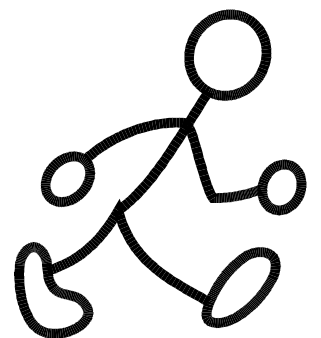
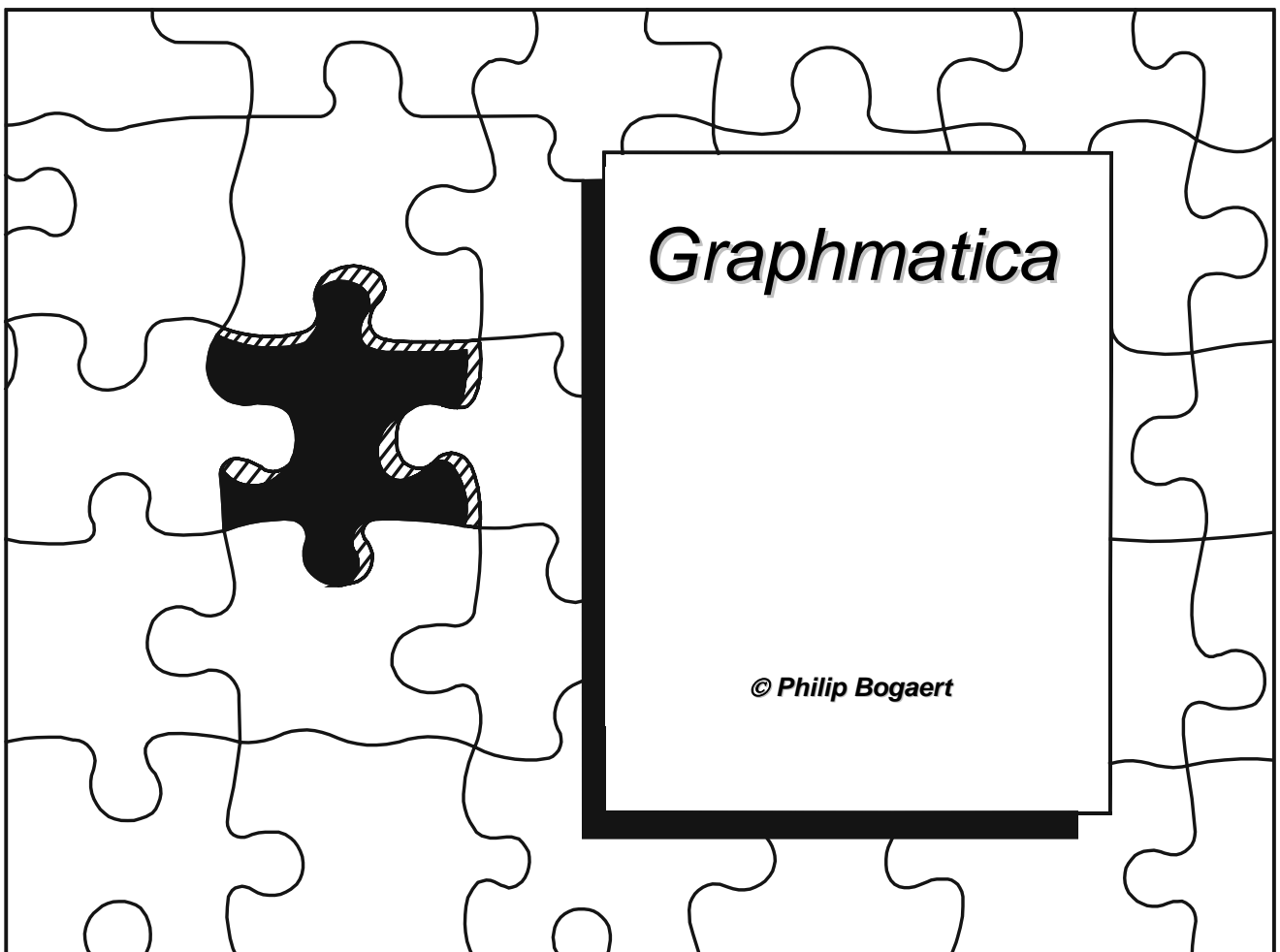


*Vrije Ruimte*  
*Wiskunde*



# Graphmatica

Graphmatica kan je gratis downloaden op de website [www.graphmatica.com](http://www.graphmatica.com)

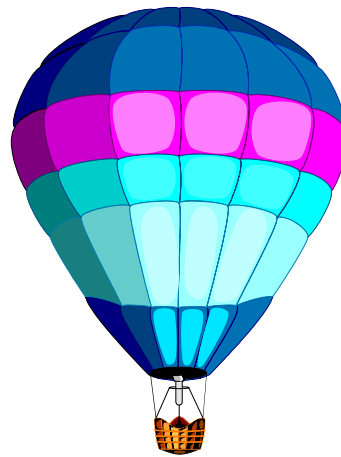
## 1. Grafiek van een functie

### 1.1. Probleemstelling

Een vlucht met een luchtballon kan beschreven worden met volgende functie:

$$h(t) = 24 - 2t + \frac{1}{18}t^3 - \frac{1}{216}t^4$$

h = hoogte in meter,  
t = tijd in uren,  
t = 0 is het huidig tijdstip.



Gevraagd:

- Schets deze grafiek.
- Hoelang zijn we reeds aan het vliegen?
- Hoelang duurt de vlucht nog?
- Wat is de totale duur van de vlucht?
- Hoe hoog bevinden we ons nu?
- Welke hoogte bereiken we maximaal?
- Hoelang zullen we hoger dan 18 meter gevolgen hebben?
- Wanneer daalden we het minst snel? Hoe hoog waren we dan?

### 1.2. De grafiek schetsen

- Start de computer en open het programma Graphmatica 2.0
- Op het scherm verschijnt een (x,y)-assenstelsel en een toolbar.
- De cursor bevindt zich in een werkbalk waarin je de vergelijking van de functie die je wil besturen kan invoeren.

Een functie invoeren gebeurt als volgt:

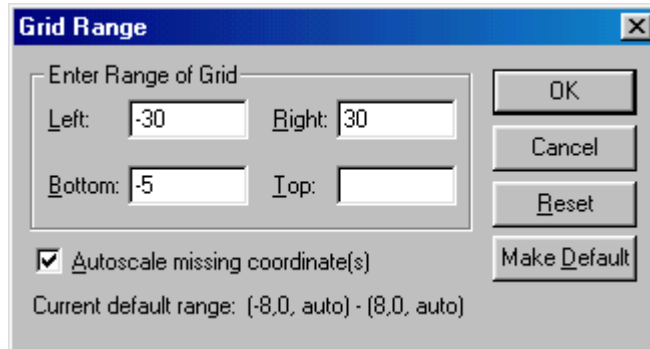
- Typ : y =
- Vervolgens typ je het functievoorschrift waarbij je moet opletten dat de machten worden ingevoerd met ^ + spatie.

Typ :  $y = 24 - 2x + x^3 / 18 - x^4 / 216$

Om een beter beeld van de grafiek te krijgen moet je een aantal keer (3x) uitzoomen.

De hoogte van de luchtballon kan geen negatieve waarden aannemen. Het onderzoeksgebied kun je dus beperken. Pas daarom het gezichtsveld (de Grid Range) van het assenstelsel een beetje aan.

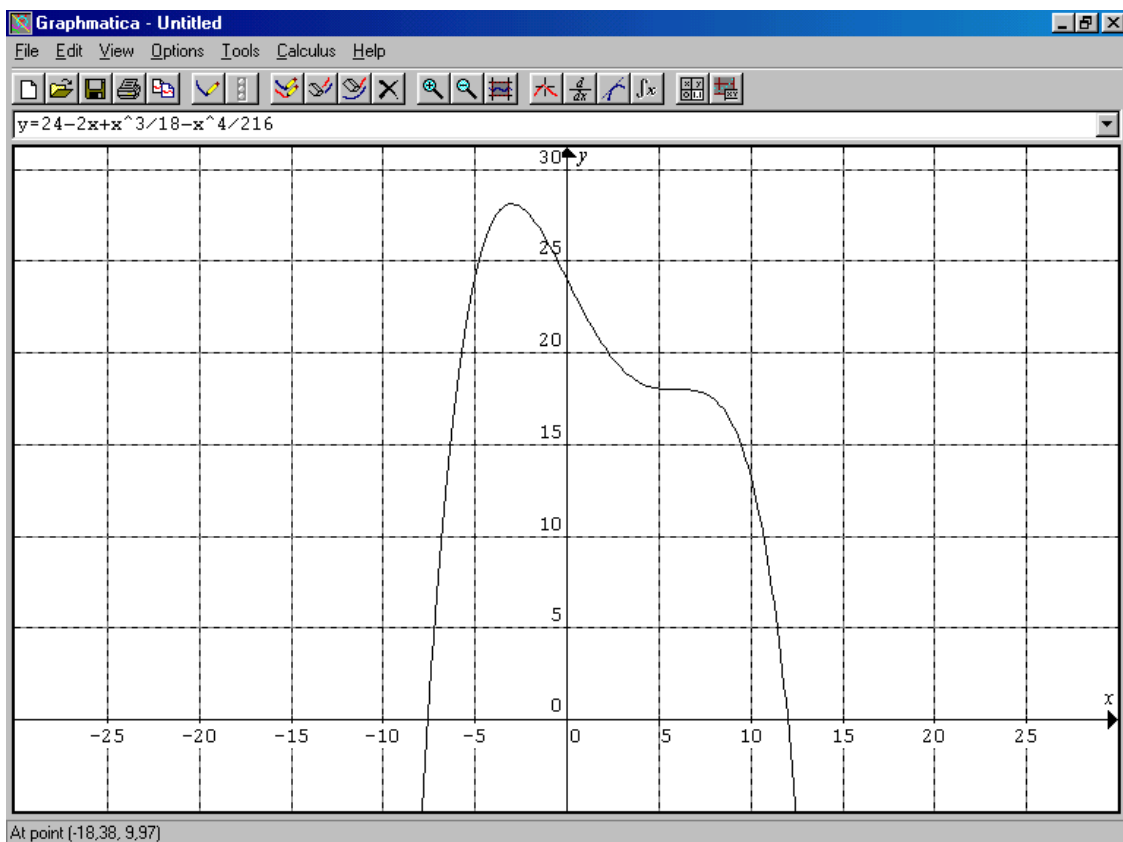
“View Grid Range” of kortweg Ctrl+R.



