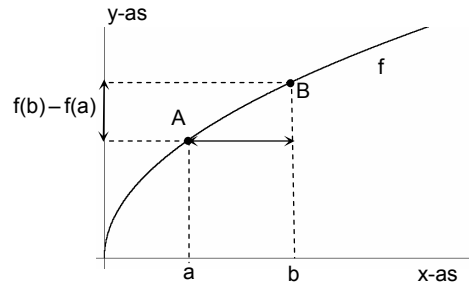


(forka): de formule staat op de formulekaart

1 De afgeleide functie

De **gemiddelde groeisnelheid** van de functie f op $[a, b]$ is $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Het is de helling van de lijn door de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.



De **groeisnelheid** van de functie $y=f(x)$ in het punt met x -coördinaat a is de helling van de raaklijn aan de grafiek in het punt met eerste coördinaat a .

Als je een formule van $f(x)$ hebt, dan kun je de helling goed benaderen door de gemiddelde groei van de functie op een klein interval waar x in ligt uit te rekenen met een rekenschema.

Opmerking

Met de Δ -notatie kunnen we dit ook zó zeggen:

$$\Delta x = b - a \text{ en } \Delta y = f(b) - f(a) \text{ en dus } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De groeisnelheid van de functie f in het punt met eerste coördinaat x noteren we met $f'(x)$ of met $\frac{dy}{dx}$.

De functie $f'(x)$ heet **de afgeleide functie van f** . De afgeleide functie bepalen heet: de **functie differentiëren**.

In **1 De afgeleide functie** worden de volgende regels voor differentiëren afgeleid.

- afgeleide van een machtsfunctie:

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ voor elk getal } \alpha \text{ (forka)}$$

- veelvoudregel:

$$\frac{d}{dx} a \cdot f(x) = a \cdot \frac{d}{dx} f(x) \text{ (forka) voor elk getal } a.$$

Niet elke functie is in elk punt differentieerbaar.

Verder is in hoofdstuk 1 het verband tussen de oppervlakte onder een grafiek en de afgeleide functie aan de orde geweest (die zijn elkaars omgekeerde). Dit komt grondig aan de orde in **6 Oppervlakte en inhoud**.

In deze samenvatting gaan we daar verder niet op in.

Wat je verder moet kunnen

- Een vergelijking opstellen van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie

Opmerking

Je kunt die vergelijking ook vinden via de algemene vergelijking van een raaklijn op de forka.

Zijdelings komt nog eens aan de orde

- Voor positieve x heeft $x^\alpha = 10$ oplossing: $x = 10^{\frac{1}{\alpha}}$. (forka)

- Rijen, de Σ -notatie, de som van een **rekenkundige** en een **meetkundige rij**.

Voorbeeld

$$f(x) = x^3$$

Op de grafiek ligt het punt $(2,8)$. De helling in $(2,8)$ is

$$\text{ongeveer } \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} \approx 12.$$

Voorbeeld

$$\text{Als } f(x) = 2x^3, \text{ dan } f'(x) = 6x^2.$$

Dus de helling van de grafiek van f in $(2,16)$ is 12.

Voorbeeld

De functie $f(x) = x^2 + |x - 1|$ is niet differentieerbaar in $(1,1)$.

Ga na dat de linker raaklijn in $(1,1)$ helling 1 heeft en de rechter raaklijn in $(1,1)$ helling 3.

(Dus er zit een knik in de grafiek bij $(1,1)$.)

Voorbeeld

Een vergelijking van de raaklijn in $(2,16)$ aan de grafiek van $f(x) = 2x^3$.

De helling is 12 (zie boven), dus vergelijking:

$$y = 12x + b.$$

Lijn gaat door $(2,16)$, dus $16 = 12 \cdot 2 + b$, dus $b = -8$, dus een vergelijking is: $y = 12x - 8$.

