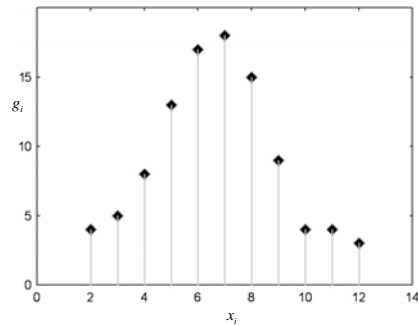
Frequenties: 1) absolute frequentie g_i
2) relatieve frequentie f_i
3) cumulatieve absolute frequentie $\sum_{k=1}^i g_k$
4) cumulatieve relatieve frequentie $\sum_{k=1}^i f_k$

Punt- of staafdiagram

Voor discrete veranderlijken wordt de frequentie g_i voorgesteld als punten (punctdiagram) of punten die verbonden zijn via verticale lijnen met de abscis (staafdiagram).

Voorbeeld: 100 maal werpen met 2 dobbelstenen

i	x_i	g_i	f_i	Cum. g_i	Cum f_i
1	2	4	0,04	4	0,04
2	3	5	0,05	9	0,09
3	4	8	0,08	17	0,17
4	5	13	0,13	30	0,30
5	6	17	0,17	47	0,47
6	7	18	0,18	65	0,65
7	8	15	0,15	80	0,80
8	9	9	0,09	89	0,89
9	10	4	0,04	93	0,93
10	11	4	0,04	97	0,97
11	12	3	0,03	100	1,00
		100	1,00		

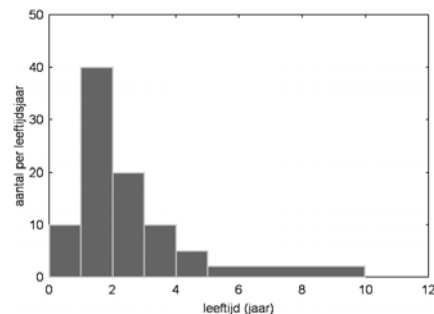


Histogram

Voor continue veranderlijken wordt een grafische voorstelling geconstrueerd, bestaande uit rechthoeken met basis Δx_i , gecentreerd rond x_i en hoogte zodanig dat de oppervlakte evenredig is met de absolute frequentie.

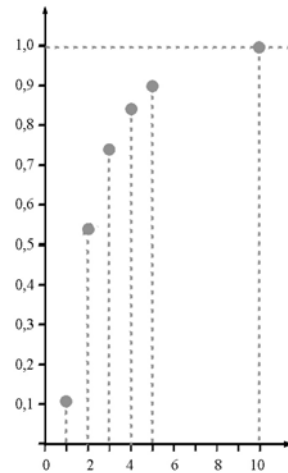
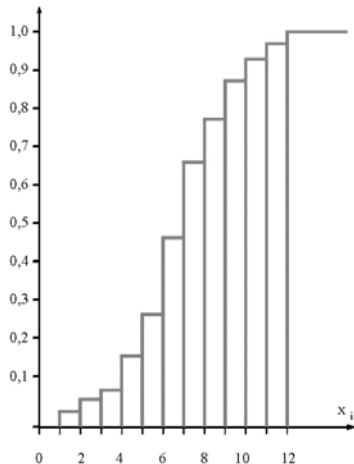
Voorbeeld: Een bep. kinderziekte veroorzaakt vaak de dood. De tabel geeft informatie over de leeftijd van 95 kinderen overleden als gevolg van deze ziekte.

Leeftijd (jaar)	frequentie
0-1	10
1-2	40
2-3	20
3-4	10
4-5	5
5-10	10
100	1,00



Cumulatieve distributie

Cumulatieve verdelingen worden gevormd door partiële sommatie van de kansen.



Centrale waarden

- mediaan: middenste waarde
- modus: meest voorkomende waarde
- gemiddelde: rekenkundig gemiddelde

Populatie:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Steekproef:

Schatter voor de gemiddelde waarde van de populatie:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Spreadingsmaten

Populatie

Steekproef

Standaard-
afwijking:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Variantie:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2$$

Merk op:

$$S^2 = \frac{SSq}{\nu}$$

ν : aantal vrijheidsgraden

SSq : sum of squares

$$= \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{\sum_{i=1}^k f_i - 1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Distributies

Binomiale verdeling

Beschouw een populatie met de meest eenvoudige verdeling: de dichotomie. De elementen kunnen hierbij slechts 2 kenmerken aannemen: kenmerk A of kenmerk B.

$$\text{Stel: } \begin{cases} N = \text{aantal elementen v.e. aselecte steekproef} \\ x = \text{aantal elementen met kenmerk A} \\ p = \text{kans op kenmerk A} \\ q = \text{kans op kenmerk B} = 1 - p \end{cases}$$

Dan is de kans dat een aselecte proef x elementen oplevert:

$$f_{N,p}(x) = C_N^x p^x q^{N-x} = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x}$$

Dit wordt de binomiale verdeling genoemd.

