Hoofdstuk 6

Integraalrekening

6.9 Practische berekening van een integraal

Sommige integralen worden het best opgelost met een eenvoudige truc. Dit is een expertise die je alleen via het maken van oefeningen verwerft.

Voorbeeld

$$\int \frac{x-5}{x+5}dx = \int \frac{x+5-10}{x+5}dx = x - 10\ln|x+5| + C$$

6.10 Partiële integratie (2)

We hebben gezien dat sommige integralen vereenvoudigd kunnen worden door partipartiële integratie.

Formule

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Soms is deze partiële integratie vanzelfsprekend, soms niet. Laat ons een aantal speciale gevallen apart beschouwen

6.10.1 Vermenigvuldiging met 1

$$\int \ln x dx = \int \ln x 1 dx = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)$$

6.10.2 Terug naar af

Soms kom je na (herhaalde) integratie opnieuw uit bij de integraal waar je van vertrokken bent. Alles voor niets? Verre van! Kijk naar het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

$$\int \cos x e^x dx = \cos x e^x - \int (-\sin x e^x) dx = \cos x e^x + \sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

Door de integralen in hetzelfde lid te zetten, bekomen we

$$\int \cos x e^x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

Opmerking
Soms kun je alles schrappen en kom je de vergelijking $0 = 0$ uit. Dit betekent dat je de verkeerde u en dv gekozen hebt.

6.10.3 Reductieformule

Neem als voorbeeld de integraal $\int x^5 e^x dx$. Deze integraal vraagt er om om met partiële integratie berekend te worden. Dit geeft

$$\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - 5 \int x^4 e^x dx$$

Eerder dan verder te ploeteren tot je de macht van x tot nu hebt teruggebracht(hetgeen zeker mogelijk is), kun je een formule afleiden voor het algemene geval

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^(n-1) e^x dx$$

Door herhaalde toepassing van deze formule bekomen we dan de volgende uitkomst

$$\int x^5 e^x dx = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x$$

6.11 Oneigenlijke integralen

Oneigenlijke integralen hebben een oneindig integratiedomein omdat één of beide integratiegrenzen oneindig zijn.

$$\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

Voorbeelden:

- Wat is de minimum beginsnelheid waarmee een space probe moet worden gelanceerd om het zwaarteveld van de aarde te verlaten?
- Wat is de totale oppervlakte onder de kromme $y = \frac{1}{1+x^2}$?

Om op deze vragen een antwoord te geven, moeten we de definitie van de integraal uitbreiden. Het berekenen van een oneigenlijke integraal van de vorm $\int_a^\infty f(x)dx$ gebeurt in twee stappen:

1. Eerst berekenen we de bepaalde integraal $\int_a^\lambda f(x)dx$ waarbij λ een positieve parameter is, waarvan de waarde van de integraal uiteraard een functie is:

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$$

2. Dan nemen we de limiet van $I(\lambda)$ voor $\lambda \to \infty$. Als deze limiet bestaat en eindig is zeggen we dat de oneigenlijke integraal convergent is en we definiëren

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)dx$$

6.11.1 Oneigenlijke integralen: opmerking

Behalve de zojuist gedefinieerde oneigenlijke integraal, bestaan er nog andere oneigenlijke integralen, namelijk die waarvoor de waarde van de integraal oneindig kan worden omdat de integrand er oneindig wordt.

6.11.2 Oneigenlijke integralen: Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^{\lambda} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} [\arctan]_0^{\lambda} = 2 \lim_{\lambda\to\infty} \arctan\lambda \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

6.12 Hyperbolische functies

Definitie:
Sinus hyperbolicus: $y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$
Cosinus hyperbolicus: $y = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$
Tangens hyperbolicus: $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Cotangens hyperbolicus: $y = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Opmerking:
De naamgeving suggereert dat de hyperbolische functies verwant zijn aan de goniometrische functies. Dat is ook zo: als we in de definitie van de hyperbolische functies de x zouden vervangen door een imaginaire exponent, dan zouden we via de formule van Euler de overeenstemmende goniometrische functies bekomen. In tegenstelling tot de goniometrische functies zijn de hyperbolische functies niet periodiek.

