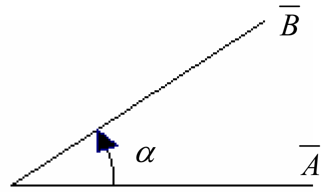
5. Goniometrie

5.1 Georiënteerde hoeken

5.1.1 Definitie

Een georiënteerde hoek is een koppel halfrechten $(\overline{A}, \overline{B})$ met hetzelfde hoekpunt. Om grafisch aan te geven dat $\overline{A}$ de eerste en $\overline{B}$ de tweede halfrechte van het koppel $(\overline{A}, \overline{B})$ is, tekenen we een pijl van $\overline{A}$ naar $\overline{B}$.

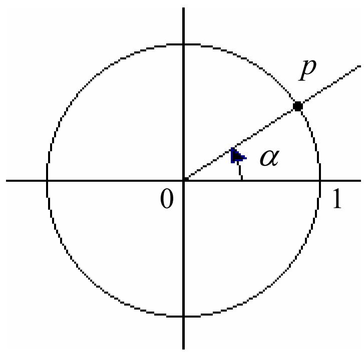


Opmerkingen

a. Een georiënteerde hoek is eigenlijk de verzameling van alle koppels halfrechten met hetzelfde hoekpunt die door een rotatie en/of translatie in elkaar kunnen getransformeerd worden.
b. In wat volgt bedoelen we met "hoek" steeds "georiënteerde hoek".

5.1.2 Afbeelding van hoeken op de goniometrische cirkel

Beschouw in $\mathbb{R}^2$ een cartesisch assenstelsel XY en een cirkel met als middelpunt de oorsprong en straal 1. Deze cirkel noemen we de goniometrische cirkel, S^1.

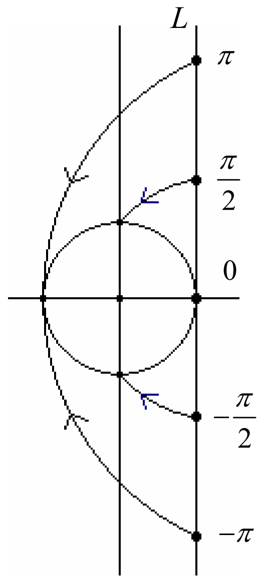


Zij dan α een georiënteerde hoek. We plaatsen α zodanig dat het hoekpunt samenvalt met de oorsprong en de eerste halfrechte met het positieve gedeelte van de X-as.

Het snijpunt p van de tweede halfrechte met de goniometrische cirkel noemen we het beeldpunt van de hoek α. Dit punt bepaalt de hoek α volledig. Met iedere hoek α correspondeert juist één beeldpunt en omgekeerd.

5.1.3 Meten van hoeken

Stel je intuïtief voor dat we de rechte $L \leftrightarrow x = 1$ opwinden rond de goniometrische cirkel zoals aangegeven op de figuur hiernaast.



Zij $\lambda : \mathbb{R} \to S^1$ de afbeelding die dit proces wiskundig definieert. Een exacte definitie van deze oprolfunctie geven we hier niet.

Merk op ($e_1 = (1,0)$ en $e_2 = (0,1)$):

a. $\lambda(0) = e_1$, $\lambda(\frac{\pi}{2}) = e_2$, $\lambda(\pi) = -e_1$, $\lambda(2\pi) = e_1$, $\lambda(\frac{-\pi}{2}) = -e_2$, $\lambda(-\pi) = -e_1$.