Parameters v.e. binomiale verdeling

Het gemiddelde waarde van de binomiale verdeling:

$$\mu = \sum_{x=0}^N x \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{x=1}^N x \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} = Np \sum_{x=1}^N \frac{(N-1)!}{(x-1)!(N-x)!} p^{x-1} q^{N-x} \\ &= Np \sum_{x=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{x!(N-x-1)!} p^x q^{N-x-1} = Np \sum_{x=0}^{N-1} C_{N-1}^x p^x q^{N-1-x} \\ &= Np(p+q)^{N-1} = Np \end{aligned}$$

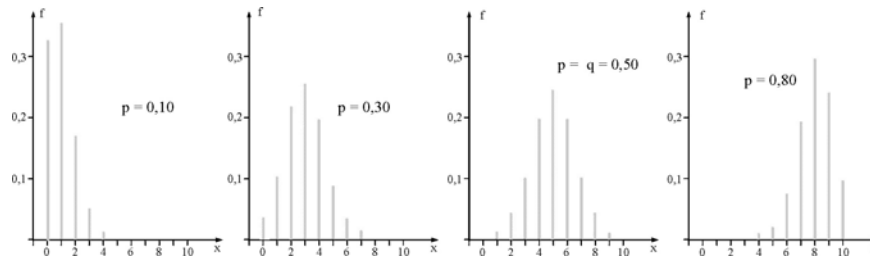
Bijgevolg: $\mu = Np$

Men bewijst analoog dat: variantie: $\sigma^2 = npq = np(1-p)$

standaardafwijking: $\sigma = \sqrt{npq}$

Binomiale verdeling: voorbeelden

$$f = C_{10}^x p^x q^{10-x} \quad (N = 10)$$



Voor $p=0,1$ is de verdeling geconcentreerd rond lage waarden van x , met zeer lage kansen op hoge waarden. Merk op dat de verdeling asymmetrisch is. Voor $p=q=0,5$ is de spreiding het grootst.

Binomiale verdeling: vb

Aantal meisjes in families met 4 kinderen. Volgens bepaalde gegevens is de kans op geboorte v.e. meisje: $p=0,49$

Geslacht laatst geboren kind is onafhankelijk v.h. geslacht van de andere kinderen. Ook dichotomie.

Daarom: binomiaalverdeling: $f(x) = C_4^x (0,49)^x (0,51)^{4-x}$

Aantal meisjes x	C_4^x		Kans $f(x)$
0	1	$(0,51)^4$	0,0677
1	4	$(0,49)(0,51)^3$	0,2600
2	6	$(0,49)^2(0,51)^2$	0,3747
3	4	$(0,49)^3(0,51)$	0,2400
4	1	$(0,49)^4$	0,0576

Merk op: ook hier is de som der probabiliteiten gelijk aan 1

Poisson verdeling

Als men te doen heeft met het voorkomen van

- onderling onafhankelijke, geïsoleerde gebeurtenissen
- een continuum van tijd of ruimte,
- een groot aantal gebeurtenissen (in feite ∞ groot)
- een zeer kleine kans op voorkomen ($p \ll 1$)

dan is de kans op x gebeurtenissen:

$$f_{N,p}(x) = C_N^x p^x q^{N-x} \longrightarrow f_{\mu}(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Binomialeverdeling

Poissonverdeling

met $\mu =$ het gemiddelde $= \sigma^2$ (variantie).

De Poissonverdeling is dus een goede benadering van de binomiale verdeling met $\mu = pN$, $N \gg 1$ en $p \ll 1$

Poisson verdeling

Afleiding $N \rightarrow \infty; p \rightarrow 0$

$$f_{N,p}(x) = C_N^x p^x q^{N-x} = \frac{N!}{(N-x)!x!} p^x (1-p)^{N-x} = \frac{N!}{(N-x)!x!} p^x \frac{(1-p)^N}{(1-p)^x}$$

$$\text{Nu is: } \frac{N!}{(N-x)!} = N(N-1)(N-2)\dots(N-x+1) \cong N^x$$

Verder is: $(1-p)^x \cong 1^x \cong 1$ zodat:

$$f_{N,p}(x) \cong \frac{(Np)^x}{x!} (1-p)^N = \frac{\mu^x}{x!} (1-p)^{\frac{\mu}{p}} = \frac{\mu^x}{x!} \left[(1-p)^{\frac{1}{p}} \right]^{\mu}$$

Wegens: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ of: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}$ volgt tenslotte:

$$f_{N,p}(x) = C_N^x p^x q^{N-x} \xrightarrow{N \rightarrow \infty; p \rightarrow 0} f_{\mu}(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Poisson verdeling: vb

Gemiddeld aantal drukfouten per blad in een boek: 1,2.

Bereken de kans dat op een blad

a) geen fouten voorkomen b) 3 of meer fouten voorkomen

Distributie? $p \ll 1$ en $n \gg 1 \rightarrow$ Poissonverdeling

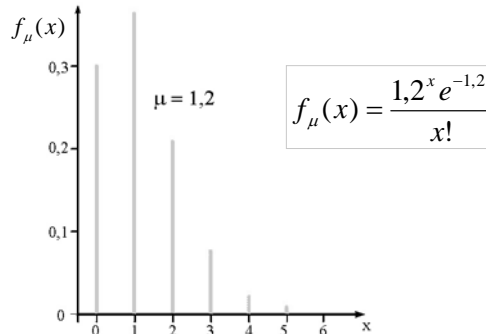
$$f(0) = \frac{1,2^0 e^{-1,2}}{0!} = 0,3012$$

$$f(1) = \frac{1,2^1 e^{-1,2}}{1!} = 0,3614$$

$$f(2) = \frac{1,2^2 e^{-1,2}}{2!} = 0,2169$$

$$f(3) = \frac{1,2^3 e^{-1,2}}{3!} = 0,0867$$

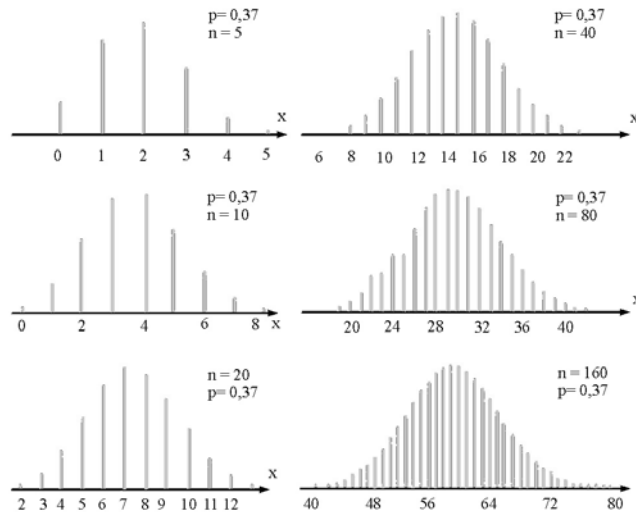
...