Eigenschappen van sinh

Sinus hyperbolicus
De functie $\sinh x$ heeft de volgende eigenschappen:

- domein $-\infty \leq x \leq \infty$
- bereik $-\infty \leq y \leq \infty$
- oneven: $\sinh(-x) = -\sinh x$
- nulpunten: $x = 0$
- extrema: geen
- monotonie: strict monotoon stijgend

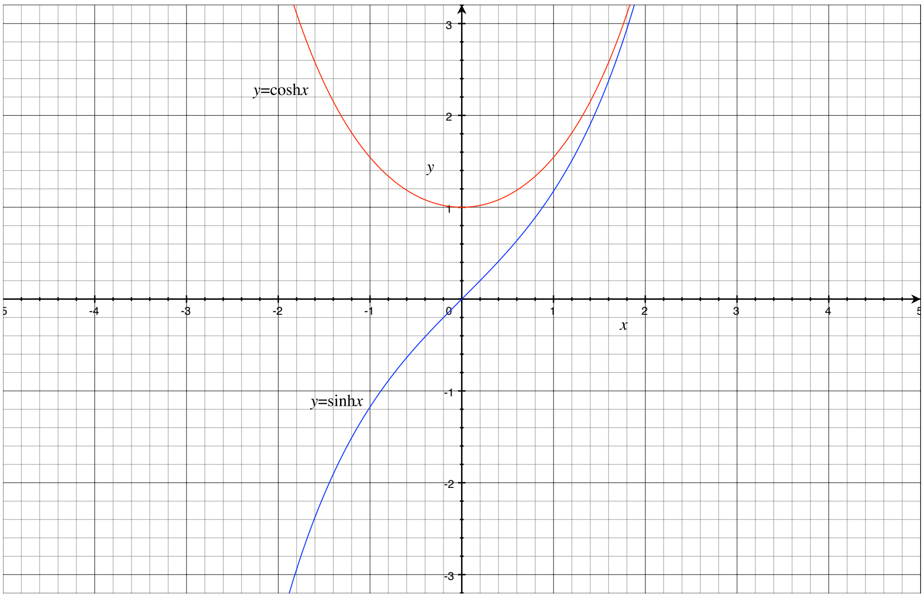
Eigenschappen van cosh

Cosinus hyperbolicus

De functie $\cosh x$ heeft de volgende eigenschappen:

- domein $-\infty \leq x \leq \infty$
- bereik $1 \leq y \leq \infty$
- even: $\cosh(-x) = \cosh x$
- nulpunten: geen
- minima: $x = 0$
- monotonie: nee

6.12.1 Grafieken van sinh en cosh



Een vrijhangend koord, opgehangen aan twee punten, neemt onder invloed van de zwaartekracht de vorm aan van de grafiek van de hyperbolische functie: $y = c\cosh(ax)$ (a, c: parameters). Deze kromme wordt daarom ook de kettinglijn of kettingkromme genoemd.

Eigenschappen van tanh

Tangens hyperbolicus

De functie $\tanh x$ heeft de volgende eigenschappen:

- domein $-\infty \leq x \leq \infty$
- bereik $-1 \leq y \leq 1$
- oneven: $\tanh(-x) = -\tanh x$
- nulpunten: $x = 0$
- polen: geen