Een rekenkundige rij is van de vorm:

$a, a + v, a + 2v, \dots$

De som van een rekenkundige rij is:

het aantal termen · het gemiddelde van de begin- en de eindterm.

$$a + a + v + a + 2v + \dots + a + (n - 1)v =$$

$$\frac{1}{2}n \cdot (2a + (n - 1)v)$$

Op de forka staat de (gelijkwaardige) formule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kv) = na + \frac{1}{2}n(n - 1)v$$

De som van een meetkundige rij met beginterm a en reden r , ($r \neq 1$)

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

In de Σ -notatie: $\sum_{k=0}^{n-1} a \cdot r^k = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Voorbeeld

De rij 2, 6, 10, ... 102 is rekenkundig met verschil $v = 2$ en beginterm $a = 2$. Het aantal termen is (ga dat na): 26

$$\text{Dus: } 2 + 6 + 10 + \dots + 102 = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (2 + 102) = 1352$$

Voorbeeld

Voor een rij u_n geldt: $u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ en $u_0 = 2$.

Deze rij is meetkundig met beginterm $a = 2$ en reden $r = -\frac{1}{2}$.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 2 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = 1\frac{1}{3} \cdot (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11})$$

2 Combinatoriek en kans

Het aantal mogelijkheden om n dingen op een rij te zetten is: $n!$

Het aantal **combinaties** van k uit n is $nCrk$ ook wel $\binom{n}{k}$ genoteerd. Hierbij let je *niet* op de volgorde.

Het aantal **permutaties** van k uit n is $nPrk$. Hierbij let je *wel* op de volgorde.

$$nCrk = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ en } nPrk = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Veel voorkomend is:

het aantal rijtjes van lengte 10 met 6 keer 0 en 4 keer

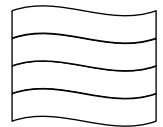
$$1 \text{ is: } \binom{10}{4} \text{ (of wat hetzelfde is: } \binom{10}{6} \text{)}$$

Twee kansverdelingen komen veel voor. Zij komen overeen met het trekken van knikkers uit een vaas met witte en zwarte knikkers, waarbij je erop let hoe vaak je een witte knikker trekt.

Voorbeeld

Elke baan in de vlag heeft de kleur rood wit blauw of oranje. Elk van deze kleuren komt één keer voor.

Er zijn dan $4! = 24$ mogelijke vlaggen.



Voorbeelden

Je hebt 10 verschillende kleuren. Met vier daarvan wil je de banen van de vlag kleuren, alle vier verschillend van kleur.

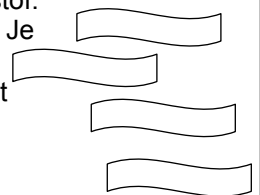
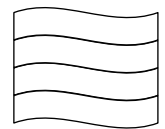
De volgorde is van belang. Het aantal mogelijkheden is:

$$10 nPr 4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$$

Je hebt 4 precies dezelfde lapjes stof. Die wil je alle verschillend kleuren. Je kunt kiezen uit 10 kleuren.

De volgorde is niet van belang. Het aantal mogelijkheden is:

$$10 nCr 4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10!}{6! 4!}$$



Laten we zeggen: je trekt 10 keer uit een vaas met 20 witte en 50 zwarte knikkers.

Dat kun je doen *zonder terugleggen*, dan noemen we de verdeling **hypergeometrisch** of *met terugleggen*, dan noemen we verdeling **binomiaal**.

X is de **stochast** die het aantal witte knikkers telt. Dan zeggen we, in het geval dat er telkens teruggelegd wordt: X is binomiaal verdeeld met parameters $n = 10$ en $p = \frac{2}{7}$.

Als X binomiaal verdeeld is met parameters p en n, dan is $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (forka).

Opmerking

In een vaas zitten 10 rode en 10 blauwe knikkers. Je trekt net zolang tot je 3 blauwe knikkers hebt getrokken. X is het aantal keren dat je daarvoor moet trekken.

Of je nu wel of niet teruglegt, X is niet hypergeometrisch en ook niet binomiaal verdeeld.