a) Geen fouten: $P=0,301$

b) 3 of meer fouten: $1 - (0,3012 + 0,3614 + 0,2169) = 0,1205$

Limiet van de binomiale verdeling



Binomiaalverdelingen voor verschillende n met $p=0,37$

Normale verdeling

De normale verdeling is de kansverdeling van een continu verdeelde grootte x , gespecificeerd door:

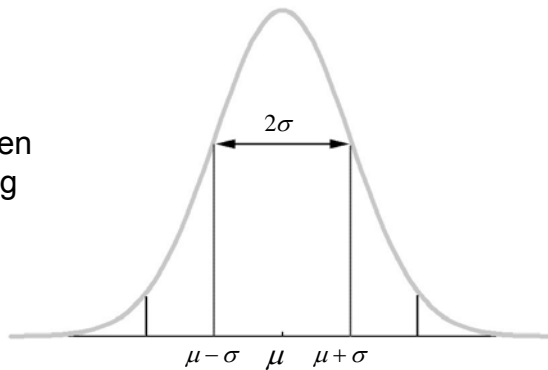
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

met μ het gemiddelde en σ de standaardafwijking

$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \rightarrow 68,2\%$

$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \rightarrow 95,4\%$

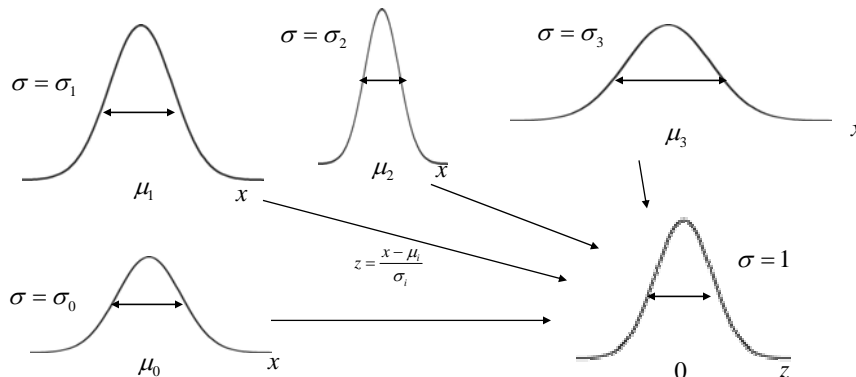
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] \rightarrow 99,7\%$



Merk op: De Gauss-curve is steeds symmetrisch rond μ

Standaardnormale verdeling

Een normaal verdeelde grootte x met gemiddelde μ en standaardafwijking σ kan door een standaardisering worden omgezet in een standaard normaal verdeelde variabele z met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1: $z = (x - \mu) / \sigma$



Standaardnormale verdeling

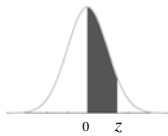
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

↓

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

↓

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



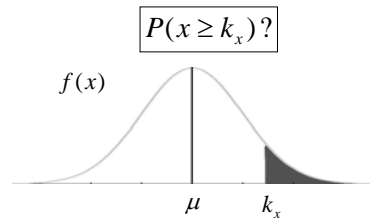
$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

Standaardnormale verdeling

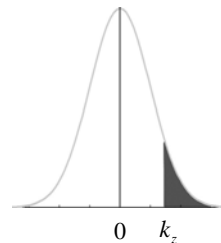
Transformatie: $f(x) = N(\mu, \sigma) \xrightarrow{z = \frac{x-\mu}{\sigma}} \phi(z) = N(0,1)$

Zowel $\phi(z)$ als zijn integraal $\psi(z)$ worden getabelleerd.



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$k_z = \frac{k_x-\mu}{\sigma}$$



$$P(z \geq k_z)?$$

$$P(z \geq k_z) = 1 - P(z \leq k_z) = 1 - (0.5 + \psi(k_z)) = 0.5 - \psi(k_z)$$

$$\text{Dan: } P(x \geq k_x) = 0.5 - \psi(k_z)$$

TABEL

Samenvatting

Binomiale verdeling (discreet)

- Dichotome verdeling
- Afhankelijk van N en p
- Exact, maar moeilijk te berekenen voor grote N

$$f_{N,p}(x) = C_N^x p^x q^{N-x}$$

Poisson verdeling (discreet)

- Benadering van de binomiale verdeling voor $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ en Np klein
- Slechts 1 parameter: $\mu = \sigma^2$

$$f_{\mu}(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Gauss verdeling (continu)

- Benadering van de binomiale verdeling voor $N \rightarrow \infty$ en Np groot

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Chi-kwadraat toets

Toetsingstheorie

Een statistische toets is een methode voor het toetsen van onderstellingen (hypotheses) omtrent niet geheel bekende populatieverdelingen, op basis van aselecte steekproeven.

