

Hoeveel is oneindig?

Bruno Ernst Symposium

30 maart 2007



Marcel de Jeu

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

mdejeu@math.leidenuniv.nl

Inhoud

- Tellen voor gevorderden.
- Toepassing: soorten getallen op de getallenrechte.
- Ad infinitum.

Motivatie: vooruitblik naar toepassing

Verschillende soorten getallen op de getallenrechte \mathbb{R} .

Gehele getallen: 0, 30, 3, 2007, 81, -23571113,

Zijn oplossing van vergelijking $x - a_0 = 0$ met a_0 geheel.

Voorbeeld: $x - 81 = 0$.

Breuken: 1926, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, 3.14, 3.14159265,

Zijn oplossing van vergelijking $a_1x + a_0 = 0$ met a_1 en a_0 geheel.

Voorbeeld: $113x - 355 = 0$.

Motivatie: vooruitblik naar toepassing

Algemener: een getal heet *algebraïsch* als het een oplossing is van een polynomiale vergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

met alle coëfficiënten *geheel*.

Als een getal niet algebraïsch is, dan heet het *transcendent*.

Motivatie: vooruitblik naar toepassing

Voorbeelden:

- Geheel getal n is een oplossing van $x - n = 0$.
- Breuk $\frac{p}{q}$ is een oplossing van $qx - p = 0$.
- $\sqrt[3]{8 + \frac{1}{7}\sqrt[5]{3}}$ is een oplossing van

$$16807x^{15} - 672280x^{12} + 10756480x^9 + \\ - 86051840x^6 + 344207360x^3 - 550731773 = 0.$$

Motivatie: vooruitblik naar toepassing

Dagelijkse rekenkunde: alle getallen lijken wel algebraïsch te zijn.

Schijn bedriegt: transcendente getallen bestaan wel degelijk.

Voorbeelden:

- e is geen breuk (Lambert, 1761) en zelfs transcendent (Hermite, 1873).
- π is geen breuk (Lambert, 1761) en zelfs transcendent (Lindemann, 1882).

Motivatie: vooruitblik naar toepassing

Lastig: beslissen of een gegeven getal transcendent is.

Onbekend of bijv. π^e transcendent is.

Makkelijk: laten zien dat transcendente getallen *in overvloed bestaan*.

Kwestie van tellen!



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Sint-Petersburg, 3 maart 1845

—

Halle, 6 januari 1918

Tellen: wat is evenveel?

Twee verzamelingen:

- $A = \{\text{aap, noot, Mies}\}$.
- $B = \{\text{Pythagoras, Stevin, Archimedes}\}$.

Vraag: zitten er evenveel elementen in A als in B ?

Tellen: wat is evenveel?

Antwoorden:

- Ja, want in beide zitten 3 elementen.
- Ja, want je kunt de verzamelingen 1 op 1 koppelen:

$$A \longleftrightarrow B$$

$$\text{noot} \longleftrightarrow \text{Stevin}$$

$$\text{Mies} \longleftrightarrow \text{Pythagoras}$$

$$\text{aap} \longleftrightarrow \text{Archimedes}$$

Tellen: wat is evenveel?

Twee andere verzamelingen:

- $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Vraag: zitten er evenveel elementen in A als in B ?

Antwoorden:

- Dit valt niet te zeggen. Je kunt hier niet meer tellen omdat je niet weet hoeveel oneindig is.

Tellen: wat is evenveel?

- (Cantor) Ja, want je kunt de verzamelingen 1 op 1 koppelen:

$$A \longleftrightarrow B$$

$$0 \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2$$

$$2 \longleftrightarrow 3$$

$$3 \longleftrightarrow 4$$

... ..

Tellen: wat is evenveel?

Verzamelingen A en B hebben *dezelfde kardinaliteit* als ze 1 op 1 te koppelen zijn: ze hebben dan “evenveel” elementen.

Op deze manier kun je ook oneindige verzamelingen met elkaar vergelijken!

Notatie: $|A|$ staat voor alle verzamelingen die dezelfde kardinaliteit hebben als A .

$|A|$ heet een *kardinaalgetal*.