De **verwachtingswaarde** E(X) van een stochast X vind je door een kanstafel te maken.

Veronderstel die ziet er zó uit:

x	x_1	x_2			x_s
$P(X = x)$	p_1	p_2			p_s

Dan: $E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_sx_s$.

Er gelden de volgende regels.

$E(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_k)$ (forka)

Als X binomiaal verdeeld is met parameters n en p, dan: $E(X) = n \cdot p$ (forka)

(In feite volgt de laatste formule uit de voorlaatste, zie voorbeeld).

Cumulatieve binomiale kansen

X binomiaal, dan heet

$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k)$ een cumulatieve kans. Deze kansen zijn op de GR te vinden onder binomcdf.

Voorbeeld

Je gooit 20 keer met een dobbelsteen. X is het aantal keren dat je zes ogen gooit. Dan is binomiaal met parameters $n = 20$ en $p = \frac{1}{6}$.

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} \cdot \frac{1}{6}^3 \cdot \frac{5}{6}^{17}$$

Voorbeeld

In een hoed zitten briefjes. Op 10 briefjes staat nummer 10, op 9 briefjes nummer 9 en op 8 briefjes nummer 8. Je haalt tegelijkertijd 20 briefjes uit de hoed. X is het aantal briefjes met een oneven nummer.

X is hypergeometrisch verdeeld.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{9}{3} \binom{18}{17}}{\binom{27}{20}}$$

Voorbeeld

Je gooit drie keer met een munt. X is het aantal keren kop.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$$

Voorbeeld

Je gooit drie keer met een munt. X is het aantal keren kop. We definiëren

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{als de } i\text{-de keer kop} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$\text{Dan } E(X_i) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \text{ dus } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1\frac{1}{2}$$

Met de laatste formule:

dan is X binomiaal met parameters $n = 3$ en $p = \frac{1}{2}$.

$$\text{Dus } E(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Voorbeeld

X binomiaal met $n = 10$ en $p = 0,3$:

$$P(X \leq 5) = \text{binomcdf}(10, 0,3, 5)$$

$$P(X < 5) = \text{binomcdf}(10, 0,3, 4)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - \text{binomcdf}(10, 0,3, 4)$$

$$P(2 < X < 9) = \text{binomcdf}(10, 0,3, 8) - \text{binomcdf}(10, 0,3, 2)$$

$$P(2 \leq X \leq 9) = \text{binomcdf}(10, 0,3, 9) - \text{binomcdf}(10, 0,3, 1)$$

Ga dat na.

De standaardafwijking

Veronderstel, de stochast X heeft kansverdeling:

x	x ₁	x ₂			x _s
P(X=x)	p ₁	p ₂			p _s

Dan:

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^s p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \text{ en } \text{Sd}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} .$$

Let op: deze formule voor Var(X) staat *niet* op de formulekaart.

Voor *onafhankelijke* stochasten X₁, X₂, ..., X_n geldt:

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Als X binomiaal is met parameters n en p, dan: (forka).

Verder kwam nog aan de orde het **binomium van Newton**.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{met} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Voorbeeld

Je gooit drie keer met een munt. X is het aantal keren kop.

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{Dan } E(X) = 1\frac{1}{2} \text{ en } \text{Var}(X) = \frac{1}{8} \cdot (0 - 1\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{8} \cdot (1 - 1\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{8} \cdot (2 - 1\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8} \cdot (3 - 1\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

Omdat X binomiaal met parameters n en p kun je ook de formule $\text{Var}(X) = n \cdot p(1-p)$ toepassen:

$$\text{Var}(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ dus } \text{Sd}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Voorbeeld

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

3 Regels voor differentiëren

In dit hoofdstuk worden een aantal regels voor het differentiëren van een functie afgeleid.

Deze staan ook op de formulekaart.