- Nulhypothese H_0 ("hypothesis of no difference") en H_1 de alternatieve hypothese
- Onbetrouwbaarheidsdrempel p
- Keuze van toets en toetsingsgrootte (test statistic) waarvan de kansverdeling bij geldige H_0 bekend
- Opstellen van het beslissingschema
- Uit waarnemingen van aselecte steekproef de toetsingsgrootte berekenen. Hieruit de nulhypothese verwerpen of aanvaarden

De chi-kwadraat verdeling

De χ^2 -toets dient om na te gaan of waarnemingen afkomstig zijn uit een volledig bekende distributie.

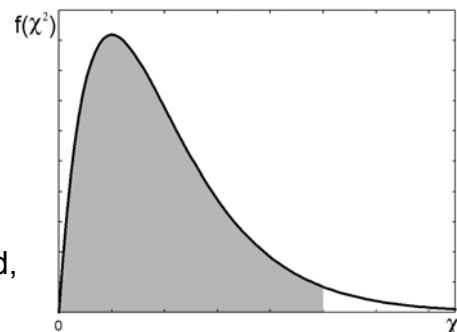
De toetsingsgrootte:
$$G = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

met

- x_i de waarneming
- μ_i de verwachtingswaarde
- σ_i de standaardafwijking

volgt een χ^2 verdeling met ν vrijheidsgraden: χ^2_{ν}

Merk op: G is een onbenoemd, positief getal.



Chi-kwadraat toets: vb

Stel dat men theoretisch verwacht dat de betrekking $a = 3 + 2f$ geldt. Men meet:

t_i	1	2	3	4	5
x_i (gemeten)	$4,9 \pm 0,2$	$7,2 \pm 0,2$	$8,6 \pm 0,3$	$11,4 \pm 0,3$	$13,1 \pm 0,3$
a_i (berekend)	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0

Toetsing:
$$G = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - a_i)^2}{\sigma_i^2} = \frac{(4,9 - 5,0)^2}{(0,2)^2} + \frac{(7,2 - 7,0)^2}{(0,2)^2} + \dots = 4,92$$

Uit de waarnemingen werd geen enkele parameter geschat zodat $v=5$.

Tabelwaarde: $\chi^2 \left(\begin{matrix} p = 0,05 \\ v = 5 \end{matrix} \right) = 11,07$

Gezien 11,07 veel groter is dan 4,92 voldoen de metingen goed aan het vooropgestelde verband.

Populatie met r categorieën: vb

Gegeven: twee variëteiten 'reukerwten'

- Purperen bloemen, lange stuifmeelkorrels
- Rode bloemen, ronde stuifmeelkorrels

Theorie Mendel:

- tweede hybride generatie geeft 4 types (categorieën)
- verhoudingen 9:3:3:1

Waarnemingen: (256 planten)

type	Theoretische kans	Waargenomen frequenties
purper, lang	9/16	177
purper, rond	3/16	30
rood, lang	3/16	30
rood, rond	1/16	19

Vraag: klopt de theorie met de waarnemingen?

Populatie met r categorieën

r categorieën

- Alle elementen van een populatie vertonen één van de kenmerken van een categorisch systeem met r categorieën.

(in vb: welk kenmerk? Hoeveel categorieën?)

- P_i is de kans van categorie i
- Probleemstelling: toetsen van nulhypothese H_0

$$\text{Vb: } H_0 : P_1 = P_2 = \dots = P_r = 1/r$$

$$\text{Vb: } H_0 : P_1 : P_2 : \dots : P_r = a : b : \dots : m$$

Toetsing

vergelijken van de waargenomen en verwachte frequenties

f_i = waargenomen frequentie in categorie i (som= n)

$e_i = nP_i$ = verwachte frequentie in categorie i onder H_0

Populatie met r categorieën

Methode

Maat: Toetsingsgrootte G :

$$G = \sum_{i=1}^r \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

G = 'gestandaardiseerd verschil'

- discreet
- positief
- als alle verschillen nul zijn, is $G=0$
- hoe slechter de overeenstemming, hoe groter de verschillen, en dus hoe groter G

Bij verwachte frequenties ≥ 5 volgt G onder H_0 bij benadering een chi-kwadraat verdeling met $r-1$ vrijheidsgraden.

Eenzijdige toetsing.

Populatie met r categorieën: vb

Nulhypothese: $H_0: P_1: P_2: P_3: P_4 = 9:3:3:1$

Onbetrouwbaarheidsdrempel: $p=0,05$

type	Theor. kans	Waargenomen freq.	Verwachte freq.
purper, lang	9/16	177	$256 \times 9/16 = 144$
purper, rond	3/16	30	$256 \times 3/16 = 48$
rood, lang	3/16	30	$256 \times 3/16 = 48$
rood, rond	1/16	19	$256 \times 1/16 = 16$

Toetsingsgrootheid:

$$G = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(177-144)^2}{144} + \frac{(30-48)^2}{48} + \frac{(30-48)^2}{48} + \frac{(19-16)^2}{16} = 24$$

Vergelijken met χ^2 -verdeling ($v=3$): $p = 0,05 \rightarrow 7,81$ $p = 0,001 \rightarrow 16,27$

Besluit: De theorie van Mendel is hier niet van toepassing

Voorbeeld: $k \times r$ tabel

Vraag: Bestaat er een verband tussen type bloedgroep en het ontstaan van gynaecologische kanker?