Wanneer je slechts drie van de vier kadergrenzen ingeeft, kan je via de optie “Autoscale” je assenstelsel georthonormeerd houden.

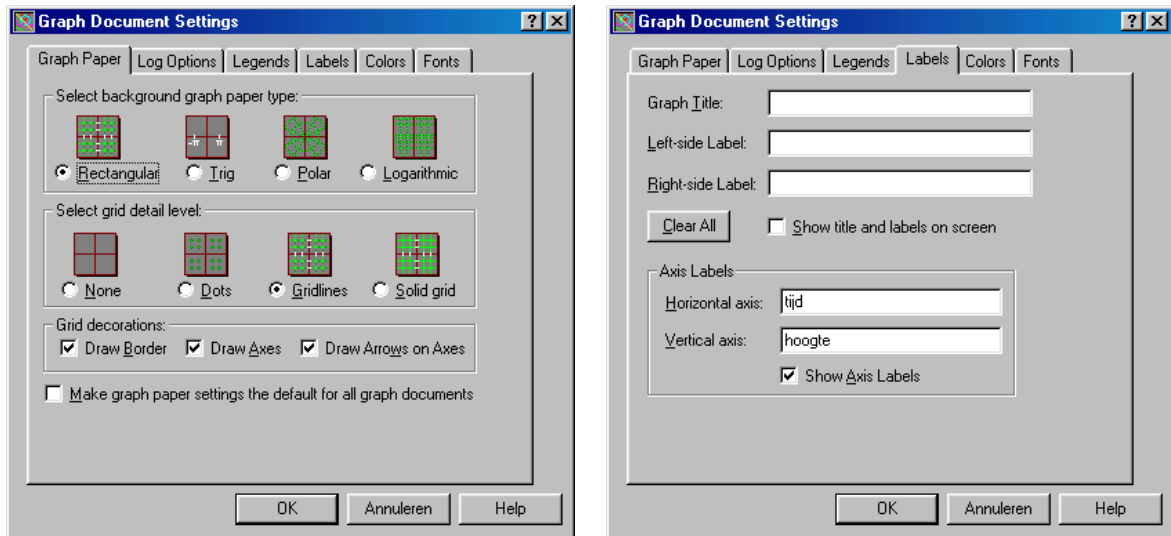
Met de optie “View, Scrollbars” krijg je rechts en onderaan twee schuifbalkjes.

Je hebt nu min of meer een duidelijke grafiek:



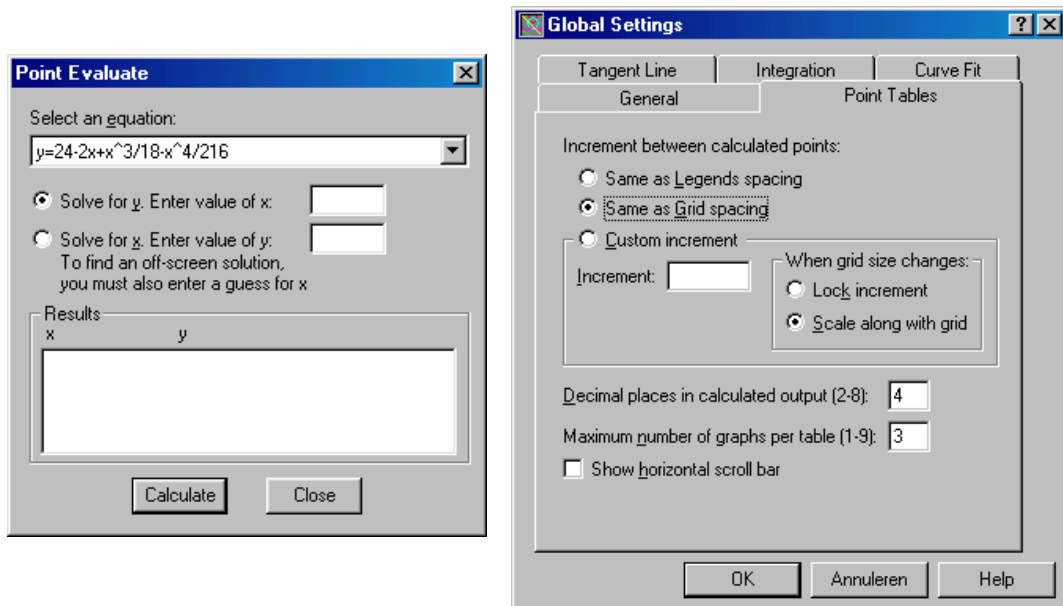
### 1.3. De assen benoemen

“Options, Graph Paper, Labels”



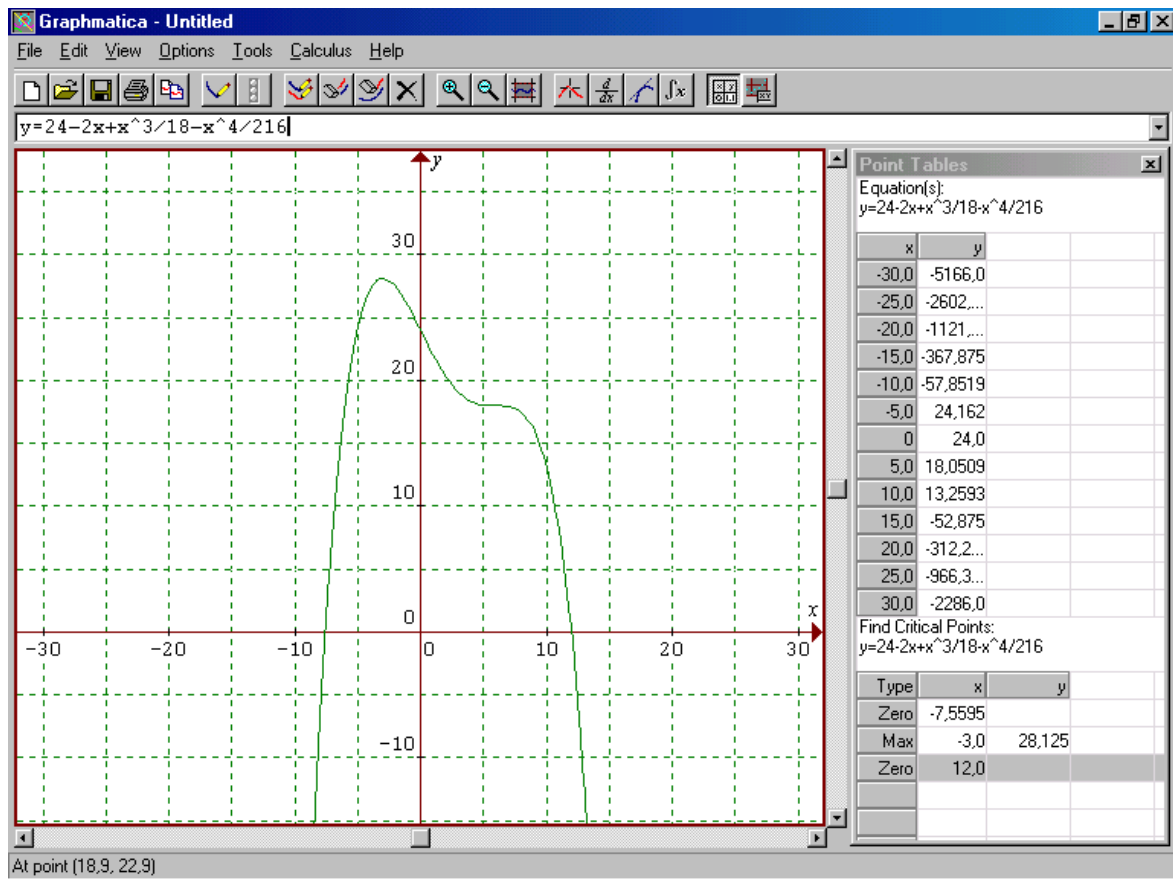
### 1.4. Het visgraatdiagram

Ken je één van de twee coördinaatgetallen  $x$  of  $y$  en wens je de andere te berekenen, doe je dit via “Tools, Evaluate” of  $\text{Ctrl}+\text{E}$ .



Ben je meer geïnteresseerd in een volledig visgraat, kies je:

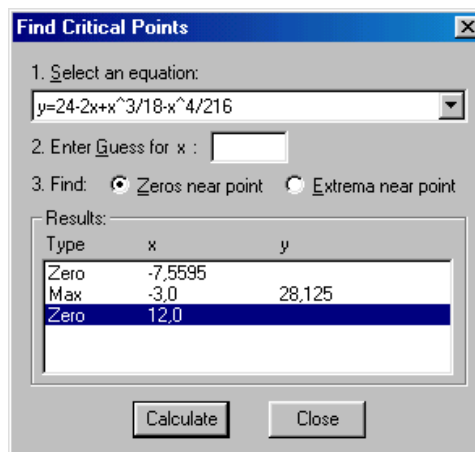
“Options, Settings, Point Tables, Custom Increment = 1” en “View, Point Tables”.



### 1.5. Kritische punten

Om de gestelde vragen te kunnen beantwoorden, heb je o.a. de nulpunten en de extrema nodig, in Graphmatica kortweg kritische punten genoemd.

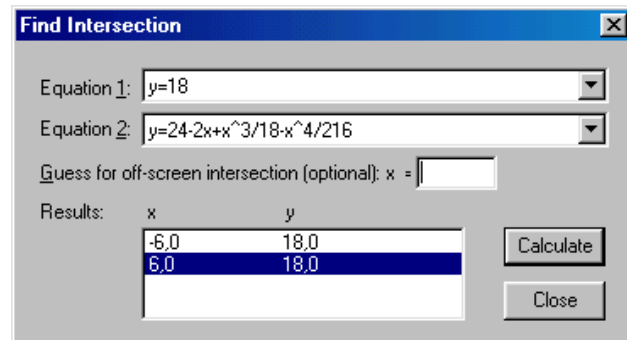
“Calculus, Find Critical Points”



### 1.6. Hoelang vlogen we hoger dan 18 meter

Plot de rechte  $y = 18$ .