<u>functie</u>	<u>afgeleide functie</u>	
f(x) + g(x)	f'(x) + g'(x)	
c · f(x)	c · f'(x)	
f(x) · g(x)	f'(x) · g(x) + f(x) · g'(x)	<i>productregel</i>
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	<i>quotiëntregel</i>
f(g(x))	f'(g(x)) · g'(x)	<i>kettingregel</i>

We geven hier geen voorbeelden.

Toepassingen

- Als $F'(x) > 0$ voor alle x met $a \leq x \leq b$, dan is F stijgend op het interval [a, b].
- Als $F'(x) < 0$ voor alle x met $a \leq x \leq b$, dan is F dalend op het interval [a, b].
- Als $F'(x) = 0$ voor alle x met $a \leq x \leq b$, dan is F constant op het interval [a, b].

Hieruit volgt voor een differentieerbare functie f.

Als (x, f(x)) een top van de grafiek is, dan is $f'(x) = 0$.

De grafieken van de functies f en g **raken elkaar** in het punt met x = a als:

- f(a) = g(a) en
- f'(a) = g'(a).

Voorbeeld

$$f(x) = x^2 + 9 \text{ en } g(x) = p\sqrt{x}.$$

Voor welke p raken de grafieken van f en g elkaar?

Oplossing.

Er is een getal a waarvoor f(a) = g(a) en f'(a) = g'(a).

Dan

$$a^2 + 9 = p\sqrt{a} \text{ en } 2a = \frac{p}{2\sqrt{a}} \Leftrightarrow a^2 + 9 = p\sqrt{a} \text{ en } p = 4a\sqrt{a}$$

Substitutie geeft: $a^2 + 9 = 4a\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, dus $a = \sqrt{3}$

Dit geeft $p = 4\sqrt[4]{27}$

In een **buigpunt** is de helling van de functie maximaal of minimaal.

Als de functie f tweemaal differentieerbaar is, dan is $f''(x) = 0$ als $(x, f(x))$ een buigpunt is.

Een **buigraaklijn** is de raaklijn in een buigpunt.

Voorbeeld

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3. \text{ Dan } f''(x) = x^3 - 2x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2.$$

In het punt met $x = 0$ heeft de grafiek geen buigpunt. In het punt met $x = 2$ wel. (Dat kun je bijvoorbeeld op de GR zien.) De buigraaklijn is $y = -1\frac{1}{15}$.

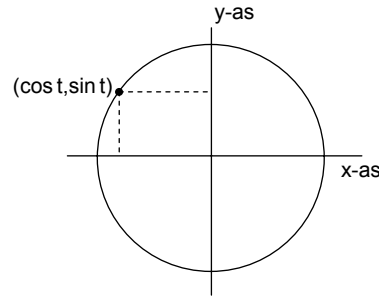
4 Cirkelbewegingen

Definitie

Een kogeltje draait de standaard-cirkelbeweging (Dat wil zeggen: het kogeltje start op $t=0$ in $(1,0)$ en draait rond met een hoeksnelheid van 1 rad/s over de cirkel met straal 1 en middelpunt $O(0,0)$ tegen de wijzers van de klok in.

Zijn positie op tijdstip t is $(\cos t, \sin t)$.

In dit hoofdstuk worden de volgende formules afgeleid (ze zijn ook te vinden op de formulekaart).



$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \text{ (Pythagoras)}$$

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$$

$$\cos(-t) = \cos t \quad \cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

Verdubbelingsformules

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

Differentiëren:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \text{ en } \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Gegeven is een bewegend punt waarvan de positie op tijdstip t in het Oxy-vlak is $(x(t), y(t))$. Dan is

- $(x'(t), y'(t))$ de **snelheidsvector** op tijdstip t ,
- $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ de **grootte van de snelheid op tijdstip t** .

De eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m,n) , straal r en hoeksnelheid ω heeft bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = m + r \cos \omega(t - t_0) \\ y(t) = n + r \sin \omega(t - t_0) \end{cases}$$

Voorbeeld

Een punt beweegt volgens

$$x(t) = \sin t + \sin 2t \text{ en } y(t) = \cos t + \cos 2t$$



Volgens de formules geldt: $x(-t) = x(t)$ en $y(-t) = y(t)$ voor alle waarden van t , dus: de x -as is symmetrie-as van de baan.