Onderzoek:

- cases: 310 vrouwen met gynaecologische kanker
- controles: 300 gezonde vrouwen

Nulhypothese: bloedgroepenverdelingen komen overeen

Waarnemingen:

Bloedgroep	Waargenomen frequenties		totaal
	carcinoom	controle	
O	98	113	211
A	139	110	249
B	48	57	105
AB	25	20	45
totaal	310	300	610

Chi-kwadraat op een k x r tabel

Toetsing: Komen k aselecte steekproeven uit dezelfde populatie met r categorieën?

Waarneming:

- k kolommen (de steekproeven)
- r rijen (de categorieën)
- k x r cellen (velden)

Verwachte frequenties: product v.d. randfrequenties / totaal aantal waarnemingen (n)

Toetsingsgrootheid:
$$G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Onder H_0 volgt G bij benadering een chi-kwadraat verdeling met $(r-1)(k-1)$ vrijheidsgraden. Eenzijdige toetsing.

Chi-kwadraat op een k x r tabel: vb

Vraag: Bestaat er een verband tussen type bloedgroep en het ontstaan van gynaecologische kanker?

Berekeningen:

$$G = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 5,54$$

$$\nu = (4 - 1)(2 - 1) = 3$$

$$p = 0,05$$

Bloedgroep	Waargenomen frequenties		totaal
	Carcinoom f_{ij} (e_{ij})	Controle f_{ij} (e_{ij})	
O	98 (107,2)	113 (103,8)	211
A	139 (126,6)	110 (122,4)	249
B	48 (53,3)	57 (51,7)	105
AB	25 (22,9)	20 (22,1)	45
totaal	310	300	610

De nulhypothese wordt verworpen als G groter is dan

$$\chi^2[\nu = 3, p = 0,05] = 7,82$$

Besluit: de nulhypothese kan niet verworpen worden

Onvolledige k x r tabel: vb

Vraag: In een sociologisch onderzoek wordt bij jongeren gevraagd of ze zich zorgen maken i.v.m. hun gezondheid. Volgende tabel wordt bekomen:

	jongens		meisjes	
	12-15j	16-17j	12-15j	16-17j
Reden der bezorgdheid				
Fysieke ontwikkeling	4	2	9	7
menstruatieproblemen	nvt	nvt	4	8
algemene gezondheidstoestand	42	7	19	10
geen	57	20	71	31

Probleem: de tabel bevat 2 cellen met structurele nullen (a priori lege cellen)

Opmerking: Bij toetsing wordt het aantal vrijheidsgraden verminderd met het aantal a priori lege cellen.

Onvolledige k x r tabel

Soms: Lege velden in tabellen ten gevolge van onmogelijke combinaties. Verwachte waarde is dus nul.

Probleem:

verwachte frequenties zijn niet meer berekenbaar met procedure "product marginale frequenties / n", aangezien hierdoor waarden gevonden worden die verschillend zijn van 0.

Voorwaarden:

Noemen we: $e_j = \sum_{i=1}^r e_{ij}$ en $e_i = \sum_{j=1}^k e_{ij}$

Deze marginale totalen voor de verwachte frequenties moeten gelijk zijn aan de waargenomen randfrequenties

$$n_j = \sum_{i=1}^r f_{ij} \quad \text{en} \quad n_i = \sum_{j=1}^k f_{ij}$$

Onvolledige k x r tabel

Procedure: $e_{ij}^{(0)} = 1$ voor 'normale' cellen
 $e_{ij}^{(0)} = 0$ voor cellen met 'a priori nullen'

Iteratieve procedure

- Stap 1: aanpassen startwaarden:

$$e_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}^{(0)} n_i}{e_i^{(0)}} \quad \text{met} \quad e_i^{(0)} = \sum_{j=1}^k e_{ij}^{(0)} \quad \text{en} \quad n_i = \sum_{j=1}^k f_{ij}$$

jongens		meisjes		
4	2	9	7	22
nvt	nvt	4	8	12
42	7	19	10	78
57	20	71	31	179
103	29	103	56	291

jongens		meisjes		
1	1	1	1	22
0	0	1	1	12
1	1	1	1	78
1	1	1	1	179
103	29	103	56	291

jongens		meisjes		
5.5	5.5	5.5	5.5	22
0	0	6	6	12
19.5	19.5	19.5	19.5	78
44.7	44.7	44.7	44.7	179
103	29	103	56	291

Onvolledige k x r tabel

Iteratieve procedure

- Stap 2: aanpassen waarden van eerste iteratie:

$$e_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}^{(0)} n_j}{e_j^{(0)}} \quad \text{met} \quad e_j^{(0)} = \sum_{i=1}^r e_{ij}^{(0)} \quad \text{en} \quad n_j = \sum_{i=1}^r f_{ij}$$

- enz: itereren tot fout klein genoeg is (bv <0.01)

jongens		meisjes		
5.5	5.5	5.5	5.5	22
0	0	6	6	12
19.5	19.5	19.5	19.5	78
44.7	44.7	44.7	44.7	179
103	29	103	56	291

jongens		meisjes		
8.12	2.29	7.48	4.06	22
0	0	8.16	4.44	12
28.80	8.11	26.51	14.42	78
66.08	18.60	60.85	33.08	179
103	29	103	56	291

21.954
12.594
77.835
178.619

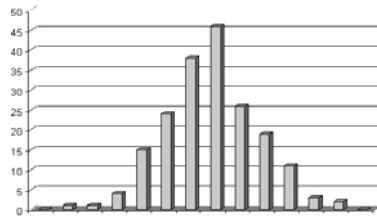
Tot slot: $G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$

χ^2 -toets voor aanpassing

Probleem

Haemoglobinegehalte wordt bepaald op bloed, verkregen uit een vingerprik bij 190 6- 7-jarige kinderen.