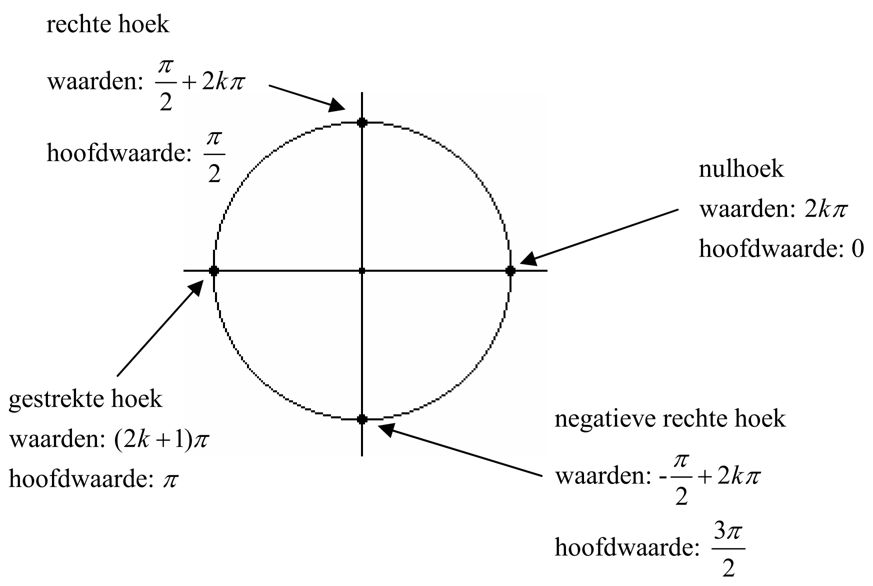
b. $\forall t \in \mathbb{R} : \lambda(t + 2\pi) = \lambda(t)$.

Beschouw nu een georiënteerde hoek α met beeldpunt p. Ieder element van $\lambda^{-1}\{p\}$ noemt men een waarde van α. De hoofdwaarde van α is die waarde van α die behoort tot $[0, 2\pi[$.

Eigenschap

a. Indien x een waarde is van α geldt dat $\forall k \in \mathbb{Z} : x + 2k\pi$ een waarde is van α.
b. Indien x en y waarden zijn van α en β is $x + y$ een waarde van $\alpha + \beta$.
c. Indien x een waarde is van α is $-x$ een waarde van $-\alpha$.

Voorbeelden



De waarden van een hoek worden uitgedrukt in radialen, notatie: $x\,\text{rad}$. In wat volgt noteren we zowel de georiënteerde hoek als een waarde van deze hoek met de symbolen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

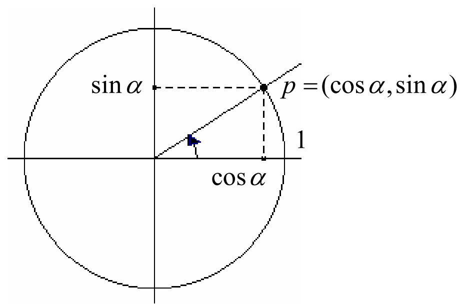
Een andere eenheid, de 60-delige graden (symbool: $^\circ$), is als volgt gedefinieerd:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha \,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ.$$

<u>Onderverdelingen</u>: $1^\circ = 60'$ ($'$ = minuten) en $1' = 60''$ ($''$ = seconden).

<u>Voorbeelden</u>: $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$, $\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$, $5\,\text{rad} = 286^\circ 28' 44,03''$.

5.1.4 Goniometrische getallen van α



Zij p het beeldpunt van de hoek α . Dan definiëren we:

De **cosinus** van α $(\cos\alpha)$ = de abscis van het beeldpunt,
De **sinus** van $\alpha(\sin\alpha)$ = de ordinaat van het beeldpunt.

Uit deze definitie volgt onmiddellijk:

$\forall\alpha : -1 \leq \cos\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

Daar $p \in S_1$ geldt: $\forall\alpha : \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (1)

Vervolgens definiëren we: de **tangens** van α : $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ indien $\cos\alpha \neq 0$,

de **cotangens** van α : $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ indien $\sin\alpha \neq 0$.

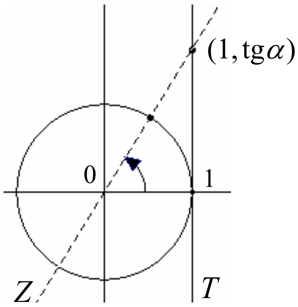
Uit de definitie volgt: $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\alpha}$.