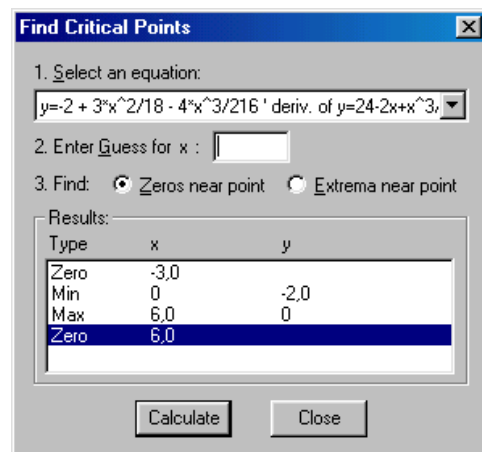
De snijpunten van twee functies vind je via “Tools, Find Intersection”



### 1.7. De afgeleide functie

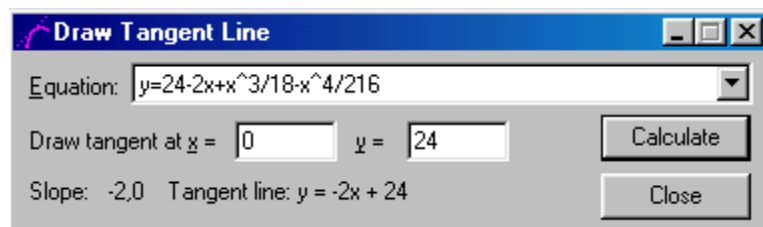
Je kan Graphmatica de afgeleide functie laten tekenen via “Calculus, Find Derivative”

De nulpunten van de afgeleide functie zijn de (kandidaat) extrema en de extrema van de afgeleide functie zijn de (kandidaat) buigpunten.



### 1.8. Een raaklijn tekenen

“Calculus, Draw Tangent” of Ctrl+T.



Merk op dat je tevens de vergelijking van de raaklijn krijgt.

## 1.9. Functies met meervoudig voorschrift

Teken de grafiek van :

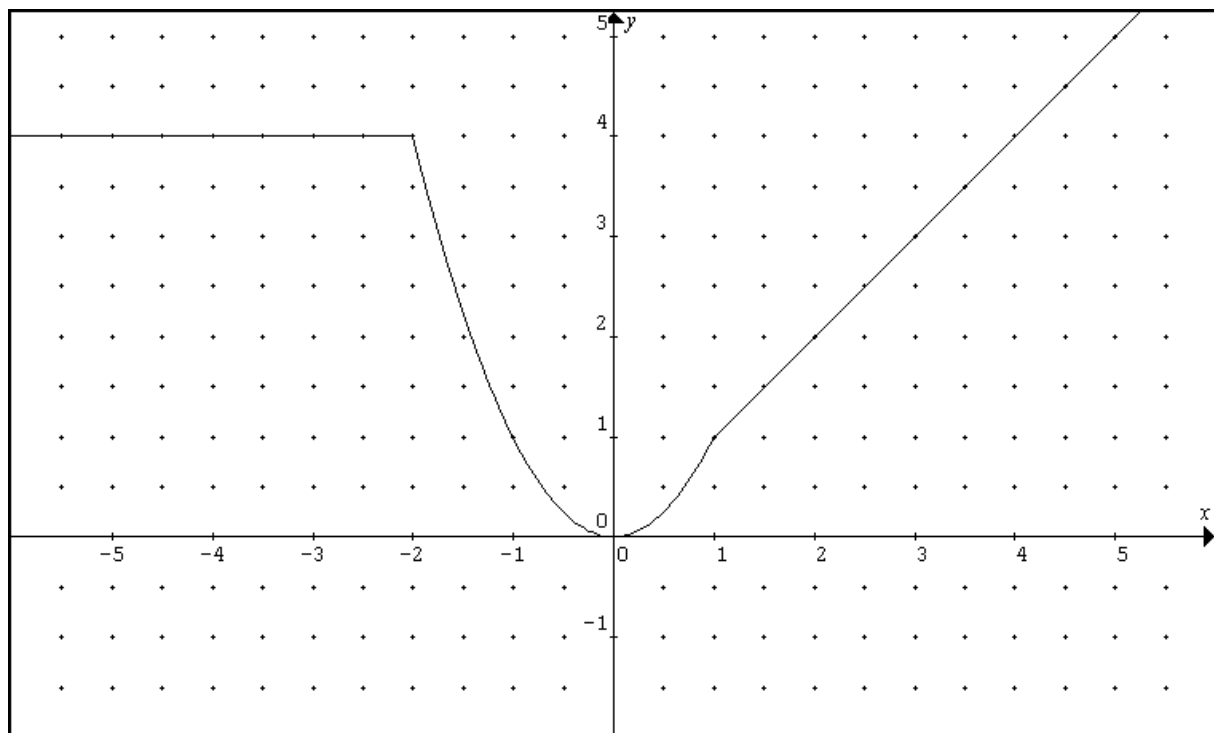
$$f(x) = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

Typ achtereenvolgens:

$$y = 4 \{x : , -2\}$$

$$y = x^2 \{x : -2 , 1\}$$

$$y = x \{x : 1 , \}$$



## 1.10. Speciale functies

- Absolute waarde : abs
- Vierkantswortel : sqrt
- Grootste gehele waarde uit : int
- e-macht : exp
- Logaritmen : log, ln
- Goniometrische functies : sin, cos, tan, cot, csc, sec
- Cyclometrische functies : asin, acos, atan, acot, acsc, asec
- Hyperbolische functies : sinh, cosh, tanh

## 1.11. Aangepast papier

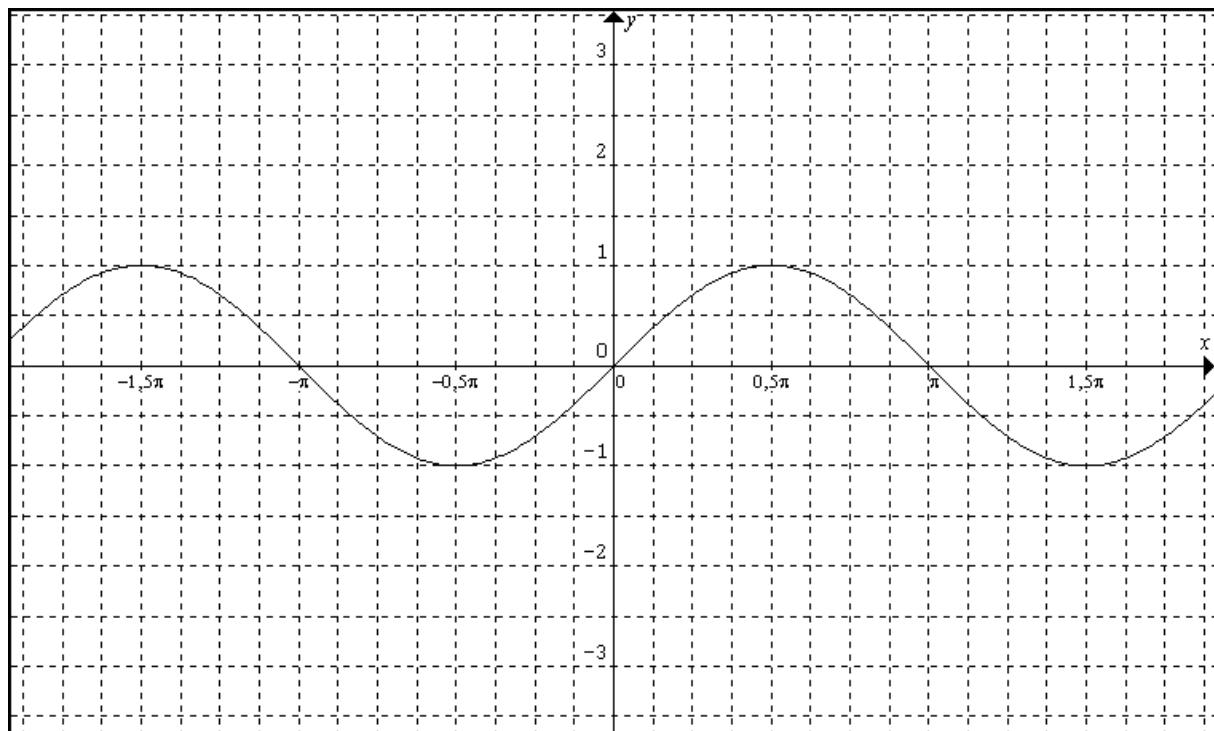
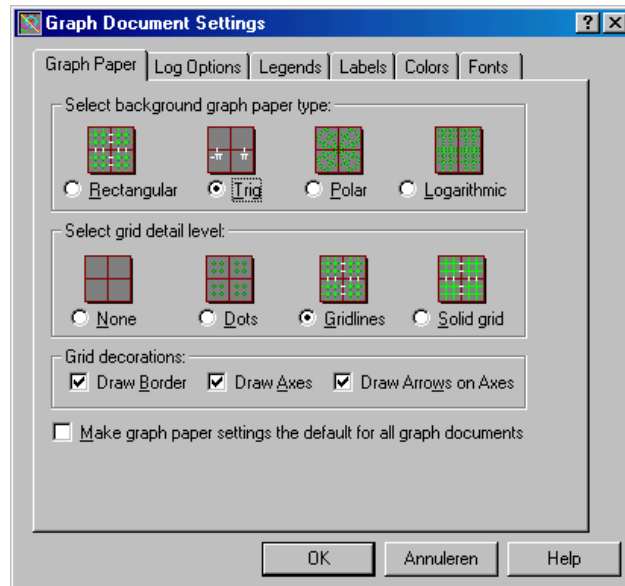
Laat Graphmatica de grafiek van  $y = \sin(x)$  tekenen.

De nulpunten van deze functie zijn moeilijk afleesbaar op de x-as. Daarom is het interessant om op de x-as andere waarden aan te brengen zoals :

$$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

Je doet dit als volgt :

“Options, Graph Paper, Graph Paper, Trig”.



## 2. Werken met parameters

Onderzoek de invloed van een parameter in het voorschrift van een functie.

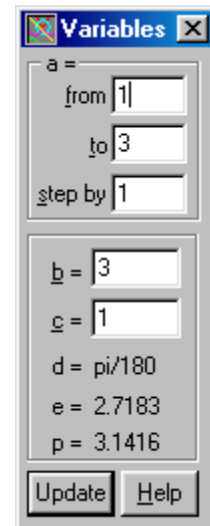
In Graphmatica kan je in beperkte mate gebruik maken van parameters. Enerzijds heb je de parameter a, anderzijds de parameters b en c.

### De functie $y = b \sin(cx)$

Typ :  $y = b * \sin(c * x)$

er verschijnt automatisch :  $y = b \sin(cx) \{b : 1\} \{c : 1\}$

Wil je nu wat experimenteren met de parameters b en c, dan open je het best volgend dialoogvenster:  
"View, Variables Panel".