Is dit een steekproef van een normaal verdeeld kenmerk?



Klassegrenzen (g%)	Waargenomen frequenties
< 10.25	0
10.25 – 10.75	1
10.75 – 11.25	1
11.25 – 11.75	4
11.75 – 12.25	15
12.25 – 12.75	24
12.75 – 13.25	38
13.25 – 13.75	46
13.75 – 14.25	26
14.25 – 14.75	19
14.75 – 15.25	11
15.25 – 15.75	3
15.75 – 16.25	2
> 16.25	0

χ^2 -toets voor aanpassing

Oplossing

De chi-kwadraat toets voor aanpassing kan gebruikt worden om na te gaan of een aselechte steekproef van n waarden afkomstig is uit een populatie met een bepaalde verdeling (Poisson, binomiaal, normaal, ...)

Voorwaarde: aantal metingen moet groot genoeg zijn, zodat een frequentietabel kan opgesteld worden.

Meestal wordt onder H_0 de verdeling gespecificeerd, maar parameter(s) niet. Die moeten dan geschat worden uit de frequentietabel. Op de waargenomen en best passende (verwachte) verdeling wordt dan een chi-kwadraat toets toegepast.

Aantal vrijheidsgraden: $\nu = k - 1 - m$

Bij volledig gespecificeerde verdeling valt m weg.

Poisson: 1 parameter schatten

Normale: 2 parameters schatten

χ^2 -toets voor aanpassing

Oplossing vb

Te schatten parameters:
 gemiddelde: $\mu: \langle x \rangle = 13,4$
 spreiding: $\sigma: s = 0,95$

Grenzen v.d. klasse g: $[g_1, g_2]$
 Dan z , $\psi(z)$ en P berekenen:

$$z = \frac{x - \langle x \rangle}{s}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{tabel})$$

$$P = \psi(z_2) - \psi(z_1)$$

\uparrow \uparrow
bovengrens *ondergrens*

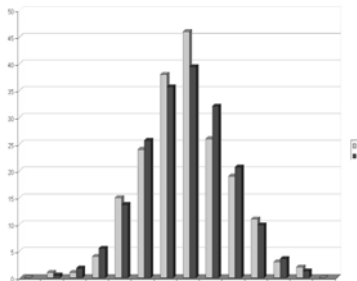
Klassegrenzen (g%)	z	$\psi(z)$	P
< 10.25	-3.32	0.0005	} 0.0026
10.25 – 10.75	-2.79	0.0026	
10.75 – 11.25	-2.26	0.0119	0.0093
11.25 – 11.75	-1.74	0.0409	0.0290
11.75 – 12.25	-1.21	0.1131	0.0722
12.25 – 12.75	-0.68	0.2483	0.1352
12.75 – 13.25	-0.16	0.4364	0.1881
13.25 – 13.75	0.37	0.6443	0.2079
13.75 – 14.25	0.89	0.8133	0.1690
14.25 – 14.75	1.42	0.9222	0.1089
14.75 – 15.25	1.95	0.9744	0.0522
15.25 – 15.75	2.47	0.9932	0.0188
15.75 – 16.25	3	0.9987	} 0.0068
> 16.25		1.0000	

χ^2 -toets voor aanpassing

Volgende stap

Berekenen van de
 verwachte frequenties:

$$e_i = P_i n$$



Chi-kwadraat toets:
 Aantal klassen = 9

Klassegrenzen (g%)	Waargenomen frequenties	Verwachte frequenties
< 10.25	0	} 0.5
10.25 – 10.75	1	
10.75 – 11.25	1	} 1.8
11.25 – 11.75	4	
11.75 – 12.25	15	} 13.7
12.25 – 12.75	24	
12.75 – 13.25	38	} 35.7
13.25 – 13.75	46	
13.75 – 14.25	26	} 32.1
14.25 – 14.75	19	
14.75 – 15.25	11	} 9.9
15.25 – 15.75	3	
15.75 – 16.25	2	} 1.3
> 16.25	0	

χ^2 -toets voor aanpassing

Laatste stap

Nulhypothese: steekproef stamt uit een normaalverdeling met $\langle x \rangle = 13.4$ en $S = 0.95$.

Onbetrouwbaarheidsdrempel: $p = 0.05$

Onder H_0 volgt de toetsingsgrootte G een chi-kwadraat verdeling met $9 - 2 - 1 = 6$ vrijheidsgraden. We berekenen:

$$G = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = 3.29$$

Uit de chi-kwadraat tabel blijkt dat H_0 kan verworpen worden indien $G > 12.59$.

Waargenomen frequenties	Verwachte frequenties
6	7.8
15	13.7
24	25.7
38	35.7
46	39.5
26	32.1
19	20.7
11	9.9
5	4.9

Besluit: De nulhypothese kan niet verworpen worden. Daarom is de verdeling niet noodzakelijk normaal, maar is het waarschijnlijk wel geen slecht model.