Bovendien geldt: $1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ (2) en $1+\text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (3)

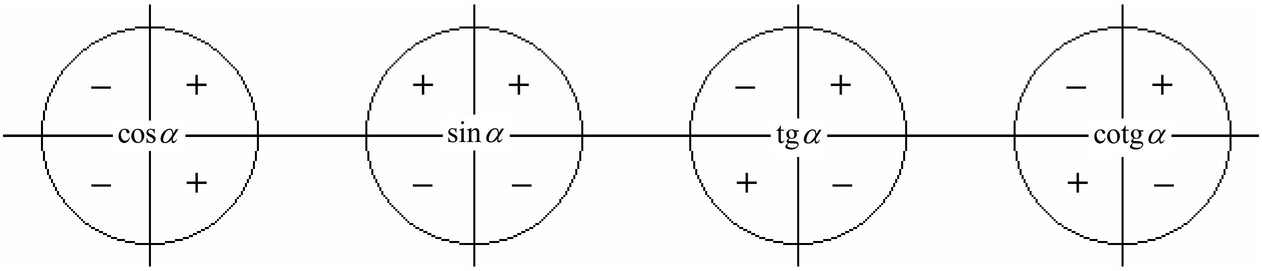
Eigenschap

$\mathrm{tg}\,\alpha$ is de tweede coördinaat van het snijpunt van de rechte Z door de oorsprong en het beeldpunt van α en de rechte T door het punt $e_1 = (1,0)$ en evenwijdig met de Y-as.

De rechte T noemt men de tangens-as.



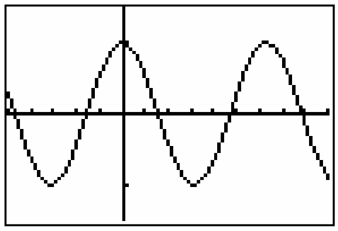
Het teken van de goniometrische getallen in de vier kwadranten



5.2 Goniometrische functies

Voor ieder reëel getal x definiëren we:
$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x\,\mathrm{rad}) \\ \cos x &= \cos(x\,\mathrm{rad}) \\ \mathrm{tg}\,x &= \mathrm{tg}(x\,\mathrm{rad}) \\ \mathrm{cotg}\,x &= \mathrm{cotg}(x\,\mathrm{rad}) \end{aligned}.$$

5.2.1 Cosinusfunctie

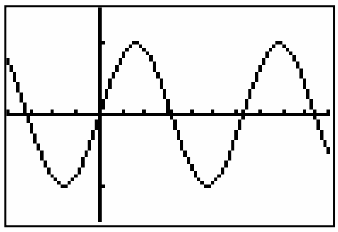


Uit de definitie volgt dat : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \le \cos x \le 1$ en tevens geldt $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Een functie f die voldoet aan $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + p) = f(x)$ voor een zekere $p \in \mathbb{R}$ noemt men een periodische functie. De kleinste positieve waarde voor zo'n p noemt men de periode.

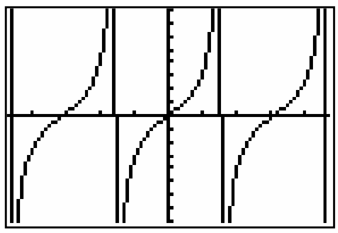
De cosinusfunctie $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \cos x$ is een periodische functie met periode 2π.

5.2.2 Sinusfunctie



$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin x$ is een periodieke functie met periode 2π.

5.2.3 Tangensfunctie



De tangensfunctie is een periodieke functie met periode π.

Bovendien is $\mathrm{tg}\,x$ niet gedefinieerd $\forall x : \cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

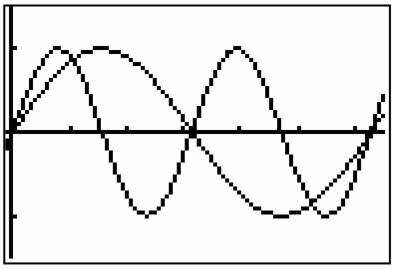
Vandaar de definitie: $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \pi\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{tg}x$.

5.2.4 $f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$

In vele gebieden van de positieve wetenschappen komen functies van de vorm $f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$ voor (golventheorie, electriciteitsleer, ...). We bekijken even de rol van ω, A en φ (met $A, \omega \in \mathbb{R}_0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$).