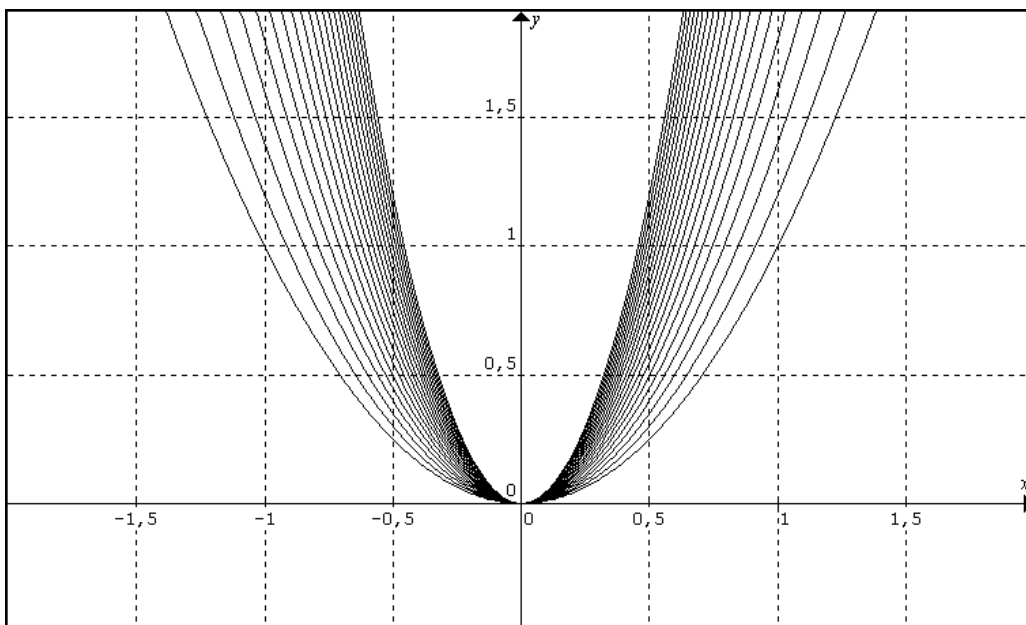


### De functie $y = a x^2$

Typ :  $y = a * x^2$

er verschijnt automatisch :  $y = a x^2 \{a : 1, 3, 1\}$

Laat nu a variëren van 1 tot 5 met stapjes van 0.2 en je krijgt onmiddellijk zo'n 20 parabolen te zien.



### 3. Bepalen van de best passende kromme

#### 3.1. Vergelijking van een rechte door twee punten

Bepaal de vergelijking van de rechte door de punten A(1,-1) en B(3,3)

#### Oplossing

Ingeven van de punten

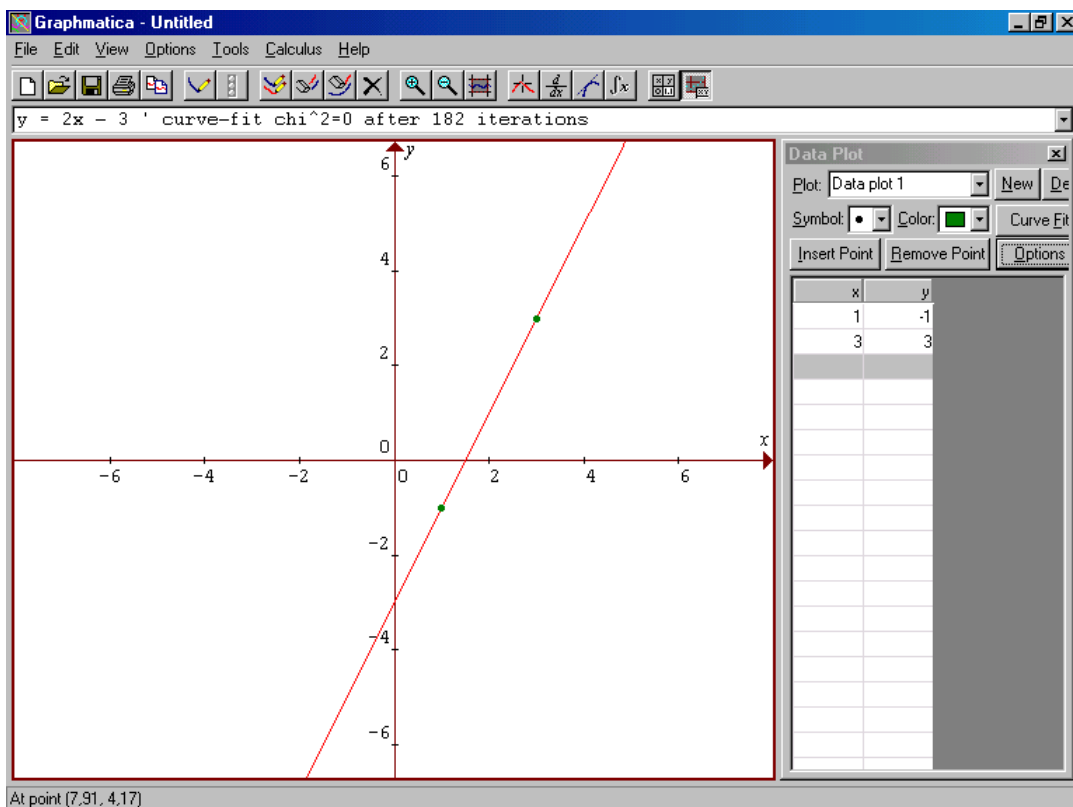
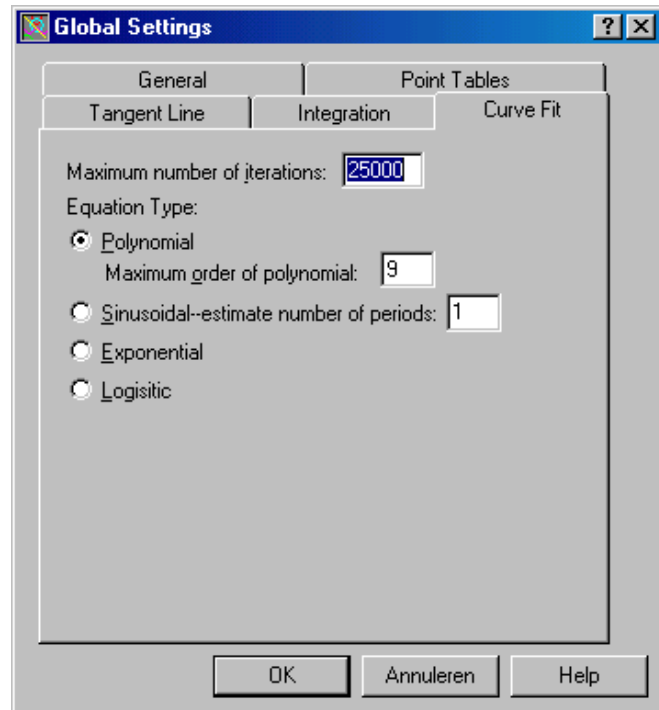
“View, Data Plot Editor”

Geef de coördinaat-  
getallen van de punten A  
en B in.

Klik op “Options” (onder  
“Curve Fit”) en zet het type op  
“Polynomial”.

Klik op “Curve Fit”.

De rechte wordt getekend en  
wanneer je er op klikt  
verschijnt de gevraagde  
vergelijking.



### 3.2. Vergelijking van een parabool door drie punten

Bepaal de vergelijking van de parabool door de punten A(-1,5), B(2,8) en C(5,-7).

#### Oplissing

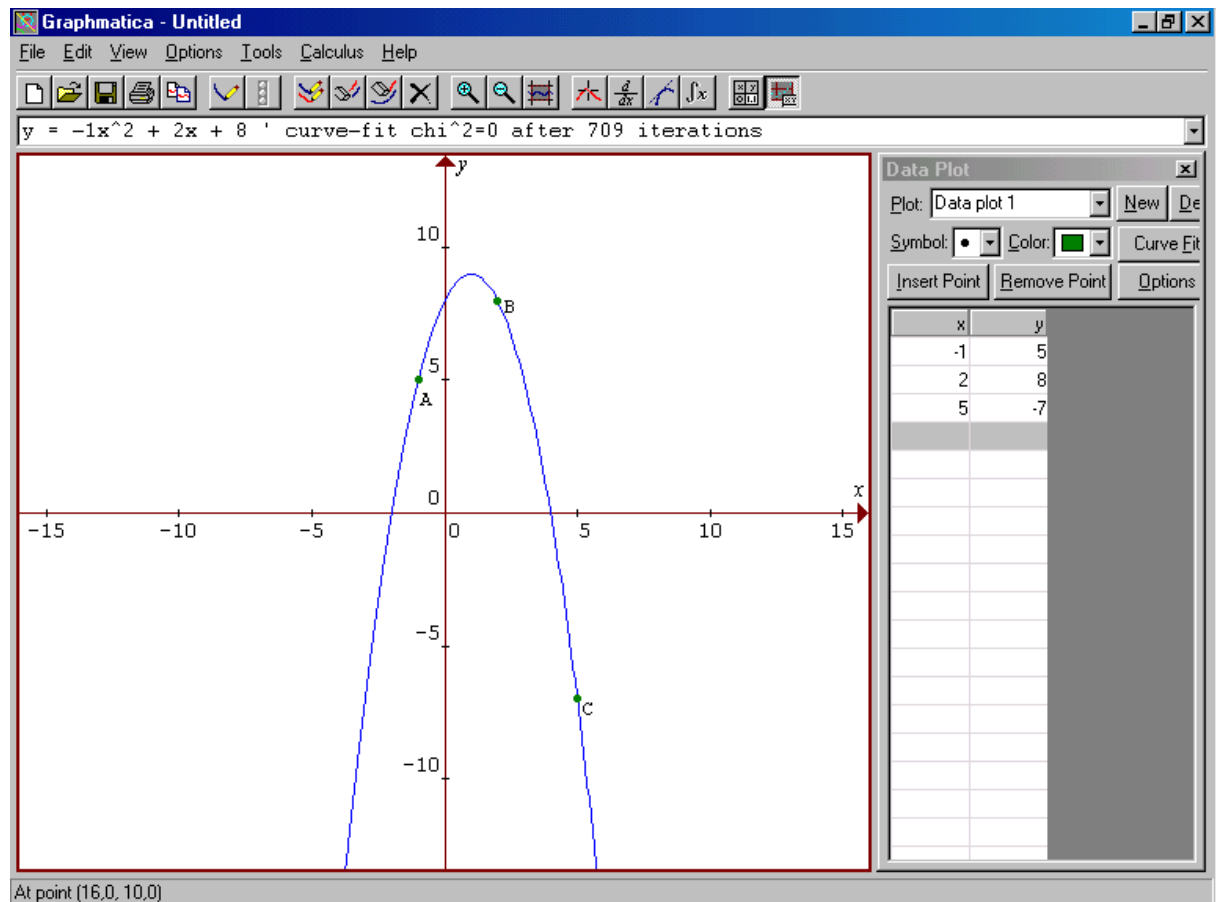
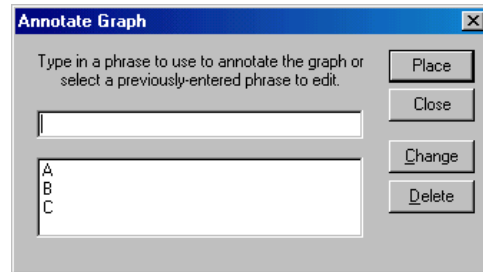
“View, Data Plot Editor”, geef de coördinaat-getallen van de punten A, B en C in.