Je kunt x schrijven als $\sin t \cdot (2\cos t + 1)$ en y als $2\cos^2 t + \cos t - 1$ met behulp van verdubbelingsformules.

Het punt beweegt met snelheidsvector $(x'(t), y'(t))$ met $x'(t) = \cos t + 2\cos 2t$ en $y'(t) = -\sin t - 2\sin 2t$.

De grootte van de snelheid $v(t)$ is:

$$\sqrt{\cos^2 t + 4\cos t \cdot \cos 2t + 4\cos^2 2t + \sin^2 t - 4\sin t \cdot \sin 2t + 4\sin^2 2t}$$

Met behulp van **Pythagoras** en de formule voor $\cos(t+u)$ kun je $v(t)$ schrijven als:

$$v(t) = \sqrt{5 + 4\cos 3t}.$$

Voorbeeld

Een kogeltje beweegt met de klok mee over de cirkel met middelpunt $(1,2)$ en straal 2 . Op $t=0$ in het in $(1,0)$ en op $t=1$ in $(1,4)$.

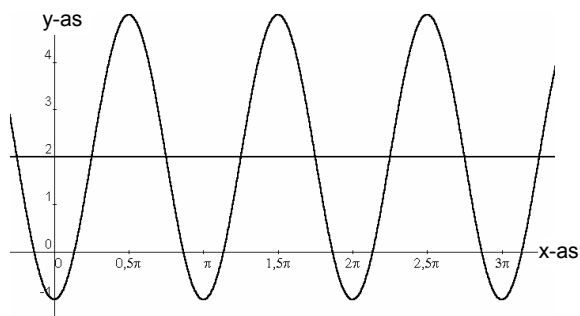
Dan is een parametervoorstelling van de beweging:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos(-\pi(t + \frac{1}{2})) \\ y(t) = 2 + 2\sin(-\pi(t + \frac{1}{2})) \end{cases}$$

De harmonische trilling met evenwichtsstand c , amplitude a en periode p is $y(t) = c + a \sin \frac{2\pi}{p} (t-t_0)$.

Voorbeeld

Een formule voor de harmonische beweging met maximum 5, minimum -1, periode π , die op $t = \frac{1}{4}\pi$ stijgend door de lijn $y = 2$ gaat heeft formule:
 $y = 2 + 3 \sin 2(t - \frac{1}{4}\pi)$



5 Exponentiële functies

Een exponentiële functie is van de vorm: $y = c \cdot a^x$, waarbij c willekeurig en $a > 0$; a heet het **grondtal** van de exponentiële functie.

Het blijkt dat de afgeleide van een exponentiële functie met grondtal a weer een exponentiële functie met grondtal a is, dus: $\frac{d}{dx} a^x = c_a \cdot a^x$.

Er is een getal e ($\approx 2,73$) waarvoor geldt: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Er is een getal e ($\approx 2,73$) waarvoor geldt: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

De inverse functie van $y = a^x$ is $y = {}^a \log x$, de **logaritmische functie met grondtal a** . De logaritmische functie met grondtal e krijgt een speciale naam: de natuurlijke logaritme en ${}^e \log x$ noteren we als $\ln x$.