•• ω ••

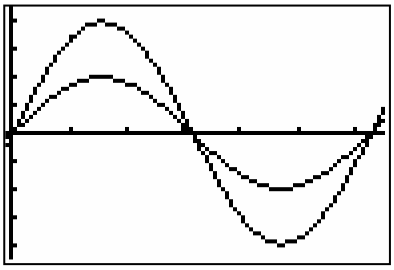
Indien we de sinusfunctie vergelijken met $f(x) = \sin 2x$ zien we dat de periode van f de helft is van 2π.



Algemeen kunnen we stellen dat de periode van de functie $f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$ gelijk is aan $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

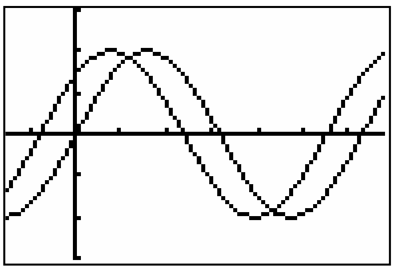
•• A ••

Vergelijken we de sinusfunctie en $f(x) = 2\sin x$ dan zien we dat de maximale uitwijking t.o.v. de X-as het dubbele is t.o.v. de sinusfunctie. Deze maximale uitwijking noemen we de **amplitude.**
De amplitude van $f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$ is $|A|$.



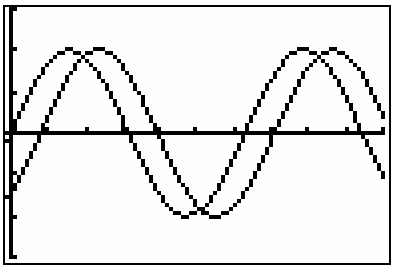
•• φ ••

Vergelijk de sinusfunctie en $f(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{4})$.



We zien dat de grafiek van de sinusfunctie over een afstand $\dfrac{\pi}{4}$, evenwijdig met de x-as, naar links verschuift. We spreken van een faseverschil $-\dfrac{\pi}{4}$.

Vergelijken we nu de sinusfunctie en $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$.



Ook hier zien we een verschuiving, evenwijdig met de x-as, over een afstand $\frac{\pi}{4}$ maar dan naar rechts. Hier spreken we van een faseverschil $\frac{\pi}{4}$.

<u>Algemeen</u>

$-\frac{\varphi}{|\omega|}$ noemen we het faseverschil van de functie $f(x)=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Indien $-\frac{\varphi}{|\omega|}>0$ dan verschuift de grafiek van de sinusfunctie, evenwijdig met de X-as, over een afstand $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ naar rechts en indien $-\frac{\varphi}{|\omega|}<0$ naar links.

5.3 Goniometrische formules

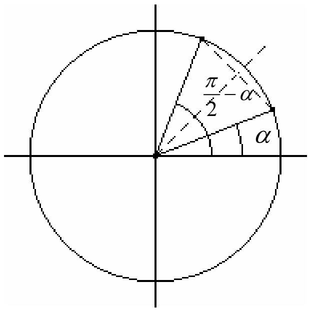
5.3.1 Formules voor verwante hoeken

Het is niet verstandig de volgende formules te memoriseren. Ze zijn makkelijk terug af te leiden d.m.v. de goniometrische cirkel S^1 en een hoek α in het 1e kwadrant, alhoewel de formules gelden $\forall\alpha$.

(i) Complementaire hoeken

α en β zijn complementair als $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$. Aangezien de beeldpunten van α en $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ symmetrisch liggen t.o.v. de bissectrice van het 1ste kwadrant geldt:

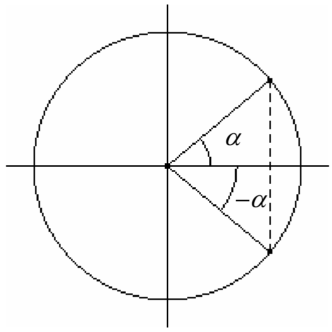
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (4)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad (5)$$
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cotg}\,\alpha \qquad (6)$$
$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{tg}\,\alpha \qquad (7)$$