De labels kun je plaatsen via “Edit, Annotations”.

Controleer de Curve Fit Options : “Options, Settings, Curve Fit”.

Klik op “Curve Fit”.

De parabool wordt getekend en wanneer je er op klikt verschijnt de gevraagde vergelijking.



### 3.3. Sinusoidale regressie

Joris is op vakantie in een klein vissersdorpje. Zaterdag komt zijn vriend Arne hem vergezellen op een zeiltocht. Omdat je de haven slechts in en uit mag varen bij een waterstand van minstens 4,5 meter, besluit Joris om de waterstanden vandaag (woensdag) in het oog te houden.

Hij noteert volgende metingen :

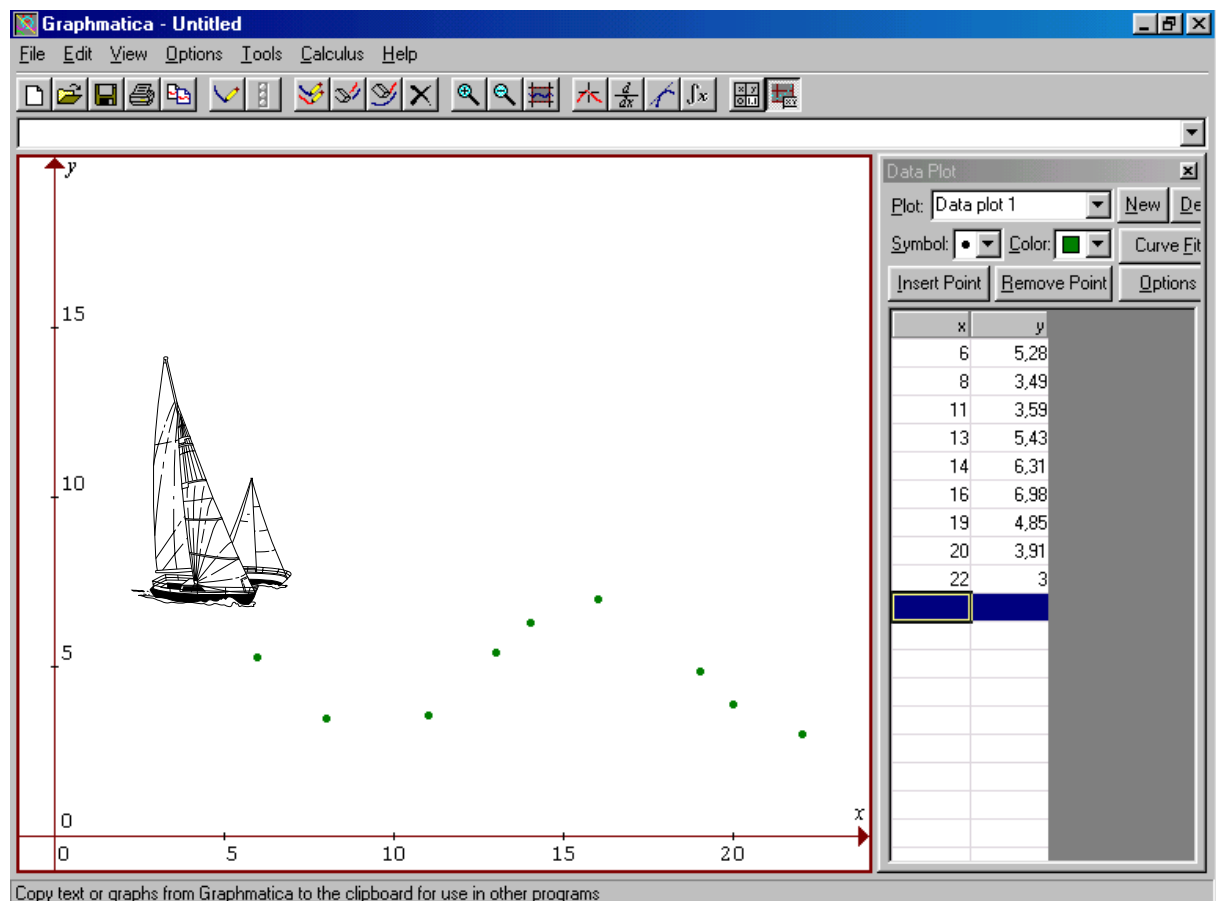
uur	6u	8u	11u	13u	14u	16u	19u	20u	22u
waterstand	5,28	3,49	3,59	5,43	6,31	6,98	4,85	3,91	3,00

Gevraagd:

- In de veronderstelling dat de waterstand sinusoidaal verloopt. Bepaal de constanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  uit het voorschrift van de algemene sinusfunctie.
- Rond welk uur kunnen Joris en Arne zaterdagmiddag uitvaren, rond welk uur moeten ze 's avonds terug zijn?

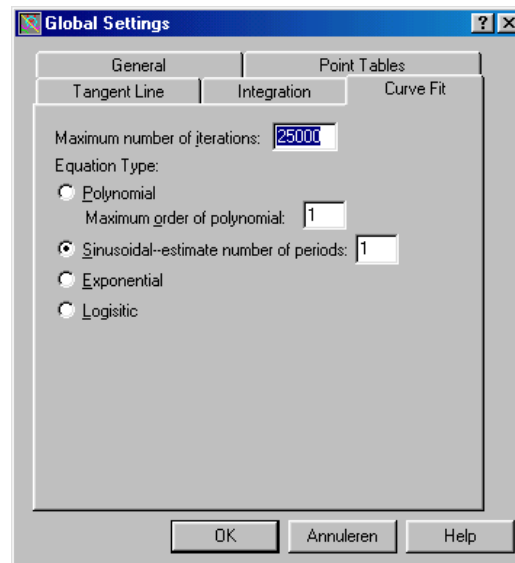
#### Ingeven van de gegevens

“View, Data Plot Editor”, geef de waarnemingen in:



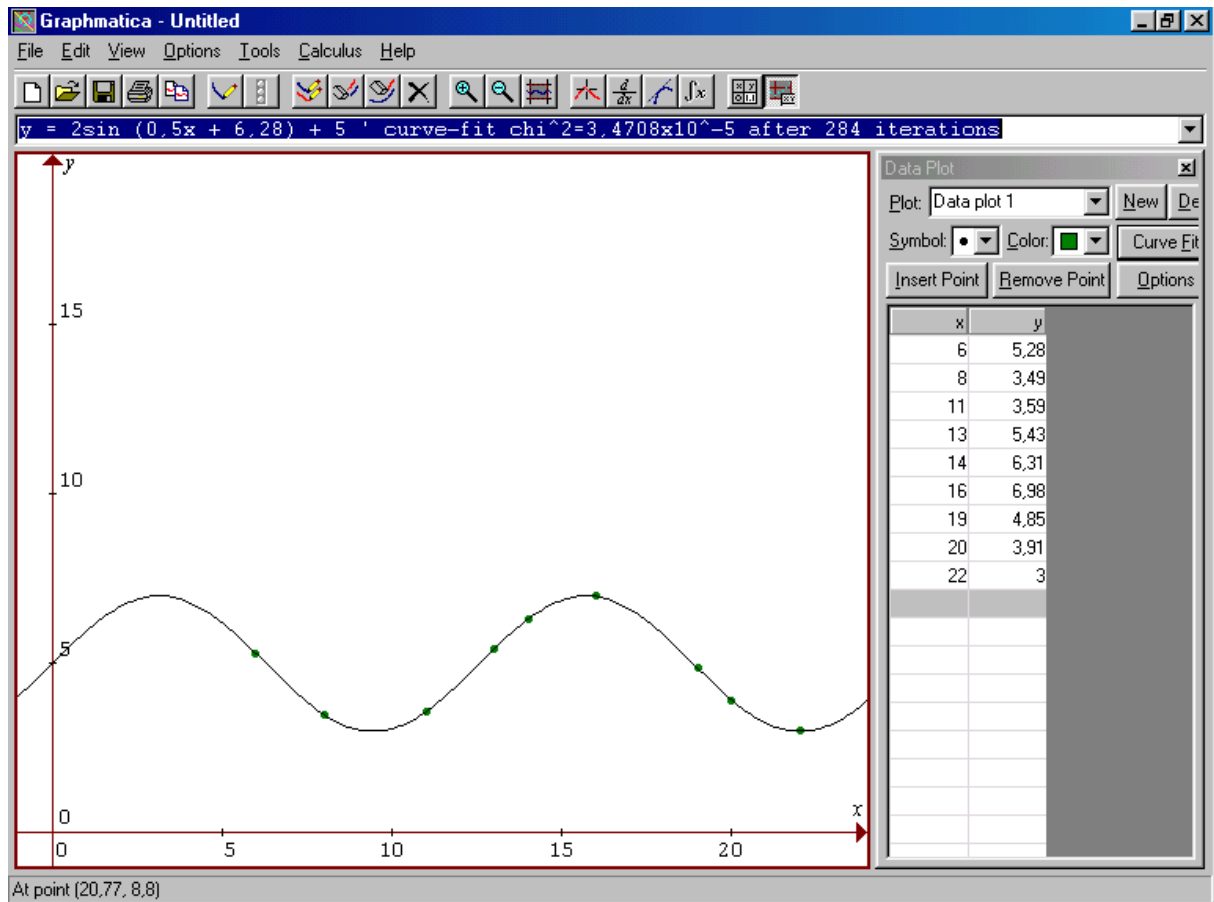
## Instellen van de regressie opties

“Options, Settings, Curve Fit”