Er geldt: $c_a = \ln a$, dus: $\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot a^x$ (forka)

En: $\frac{d}{dx} {}^a \log x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ (forka)

De volgende **rekenregels** voor **machten en logaritmen** staan op de formulekaart.

$$\begin{aligned} a^p \cdot a^q &= a^{p+q} & (a > 0) \\ (a^p)^q &= a^{pq} & (a > 0) \\ (a \cdot b)^p &= a^p \cdot b^p & (a, b > 0) \end{aligned}$$

$$a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p} \quad (a > 0)$$

$$b = a^p \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p}} \quad (a, b > 0, p \neq 0)$$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = {}^a \log y \quad (a, y > 0, a \neq 1)$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad (y > 0)$$

$${}^a \log uv = {}^a \log u + {}^a \log v \quad (a > 0, a \neq 1, u, v > 0)$$

$${}^a \log u^v = v \cdot {}^a \log u \quad (a > 0, a \neq 1, u > 0)$$

$${}^a \log u = \frac{{}^b \log u}{{}^b \log a} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1, u > 0)$$

Voorbeeld

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

Voorbeelden

$3 \cdot \ln x = \ln 3x \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln 3x \Rightarrow x^3 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 = 3$
 $\Leftrightarrow x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$. Alleen $x = \sqrt{3}$ is oplossing van de oorspronkelijke vergelijking.

$$e^{2 \ln a} = e^{\ln a^2} = a^2$$

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

6 Oppervlakte en inhoud

Laat f een *positieve* functie op het interval $[a,b]$ zijn. De oppervlakte onder de grafiek tussen a en b is de *grenswaarde* van een Riemansom $\sum f(x_k)\Delta x$.

We noteren deze grenswaarde met $\int_a^b f(x) dx$.

We noemen $\int_a^b f(x) dx$ de **integraal van a tot b van f** .

F heet **primitieve functie** van de functie f op het interval $[a,b]$ als $F'(x) = f(x)$ voor alle x tussen a en b .

f is een *positieve* functie op het interval $[a,b]$ en F is een primitieve van f .

De oppervlakte onder de grafiek van f op $[a,b]$ is

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Voor een *willekeurige* (dus niet noodzakelijk positieve) functie f op $[a,b]$ definiëren we **de integraal**

$$\int_a^b f(x) dx$$

als de *gesigndeerde* oppervlakte tussen de grafiek van f en de x -as.

Hoofdstelling van de integraalrekening

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

Dit heeft de volgende **stelling** tot gevolg:

Als F een primitieve functie van f is, dan

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

We noteren $F(b) - F(a)$ als $F(x) \Big|_a^b$

Er zijn veel toepassingen. We geven enkele voorbeelden.

De oppervlakte tussen twee grafieken

Veronderstel dat de grafiek van f op het hele interval $[a,b]$ boven de grafiek van g ligt. Dan is de oppervlakte tussen de grafiek van f en g op $[a,b]$:

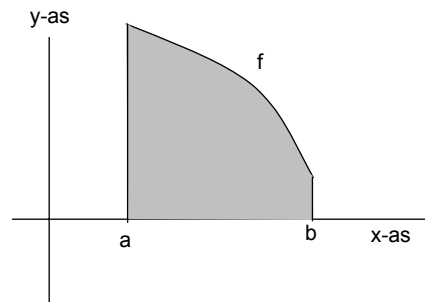
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

De inhoud van een omwentelingslichaam

$y = f(x)$ is een functie op het interval $[a,b]$.

Als je het gebied tussen de grafiek van f en de x -as om de x -as wentelt, krijg je een lichaam met inhoud:

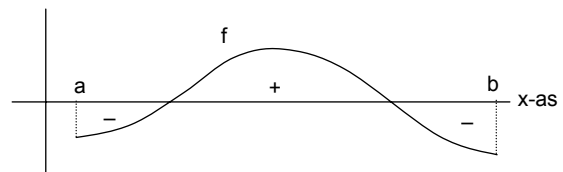
$$\int_a^b \pi y^2 dx \text{ (forka)}$$



Voorbeeld

Een primitieve van $y = \frac{1}{x}$ op $[-3,-1]$ is $F(x) = \ln|x|$.

Een primitieve van $y = \ln x$ op $<0, \rightarrow >$ is: $F(x) = x \ln x - x$
Voor een lijst van primitieven: zie formulekaart.