Student-t toets

Student *t*-toets



W. Gosset



Student
(1876-1937)



W. Gosset

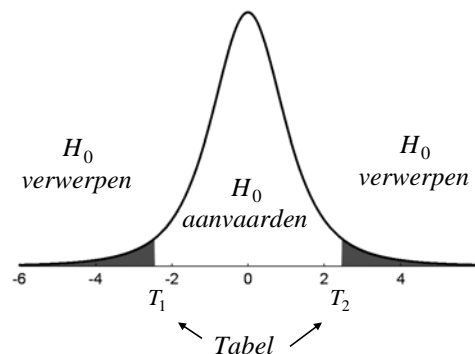
T-toets van Student

Toets voor het gemiddelde van één populatie. $H_0 : \mu = \mu_0$

Om na te gaan of een aselechte steekproef van n elementen, met gemiddelde $\langle x \rangle$ en spreiding S , afkomstig is uit een normaal verdeelde populatie met bekend gemiddelde μ_0 en onbekende spreiding σ , gebruikt men de toetsingsgrootheid:

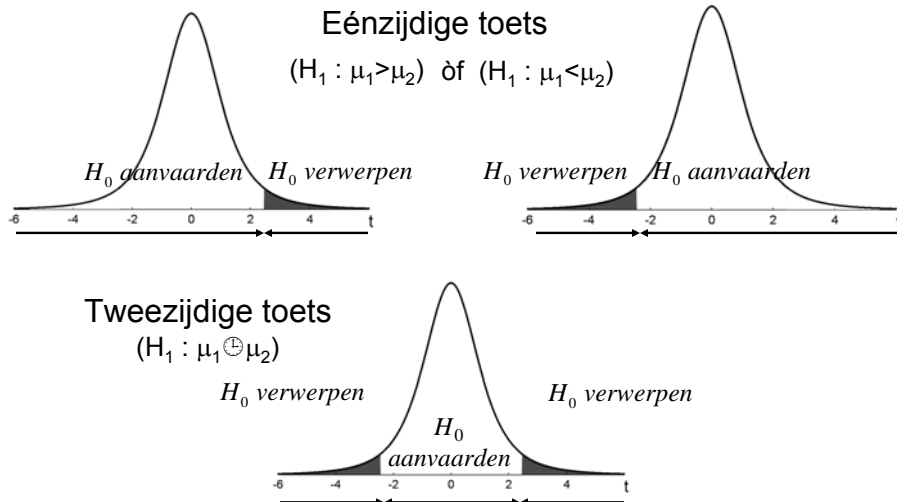
$$T = \frac{\langle x \rangle - \mu_0}{S_m} \quad \text{met:} \quad S_m = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Deze toetsingsgrootheid volgt onder de nulhypothese H_0 ($\mu = \mu_0$) een Student *t*-verdeling met $\nu = n - 1$ vrijheidsgraden.



T-toets van Student

Eénzijdig en tweezijdig toetsen. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$



T-toets van Student: Vb1

Uit een normaal verdeelde populatie is de volgende aselechte steekproef afkomstig: 1,6 ; -0,8 ; 0,1 ; -0,4 ; 1,2 ; 0,7 ; 0,3 ; 0,5
 Test de nulhypothese dat het populatiegemiddelde $\mu=0,1$ bedraagt ($p=0,05$).

We hebben: $n=8$ en $v=8-1=7$

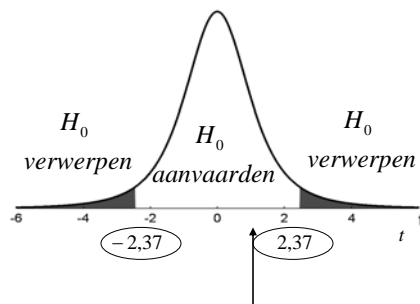
$$\langle x \rangle = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = 0,4$$

$$S^2 = \frac{\langle x^2 \rangle - \frac{1}{8} \langle x \rangle^2}{7} = 0,6229$$

$$t_{2z} \left(\begin{matrix} p=0,05 \\ v=7 \end{matrix} \right) = t_{1z} \left(\begin{matrix} p=0,025 \\ v=7 \end{matrix} \right) = 2,37$$

$$T = \frac{\langle x \rangle - \mu_0}{S_m} = \frac{0,4 - 0,1}{0,789 / \sqrt{8}} = 1,075$$

Tweezijdige toets
($H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$)



T is niet gelegen in kritieke zone : H_0 aanvaarden

T-toets van Student

Toets voor de gemiddelde van verschillen tussen gepaarde waarnemingen. Hierbij is $H_0 : \mu_d = 0$

De waargenomen verschillen $d_i = x_{1,i} - x_{2,i}$ kunnen beschouwd worden als een steekproef van n elementen uit een normaal verdeelde populatie (van verschillen) met (bekend) gemiddelde μ_d en (onbekende) standaardafwijking σ_d . Men gebruikt dan de toetsingsgrootte:

$$T = \frac{\langle d \rangle - 0}{S_d / \sqrt{n}}$$

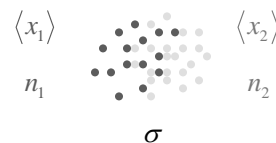
Deze toetsingsgrootte volgt onder de nulhypothese H_0 ($\mu_d = 0$) een Student t-verdeling met $\nu = n - 1$ vrijheidsgraden.

T-toets van Student

Toets voor de gemiddelden van twee normaal verdeelde populaties met onbekende, maar gelijke spreiding. $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Beschouw populatie I en II, respectievelijk gekarakteriseerd door $N(\mu_1, \sigma)$ en $N(\mu_2, \sigma)$. We nemen dus aan dat de spreiding gelijk is. Uit beide populaties nemen we een aselechte steekproef. Om na te gaan of $\mu_1 = \mu_2$, gebruikt men

$$T = \frac{\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$



Deze toetsingsgrootte volgt onder de nulhypothese H_0 ($\mu_1 = \mu_2$) een Student t-verdeling met $\nu = n_1 + n_2 - 2$ vrijheidsgraden.