Van Dale: *de kardinale getallen = de hoofdtelwoorden.*

Tellen: wat is evenveel?

Voorbeelden:

- $|\{\text{aap, noot, Mies}\}| =$ alle verzamelingen met drie elementen = “het aantal drie”.
- $|\{1, 2, 3, \dots\}| =$ alle oneindige verzamelingen die zich laten nummeren = “het aantal natuurlijke getallen”.

Notatie: $|\{1, 2, 3, \dots\}| = \aleph_0$: Aleph-nul.

Als $|A| = |\{1, 2, 3, \dots\}| = \aleph_0$, dan heet A *aftelbaar oneindig*.

Voorbeeld: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Tellen: oneindig met oneindig vergelijken

Nog twee andere verzamelingen:

- $A = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $B = \mathbb{R}$.

Schrijf $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$: de kardinaliteit van het continuüm.

Vraag: is $|\{1, 2, 3, \dots\}| = \aleph_0 = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$?

Zijn er evenveel reële getallen als natuurlijke getallen?

Tellen: oneindig met oneindig vergelijken

Antwoorden:

- Dit valt niet te zeggen. Je kunt hier niet meer tellen omdat je niet weet hoeveel oneindig is. Flauw antwoord.
- (Cantor) Als er een 1 op 1 koppeling is, dan wel, anders niet. Herformulering van een zinloze vraag als een onbeantwoordbare?

Oplossing: zo'n koppeling is er *niet*.

Tellen: oneindiger dan oneindig

Stelling (Cantor). $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$: *de reële getallen kunnen niet genummerd worden. Er zijn dus meer reële getallen dan gehele getallen.*

Bewijs. (Cantor, 1891). Stel dat het toch kan: laat r_1, r_2, r_3, \dots een nummering van de reële getallen zijn. Definieer r in $[0, 1]$ dan door zijn decimale ontwikkeling: $r = 0.c_1c_2c_3 \dots$, waarbij

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{als de } n\text{-de decimaal van } r_n \text{ een } 0 \text{ is;} \\ 0 & \text{als de } n\text{-de decimaal van } r_n \text{ géén } 0 \text{ is.} \end{cases}$$

Maar dan staat het reële getal r niet in de nummering!
Tegenspraak, dus zo'n nummering bestaat niet. □

Tellen: altijd minder, evenveel of meer

Stelling. Als $|A|$ en $|B|$ kardinaalgetallen zijn, dan treedt precies één van de volgende mogelijkheden op:

- A laat zich 1 op 1 koppelen met een deelverzameling van B , maar niet met héél B : $|A| < |B|$;
- A laat zich 1 op 1 koppelen met B : $|A| = |B|$;
- B laat zich 1 op 1 koppelen met een deelverzameling van A , maar niet met héél A : $|A| > |B|$.

Je kunt twee verzamelingen dus altijd vergelijken.

Voorbeeld: $|\{1, 2, 3, \dots\}| = \aleph_0 < \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Meer over aftelbaarheid

Aftelbaar vaak aftelbare verzamelingen bij elkaar voegen levert weer een aftelbare verzameling op.

Want als

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, \dots\}$$

$$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, \dots\}$$

... ..

tel dan af volgens diagonalen:

Meer over aftelbaarheid

A	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots
B	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
C	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
D	d_1	d_2	d_3	d_4	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

A	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\dots
B	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\dots
C	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\dots
D	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Vergelijkingen met gehele coëfficiënten tellen

Vergelijking van graad 1 met gehele coëfficiënten:

$$a_1x + a_0 = 0.$$

Voor a_1 aftelbaar veel keuzes en bij gegegeven a_1 weer aftelbaar veel keuzes voor a_0 .

Dus in totaal aftelbaar veel vergelijkingen van graad 1.

Vergelijkingen met gehele coëfficiënten tellen

Vergelijking van graad 2 met gehele coëfficiënten:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Voor a_2 aftelbaar veel keuzes en bij gegeven a_2 weer aftelbaar veel (weten we inmiddels!) keuzes voor het stuk $a_1x + a_0$.