(ii) Tegengestelde hoeken

Aangezien de beeldpunten van α en $-\alpha$ symmetrisch liggen t.o.v. de X -as geldt:

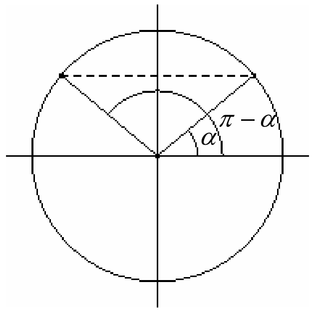
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad (8)$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad (9)$$
$$\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha \qquad (10)$$
$$\text{cotg}(-\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha \qquad (11)$$



(iii) Supplementaire hoeken

α en β zijn supplementair als $\alpha+\beta=\pi$. Aangezien de beeldpunten van α en $\pi-\alpha$ symmetrisch liggen t.o.v. de Y -as geldt:

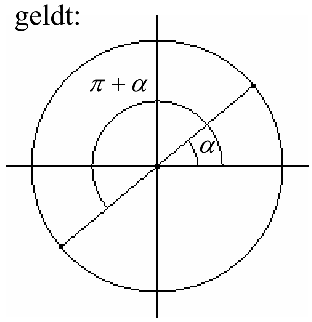
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad (12)$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad (13)$$
$$\text{tg}(\pi-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha \qquad (14)$$
$$\text{cotg}(\pi-\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha \qquad (15)$$



(iv) Hoeken die 180° verschillen

Aangezien de beeldpunten van α en $\pi+\alpha$ symmetrisch liggen t.o.v. 0 geldt:

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad (16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad (17)$$
$$\text{tg}(\pi+\alpha)=\text{tg}\,\alpha \qquad (18)$$
$$\text{cotg}(\pi+\alpha)=\text{cotg}\,\alpha \qquad (19)$$



5.3.2 Goniometrische getallen van enkele veel voorkomende hoeken

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

5.3.3 Som- en verschilformules

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (20)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (21)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (22)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (23)$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \quad (24)$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \quad (25)$$

5.3.4 Verdubbelingsformules

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad (26)$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad (27)$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \quad (28)$$

Een andere schrijfwijze voor (26) is: $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ of $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$.

5.3.5 Formules die cos 2α en sin 2α uitdrukken in functie van tg 2α

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \quad (29)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \quad (30)$$

5.3.6 Sommen en producten van cosinussen en sinussen

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

De onderstaande vorm van deze formules noemt men de **Formules van SIMPSON**. :

$$\cos p + \cos q \;=\; 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2} \quad (31)$$

$$\cos p - \cos q \;=\; -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2} \quad (32)$$

$$\sin p + \sin q \;=\; 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2} \quad (33)$$

$$\sin p - \sin q \;=\; 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2} \quad (34)$$

5.4 Goniometrische formules

Elke goniometrische vergelijking tracht men op te lossen door ze te herleiden tot één van de volgende standaardvormen met $a \in \mathbb{R}$: $\sin x = a$, $\cos x = a$ en $\operatorname{tg} x = a$.

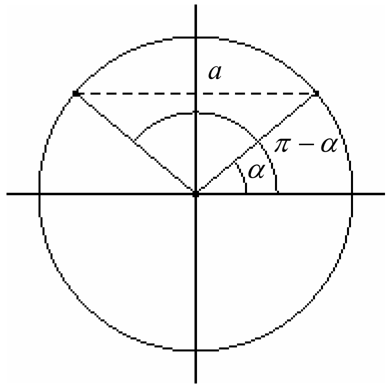
5.4.1 $\sin x = a$

Opdat deze vergelijking oplosbaar is, moet $|a| \leq 1$.

Bepaal dan een $\alpha \in \mathbb{R}$ met $\sin\alpha = a$. Dan geldt: $\sin x = \sin\alpha$.

De oplossingen lezen we af op de goniometrische cirkel:

$x = \alpha + 2k\pi$ of $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.