T-toets van Student

De twee populatievarianties σ_1^2 en σ_2^2 zijn onbekend maar gelijk. De beste schatting, S^2 , is gegeven door:

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

waarbij $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \langle x_1 \rangle)^2$ en $S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \langle x_2 \rangle)^2$

of rechtstreeks:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \langle x_1 \rangle)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \langle x_2 \rangle)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

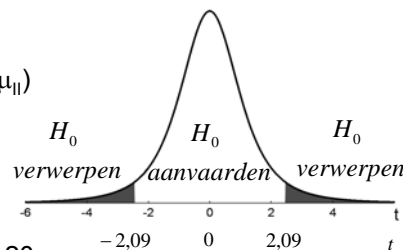
T-toets van Student: Vb2 (1/2)

Men neemt aan dat de hoogte een plant, gegroeid gedurende een bepaalde tijd en onder standaardcondities, normaal verdeeld is met variantie σ^2 . Tien kiemplanten van variëteit I groeien respectievelijk: 44; 26; 1; 79; 53; 38; 62; 80; 33 en 13 cm. Twaalf kiemplanten van variëteit II: 33; 47; 55; 39; 24; 61; 38; 12; 26; 64; 52 en 51 cm. Ga na of de groei van beide variëteiten gelijk is ($p=0,05$).

Tweezijdige toets ($H_0: \mu_I = \mu_{II}$; $H_1: \mu_I \neq \mu_{II}$)

Aanname: $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma$

→ Eventueel testen met F-toets



Aantal vrijheidsgraden: $v = 10 + 12 - 2 = 20$

$$t \left(\begin{matrix} p = 0,05 \\ v = 20 \end{matrix} \right) = 2,09$$

T-toets van Student: Vb2 (2/2)

Steekproef I: 44 ; 26 ; 1 ; 79 ; 53 ; 38 ; 62 ; 80 ; 33 ; 13 cm

$$\sum_i x_{i,I} = 429 \text{ cm} \quad \sum_i x_{i,I}^2 = 24609 \text{ cm}^2 \quad \langle x_I \rangle = 42,9 \text{ cm}$$

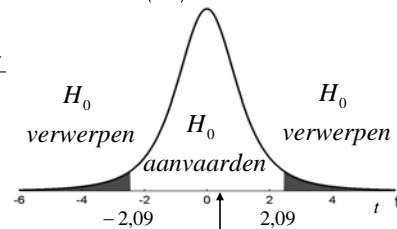
Steekproef II: 33 ; 47 ; 55 ; 39 ; 24 ; 61 ; 38 ; 12 ; 26 ; 64 ; 52 ; 51 cm

$$\sum_i x_i = 502 \text{ cm} \quad \sum_i x_i^2 = 23806 \text{ cm}^2 \quad \langle x_{II} \rangle = 41,83 \text{ cm}$$

$$S^2 = \frac{\sum x_{i,I}^2 - (\sum x_{i,I})^2 / n_I + \sum x_{i,II}^2 - (\sum x_{i,II})^2 / n_{II}}{10 + 12 - 2}$$

$$= \frac{24609 - (429)^2 / 10 + 23806 - (502)^2 / 12}{10 + 12 - 2}$$

$$= 450,5$$



$$T = \frac{\langle x_I \rangle - \langle x_{II} \rangle}{S \sqrt{\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_{II}}}} = \frac{42,9 - 41,83}{\sqrt{450,53} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}} = 0,12$$

T is niet gelegen in kritieke zone : H_0 aanvaarden

Methode der kleinste kwadraten

Principe

Beschouw een stel van n onafhankelijke, Gaussisch verdeelde waarnemingen $\{x_i\}$, met $x_i \sim N(\mu, \sigma)$. Wat is dan de beste schatting voor μ ?

Principe der kleinste kwadraten

Beste schatting van μ is die waarde die de som der kwadratische afwijkingen t.o.v. de metingen minimaliseert.

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2$$

$$\frac{df}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\mu} \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 2(\mu - x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mu = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Leftrightarrow n\mu = \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Beste rechte

Kleinste-kwadraten vooral nuttig bij schatten van meerdere parameters uit een reeks metingen.

Voorbeeld: lineaire regressie:

$$y = ax + b$$

Bij waarden voor x , worden de overeenkomstige y -waarden gemeten. De beste schatting voor de parameters a en b van het lineair model worden bepaald door minimalisatie van:

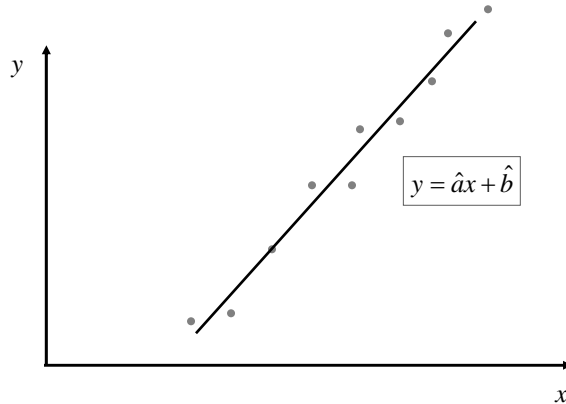
$$\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = f(a, b)$$

Deze som is minimaal m.b.t. de parameters a en b indien:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + Nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Beste rechte

Beste schatting: $\hat{a} = \frac{\sum y_i \sum x_i - N \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$ $\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$



Rechte door de oorsprong

In dit geval moeten we de kwadratensom $\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i)^2$ minimaal maken.
(i.e. partiële afgeleide naar m moet 0 zijn)

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i y_i + m^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0$$

of: $-2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2m \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$

waaruit: $\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