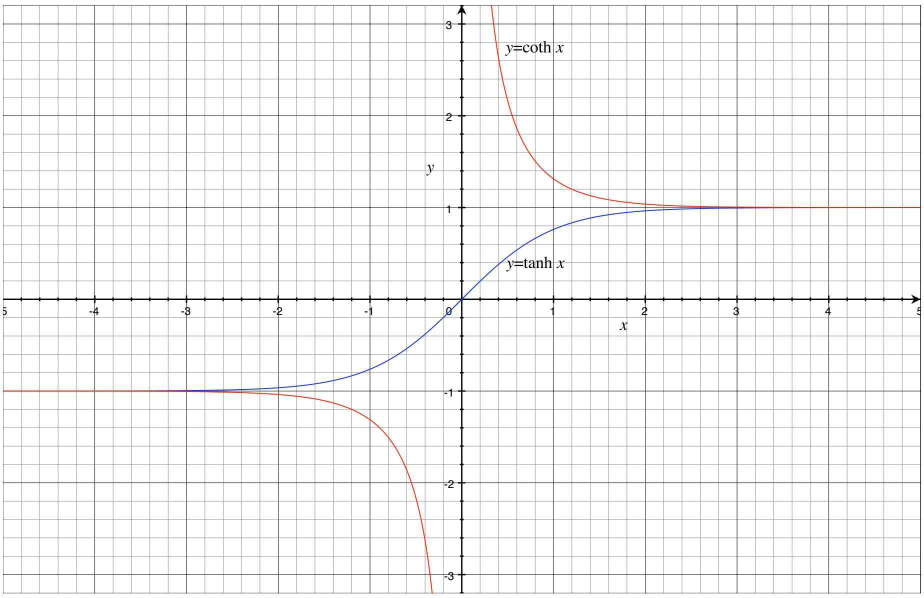
- monotonie: strict monotoon stijgend
- asymptoten: voor $x \to \infty$: $y = 1$; voor $x \to -\infty$: $y = -1$

Eigenschappen van coth

Cotangens hyperbolicus
De functie $\coth x$ heeft de volgende eigenschappen:

- domein: $|x| > 0$
- bereik: $|y| > 1$
- oneven: $\coth(-x) = -\coth x$
- nulpunten: geen
- polen: $x_0 = 0$
- monotonie: nee
- asymptoten: voor $x \to 0$: $x = 0$; voor $x \to \infty$: $y = 1$; voor $x \to -\infty$: $y = -1$

6.12.2 Grafieken van tanh en coth



6.12.3 Relaties tussen hyperbolische functies

Uit de definities volgt vanzelfsprekend dat: $\tanh = \frac{\sinh x}{\cosh}$ en $\coth = \frac{\cosh}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh}$

Somregels

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$$
$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$$

Substitutie:

$$\begin{aligned} x &= a \sinh u \\ dx &= a \cosh u \, du \\ \sqrt{a^2 + x^2} &= a \cosh u \end{aligned}$$

6.13 Substituties met hyperbolische functies

6.13.1 Type (E)

Type (E) integraal

$$\int f(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

6.13.2 Type (E): voorbeelden

1. $\int \sqrt{1 + x^2} dx \quad (x = \sinh u)$
2.

6.13.3 Type (F)

Type (F) integraal

$$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

Substitutie:

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \\ dx &= a \sinh u \, du \\ \sqrt{x^2 - a^2} &= a \sinh u \end{aligned}$$

6.13.4 Type (F): voorbeelden

1. $\int \sqrt{x^2 - 9} dx \quad (x = 3 \cosh u)$
2.

6.13.5 Betekenis van de integratievariabele:

De integratie-variabele heeft geen enkele betekenis buiten de integraal.

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(u) du$$

Voorbeeld:

$$\int_1^2 (x^2 + 1) dx + 2 \int_{-2}^{-1} u du = \int_1^2 (x - 1)^2 dx$$

6.14 Numerieke integratie

6.14.1 Trapeziumregel

Als we het integratie-interval $[a, b]$ verdelen in n deelintervallen van gelijke grootte, dan vinden we de volgende benadering van de integraal: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Trapeziumformule
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]$$

Opmerking
Er bestaan integratie-formules van hogere orde (losjes gezegd: integratie-formules die met evenveel punten een beter resultaat geven). Afhankelijk van de situatie is het al dan niet zinvol om over te gaan tot een van deze methoden (bvb Simpson, Hermitte). De eenvoud van de trapeziumregel (zowel wat afleiding als implementatie betreft) maakt deze regel de favoriete oplossing voor vele practische integratie-problemen. Vaak is het verdubbelen van het aantal punten goedkoper dan het implementeren van een meer gesofisticeerde methode.