Dus in totaal aftelbaar veel vergelijkingen van graad 2.

Vergelijkingen met gehele coëfficiënten tellen

Vergelijking van graad 3 met gehele coëfficiënten:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Voor a_3 aftelbaar veel keuzes en bij gegeven a_3 weer aftelbaar veel (weten we inmiddels!) keuzes voor het stuk $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Dus in totaal aftelbaar veel vergelijkingen van graad 3.

Vergelijkingen met gehele coëfficiënten tellen

Ga zo door: voor iedere graad zijn er aftelbaar veel vergelijkingen.

Verder: er zijn aftelbaar veel mogelijke graden van de vergelijking.

Conclusie: er zijn aftelbaar veel polynomiale vergelijkingen met gehele coëfficiënten.

Algebraïsche getallen tellen

Ieder van die aftelbaar veel vergelijkingen heeft eindig veel nulpunten.

In totaal zijn er dus aftelbaar veel nulpunten van vergelijkingen met gehele coëfficiënten.

Dus: *de algebraïsche getallen zijn aftelbaar.*

Toepassing van $\aleph_0 < \mathfrak{c}$

Maar \mathbb{R} is *niet* aftelbaar (Cantor), dus die aftelbaar veel algebraïsche getallen kunnen samen nooit heel \mathbb{R} zijn.

Eindconclusie: transcendente getallen bestaan!

In feite: bij aselechte trekking van een getal uit $[0,1]$ trek je met kans 1 een transcendent getal (!)

Er is altijd meer

Gezien: \mathbb{R} is echt groter dan $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Vraag: bestaan er verzamelingen die groter zijn dan \mathbb{R} ?

Vraag: is er misschien een “grootste” verzameling met “ultiem oneindig veel” elementen?

Er is altijd meer

Neem eens $A = \{\text{Hans}, \text{de}, \text{Rijk}\}$.

Kijk naar alle mogelijke deelverzamelingen:

\emptyset

$\{\text{Hans}\}, \{\text{de}\}, \{\text{Rijk}\}$

$\{\text{Hans}, \text{de}\}, \{\text{Hans}, \text{Rijk}\}, \{\text{de}, \text{Rijk}\}$

$\{\text{Hans}, \text{de}, \text{Rijk}\}$

Uit 3 is 8 gemaakt en $8 > 3$.

Er is altijd meer

Stelling (Cantor). *Laat A een verzameling zijn en zij $\text{Deelverz}(A)$ de collectie van alle deelverzamelingen van A . Dan is $|\text{Deelverz}(A)| > |A|$.*

Feit: $|\text{Deelverz}(\{1, 2, 3, \dots\})| = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Bewijs. Stel van niet. Zeker is $|A| \leq |\text{Deelverz}(A)|$, kijk maar naar $a \rightarrow \{a\} \in \text{Deelverz}(A)$. Stel dat $|A| = |\text{Deelverz}(A)|$. Dan is er een 1 op 1 koppeling $f : A \rightarrow \text{Deelverz}(A)$. Laat $A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Dan is $A_0 = f(a_0)$ voor een of andere $a_0 \in A$.

Er is altijd meer

Vraag: is $a_0 \in A_0$?

Dus: is $a_0 \in f(a_0) = A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$?

Indien ja, dan is $a_0 \notin A_0$ vanwege de definitie van A_0 .
Dat kan niet.

Indien nee, dan is $a_0 \in A_0$ vanwege de definitie van A_0 .
Maar dat kan alweer niet.

Tegenspraak, dus zo'n 1 op 1 koppeling tussen A en $|\text{Deelverz}(A)|$ kan niet bestaan. □

Meer en meer en meer en

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

$$< |\{1, 2, 3, \dots\}| = \aleph_0$$

$$< |\text{Deelverz}(\{1, 2, 3, \dots\})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

$$< |\text{Deelverz}(\mathbb{R})|$$

$$< |\text{Deelverz}(\text{Deelverz}(\mathbb{R}))|$$

$$< |\text{Deelverz}(\text{Deelverz}(\text{Deelverz}(\mathbb{R})))|$$

$$< \dots$$

...

ad infinitum!