## Bepalen van de best passende kromme

“Curve Fit”



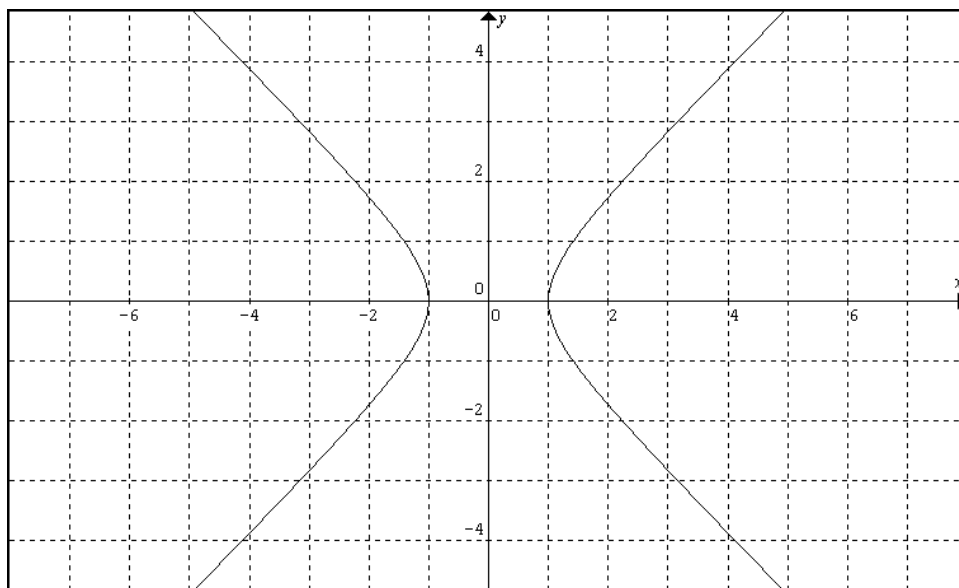
## 4. Krommen

Teken volgende krommen:

- De hyperbool  $x^2 - y^2 = 1$
- De slakkenlijn (poolcoördinaten)  $r = 1 + 2 \cos t$
- De cycloïde (parameterform)  $\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

### 4.1. Krommen met impliciet voorschrift

In Graphmatica kun je (bepaalde) krommen ingeven aan de hand van een impliciet voorschrift. We denken hier vooral aan de cirkel en de kegelsneden.

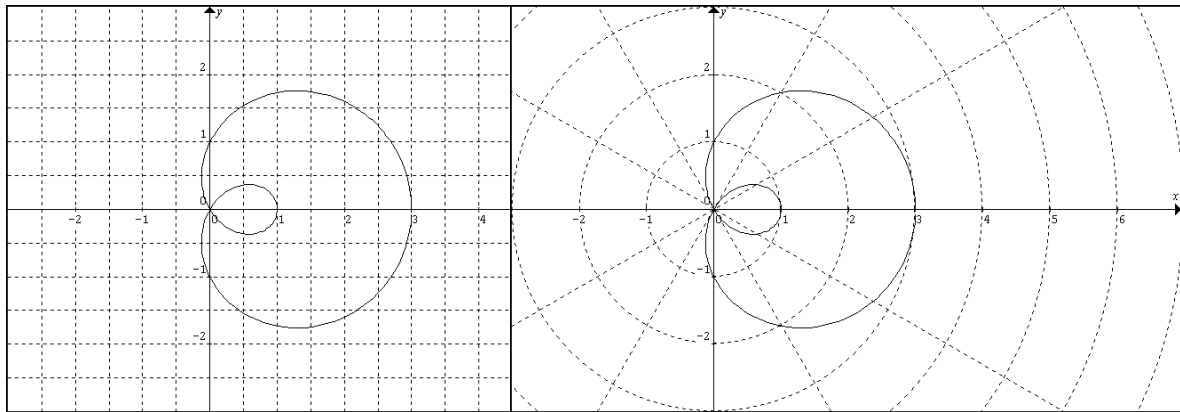


### 4.2. Krommen in poolcoördinaten

Typ :  $r = 1 + 2 \cos(t)$  en de gevraagde poolkromme verschijnt.

Via "Options, Graph Paper" kan je kiezen voor de optie "Polar".

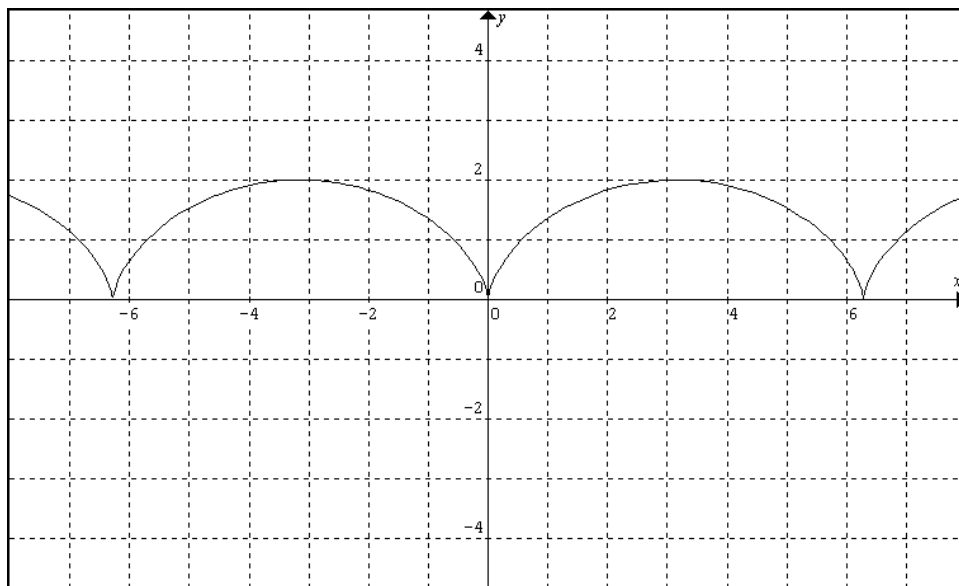
Via "View, Point Tables" krijg je het bijbehorende visgraatdiagram in zowel cartesische als poolcoördinaten.



### 4.3. Krommen in parametervorm

Typ :  $x = t - \sin(t)$  ;  $y = 1 - \cos(t)$  {t:  $-4\pi, 4\pi$ }

Bij het tekenen van krommen in parametervorm moet je het interval ingeven waartussen je de parameter laat variëren.



## 5. Integralen

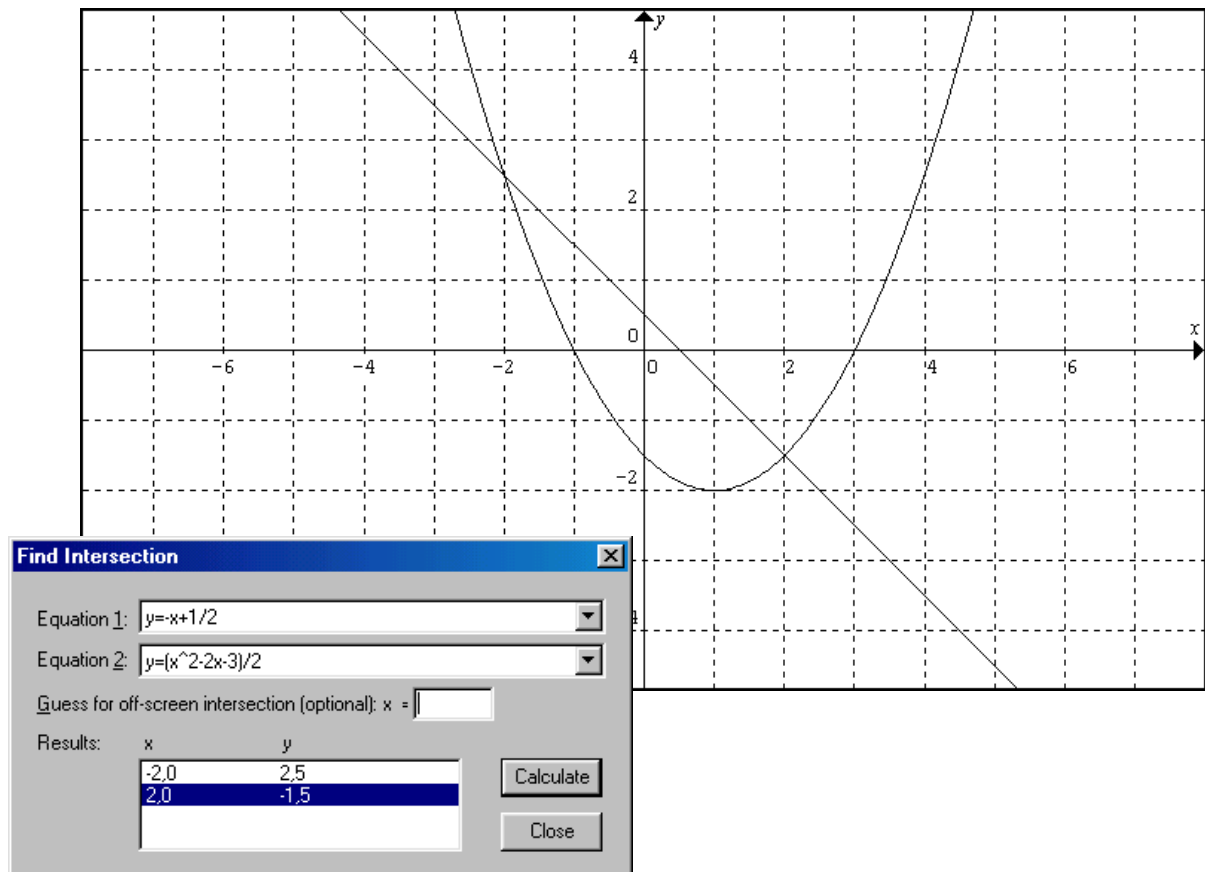
### 5.1. Bepaalde integralen

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd tussen de krommen met vergelijking:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)$$