Voorbeeld

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \quad (\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

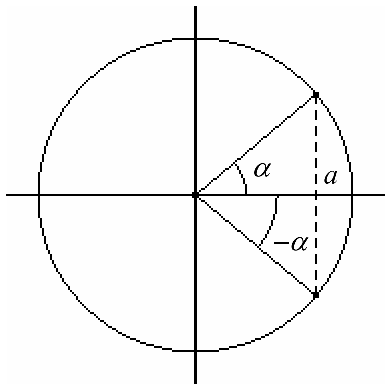
5.4.2 $\cos x = a$

Opdat deze vergelijking oplosbaar is, moet $|a| \leq 1$.

Bepaal dan een $\alpha \in \mathbb{R}$ met $\cos\alpha = a$. Dan geldt: $\cos x = \cos\alpha$.

De oplossingen lezen we af op de goniometrische cirkel:

$x = \alpha + 2k\pi$ of $x = -\alpha + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.



Voorbeeld

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \quad (\cos\frac{\pi}{3} = 1/2)$$

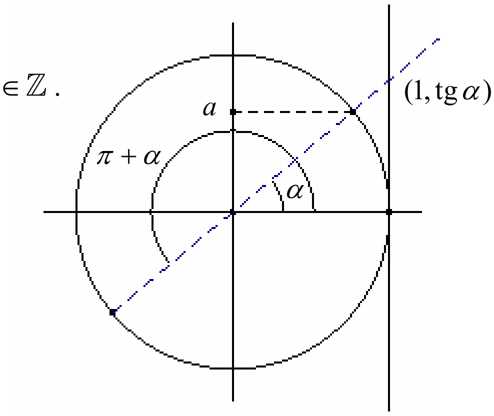
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

5.4.3 tg $x = a$

Bepaal $\alpha \in \mathbb{R}$ zodat $\text{tg}\alpha = a$.

Uit $\text{tg}\,x = \text{tg}\,\alpha$ volgt: $x = \alpha + 2k\pi$ of $x = (\pi + \alpha) + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Wat equivalent is met $x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Voorbeeld

$$\text{tg}\,x = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,x = \text{tg}\frac{\pi}{4} \quad (\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

5.5 Driehoeksmeting

5.5.1 Rechthoekige driehoeken

De som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan 180° of $\pi\,\text{rad}$, m.a.w. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Indien we een rechthoekige driehoek beschouwen (bv. $\gamma = 90^\circ$), geldt $\alpha + \beta = 90^\circ$. α en β zijn in dit geval complementaire hoeken. Hieruit volgt dat $\sin\beta = \cos\alpha$.

Stelling van Pythagoras

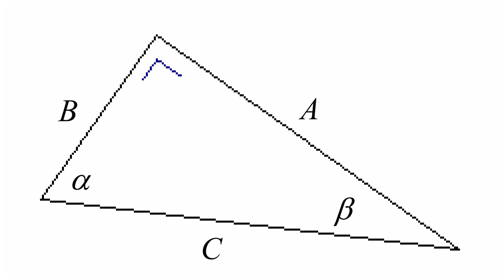
De som van de kwadraten van de lengte van de rechthoekzijden van een rechthoekige driehoek is gelijk aan het kwadraat van de lengte van de schuine zijde.

Eigenschappen

$$\sin\alpha = \frac{A}{C} \qquad \sin\beta = \frac{B}{C}$$

$$\cos\alpha = \frac{B}{C} \qquad \cos\beta = \frac{A}{C}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{A}{B} \qquad \text{tg}\beta = \frac{B}{A}$$



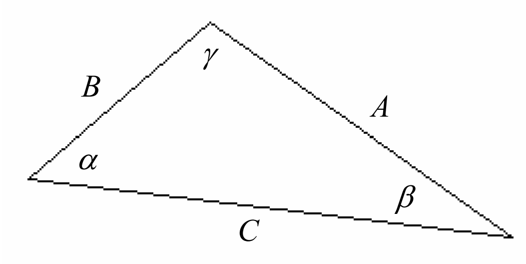
5.5.2 Willekeurige driehoeken

Cosinusregel

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$



Sinusregel

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

.