6.15 Toepassingen

6.15.1 Radio-actief verval

6.15.2 Integreren van een bewegingsvergelijken

Het principe wordt afdoende geïllustreerd met de afleiding van de positie als functie van de tijd voor een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (constante versnelling).

6.16 Oppervlakteberekening

6.16.1 Een eerste voorbeeld

Voorbeeld
Zoek de oppervlakte ingesloten door de parabool $y = x^2 - 2x + 3$, de x-as en de lijnen $x = 0$ en $x = 3$. Antwoord: 9

6.16.2 Teken van de oppervlakte.

We hebben gezien dat de tekenconventie bij integratie is dat het teken wijzigt wanneer de integratie-grenzen worden omgewisseld, en dat een oppervlakte onder de x-as met tussen de grenzen a en b met $a < b$ ook als negatief gerekend wordt. Zo is bvb. de integraal van een sinusfunctie over een ganse periode gelijk aan nul.

Uiteraard is een oppervlakte in de fysische betekenis altijd positief. We dienen in dat geval de integraal te splitsen in de stukken die boven en stukken onder de x-as liggen, en absolute waarde te nemen van de integralen die een negatieve oppervlakte geven. Dit betekent dat we de nulpunten van de integrand moeten kennen.

6.16.3 Oppervlakte tussen twee krommen.

Uit de definitie van een bepaalde integraal volgt meteen dat de oppervlakte tussen twee krommen $f_b(x)$ en $f_o(x)$ waarbij $f_b(x) > f_o(x)$, voor $a \leq x \leq b$, gegeven wordt door

$$A = \int_a^b f_b(x) - f_o(x) dx = \int_a^b f_b(x) dx - \int_a^b f_o(x) dx$$

Toepassing: arbeid in een (p, V)-diagram. **Opmerking:** Als de functies $f_b(x)$ en $f_o(x)$ elkaar snijden op het interval $a \leq x \leq b$, dan moet het integratie-inteval gesplitst worden in deelintervallen waarvoor aan de voorwaarde $f_b(x) > f_o(x)$, voor $a \leq x \leq b$ wél voldaan is.

6.17 Booglengte van een vlakke kromme

We proberen een antwoord te vinden op de vraag: wat is de lengte van de kromme met vergelijking $y = f(x)$ tussen de grenzen $x = a$ en $x = b$? We kiezen een infinitesimaal stukje kromme ds, tussen de punten P en Q. We mogen dit stukje vervangen door een stukje raaklijn aan de kromme, tussen dezelfde punten P en Q. We hebben (volgens de stelling van Pythagoras) dat

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

Dit leidt tot de volgende uitdrukking voor de booglengte $s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

6.18 Booglengte van een vlakke kromme (vervolg)

Als de kromme gegeven door een parametervergelijking $x = x(t)$ en $y = y(t)$ dan kan de bovenstaande methode op vrijwel dezelfde wijze worden toegepast: we kiezen weer een infinitesimaal stukje kromme ds, tussen de punten P en Q. We mogen dit stukje wederom vervangen door een stukje raaklijn aan de kromme, tussen dezelfde punten P en Q. We hebben nu (volgens de stelling van Pythagoras) dat

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt^2$$

Dit leidt dan tot de volgende uitdrukking voor de booglengte $s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

6.19 Booglengte van een vlakke kromme

Bereken de omtrek van een cirkel, gebruik makende van de uitdrukking voor een booglengte. Doe dit een keer met de expliciete uitdrukking van een cirkel, en een keer met de parametervoorstelling.

6.20 Volume van een omwentelingslichaam

6.21 Lineair en kwadratisch gemiddelde

6.22 Zwaartepunten van vlakken en lichamen

6.22.1 Zwaartepunt van een homogeen lichaam

6.22.2 Zwaartepunt van een omwentelingslichaam

6.23 Masssatraagheidsmomenten

Stelling der evenwijdige assen (Stelling van Steiner).

6.24 Meervoudige integralen