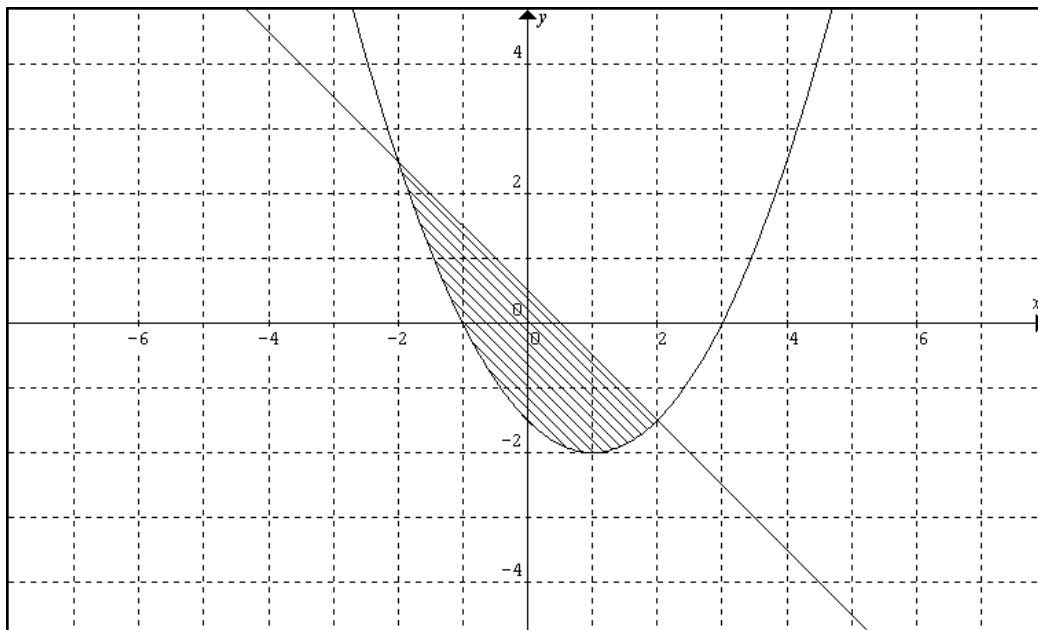
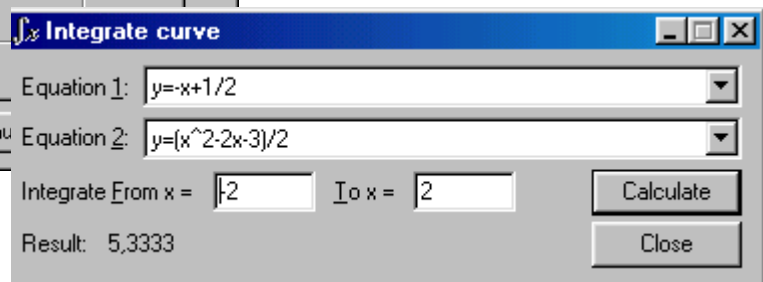
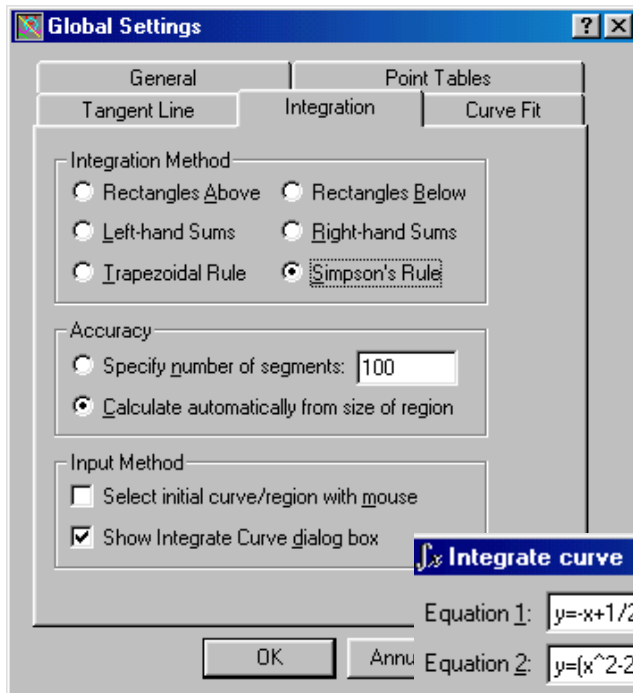
$$y = -x + \frac{1}{2}$$

Plot de grafiek van deze functies en zoek hun snijpunten.



De oppervlakte is gelijk aan :  $\int_{-2}^2 \left( \left( -x + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{2} \right) \right) dx$

Dit bereken je via "Calculus, Integrate" of Ctrl+I.  
Controleer eerst de Settings : "Options, Settings, Integration"



## 5.2. Primitieven

Teken een primitieve van  $y = x - 2$ .

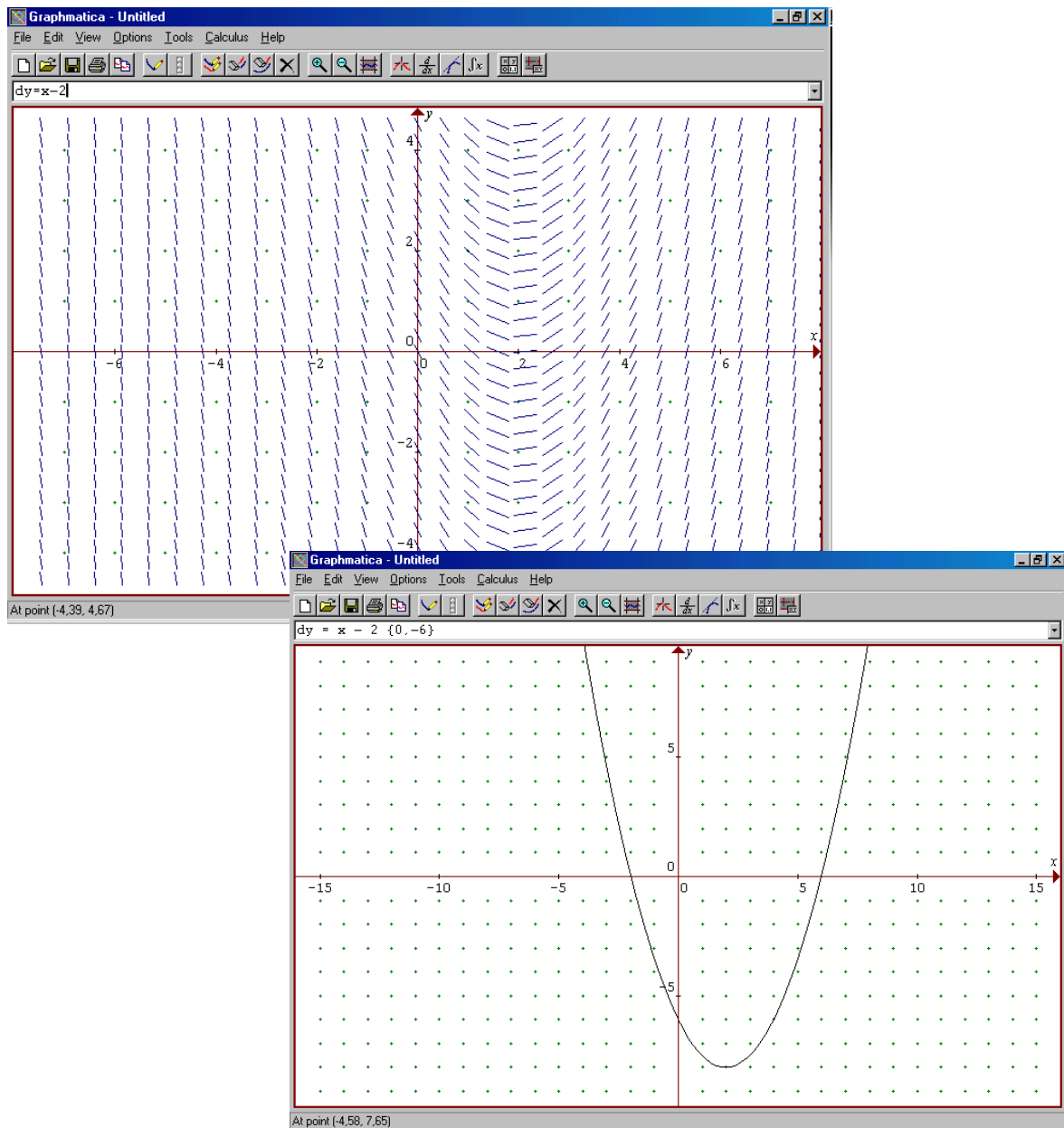
Al de primitieven worden gegeven door  $\int (x-2) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C$ .

Deze teken je door het volgende in te geven :

$$dy = x - 2$$

Wil je echter enkel die primitieve die door een welbepaald punt, bijvoorbeeld  $(0,-6)$ , gaat. Tik dan het volgende :

$$dy = x - 2 \{0, -6\}$$



## 6. De normale verdeling

### 6.1. Probleemstelling

Een machine vult pakken koffie waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.  
Hoeveel procent van de pakken koffie bevat meer dan 1000 gram?



### 6.2. De normale verdeling als functie definiëren

In Graphmatica bestaat de mogelijkheid om zelf functies te definiëren.  
M.a.w. je kan Graphmatica functies aanleren.

Definiëren we als voorbeeld de standaard normale verdeling :

$$sn(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

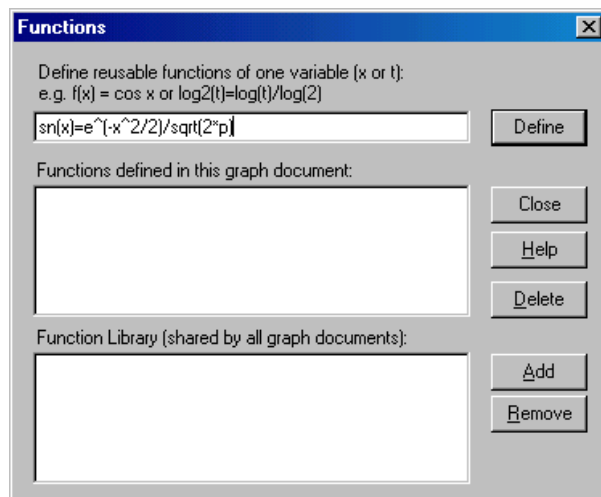
“Tools, Functions”

definieer de functie

“Define”

“Add”

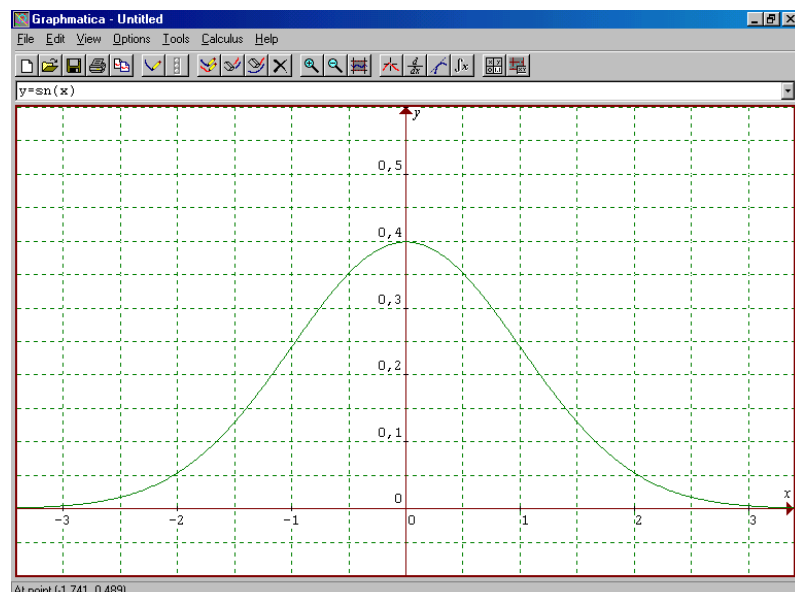
“Close”



Typ nu :

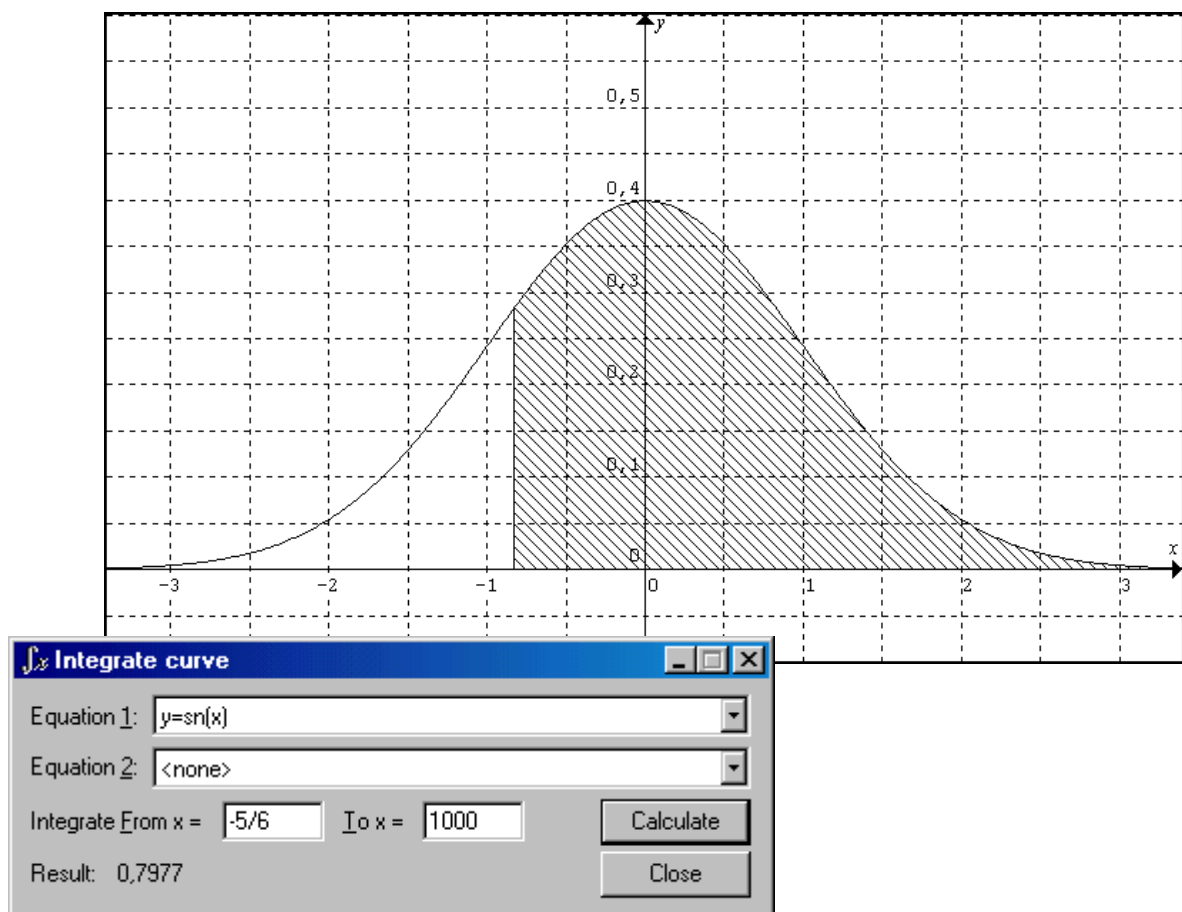
$y = sn(x)$

en de klok van Gauss verschijnt.



### 6.3. Berekenen van de kans

$$\begin{aligned} P(X > 1000) &= P\left(Z > \frac{1000 - 1005}{6}\right) \\ &= P\left(Z > -\frac{5}{6}\right) \\ &= \int_{-\frac{5}{6}}^{+\infty} sn(x) dx \end{aligned}$$



Of de gevraagde kans is 79,77 %

## 7. Regressie

### 7.1. Probleemstelling

Een fabrikant van synthetische vezels onderzoekt of het krimpen van de vezels samenhangt met de temperatuur waarbij ze gewassen worden. Er wordt 8 maal een proef verricht waarbij de vezels gedurende 30 minuten aan een bepaalde temperatuur worden blootgesteld. De geconstateerde krimp werd (in procenten van de oorspronkelijke lengte) als volgt vastgesteld:

Temp °C	60	70	80	90	100	75	85	100
Krimp (%)	1,2	1,9	2,8	3,8	4,2	2,6	3,2	4,5

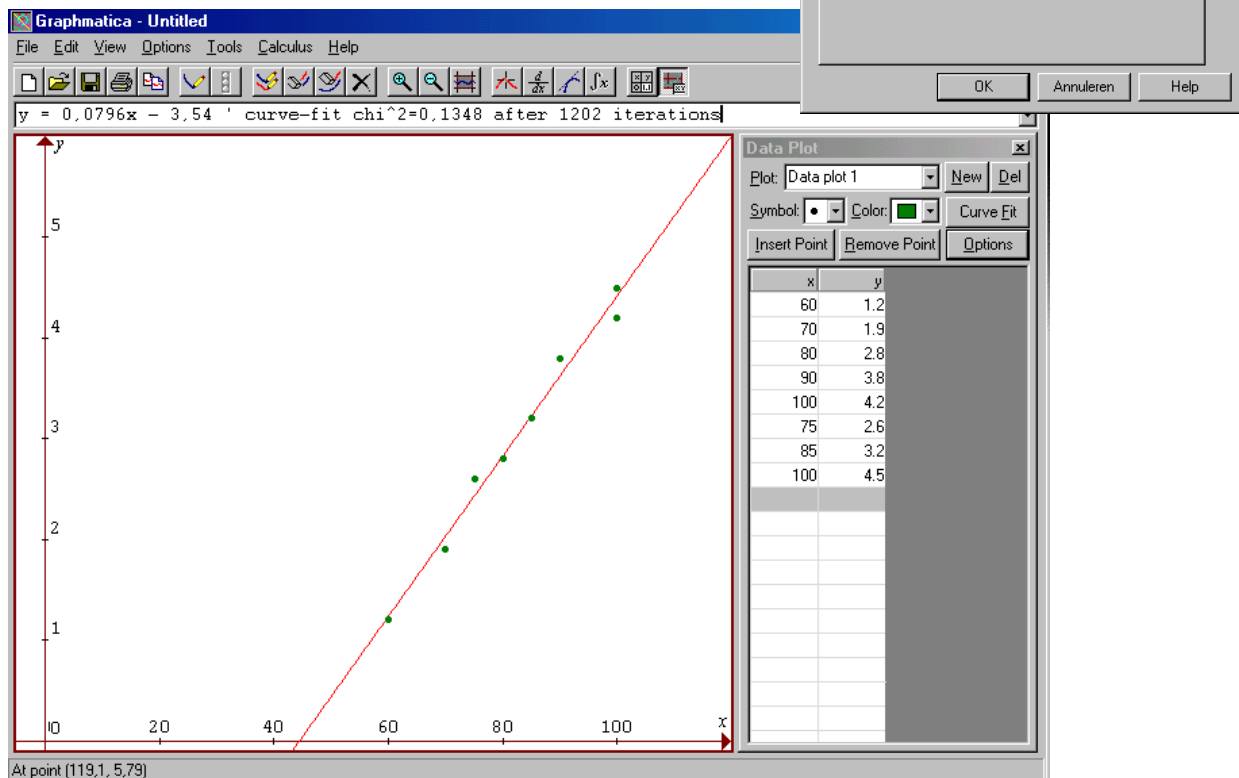
Voorspel de krimp indien de temperatuur X de waarde 65° heeft.

### 7.2. Bepalen van de regressielijn

Geef de gegevens in via de “Data Plot Editor”.

Kies voor “Polynomiale” regressie van orde 1.

“Curve Fit”



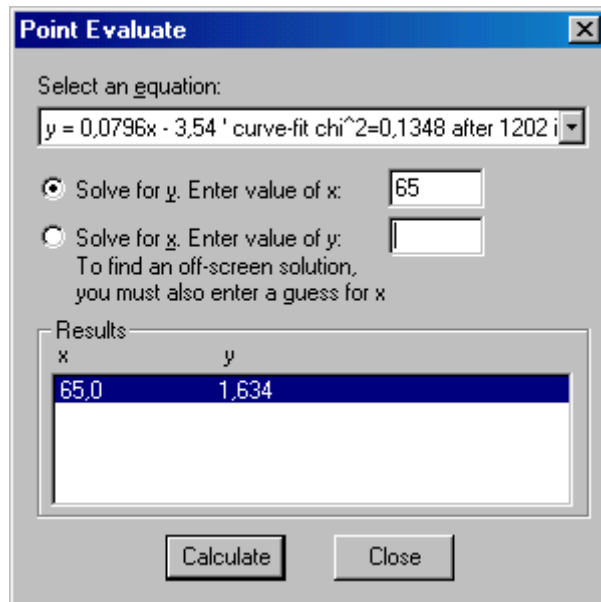
De vergelijking van de regressielijn luidt :

$$y = 0,0796x - 3,55$$

### 7.3. Voorspellen van de krimp

“Tools, Evaluate”

De verwachte krimp bij een temperatuur van 65° bedraagt 1,63 %



## 8. Ongelijkheden

Geef achtereenvolgens volgende ongelijkheden in :

$$\text{abs}(x) + \text{abs}(y) < 2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 < 4$$

$$y + (x - 3)^2 + 1 < 0$$