Voorbeeld

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -2.$$

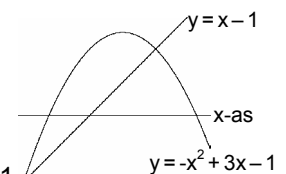
De oppervlakte tussen de grafiek van $y = \sin x$ en de x -as op het interval $[\pi, 2\pi]$ is 2.

Voorbeeld

De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van de functies

$y = -x^2 + 3x - 1$ en $y = x - 1$ is:

$$\int_0^2 ((-x^2 + 3x - 1) - (x - 1)) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big|_0^2 = 1\frac{2}{3}$$



Als je het gebied tussen de grafiek van f en de y -as om de y -as wentelt, krijg je een lichaam met inhoud:

$$\int_p^q \pi x^2 dy$$

Hierbij is: $p = f(a)$ en $q = f(b)$ als f stijgend is
 $p = f(b)$ en $q = f(a)$ als f dalend is.

De lengte van een kromme 1

De lengte van de grafiek van de functie f op het interval $[a, b]$ is:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ (forka)}$$

De lengte van een kromme 2

Een punt is op tijdstip t in $(x(t), y(t))$.

Dan is $\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen a en b . (forka)

Voorbeeld

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

We wentelen het vlakdeel ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van de functie om de y -as. De inhoud is:

$$\int_1^3 \pi x^2 dy = \int_1^3 \pi \left(\frac{3}{y} - 1 \right) dy = \pi (3 \ln y - y) \Big|_1^3 = \pi (3 \ln 3 - 2)$$

Voorbeeld

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. De lengte van de grafiek is:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx \text{ . de GR geeft: } 1,047..$$

(De grafiek is $\frac{1}{6}$ deel van de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1, dus de exacte lengte is $\frac{1}{3}\pi$.)

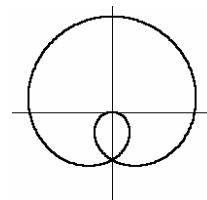
Voorbeeld

We bekijken nog eens het voorbeeld uit hoofdstuk 4, met $x(t) = \sin t + \sin 2t$ en $y(t) = \cos t + \cos 2t$

De lengte van de baan is:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4 \cos 3t} dt.$$

Met de GR vind je hiervoor: 13,36489..



7 Normale verdeling en toetsen

Bij een discrete stochast worden de kansen in beeld gebracht via een histogram.

Bij een continue stochast N hoort een verdelingsfunctie. De kans dat N tussen a en b ligt is de oppervlakte onder de verdelingsfunctie op het interval $[a, b]$. Bij een normale verdeling is de verdelingsfunctie van de vorm:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ waarbij } \mu \text{ de verwachtingswaarde is en } \sigma \text{ de standaardafwijking (forka).}$$

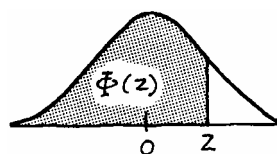
De standaardnormale kromme heeft $\mu=0$ en $\sigma=1$. Met behulp van de tabel kun je oppervlakte links van een bepaalde waarde z op de horizontale as opzoeken bij de standaardnormale kromme. Die oppervlakte noemen we $\Phi(z)$.

Bij andere normale krommen kun je oppervlaktes via **standaardiseren** (= 'vertalen' naar de standaardnormale kromme) bepalen.

Dat vertalen gaat met behulp van de **z-waarde**.

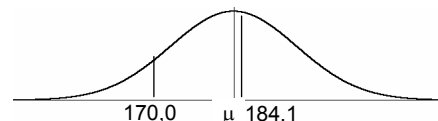
De z -waarde van een waarneming x bepaal je met behulp van de formule: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



Voorbeeld

De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 182$ en standaardafwijking $\sigma = 10$. De kans dat de lengte van een 18-jarige jongen tussen 170,0 en 184,1 ligt komt overeen met de oppervlakte onder de grafiek van de verdelingsfunctie tussen 170,0 en 184,1.



De z -waarden van 170,0 en 184,1 zijn... -1,2 en 0,21.

De oppervlakte is

$$\Phi(0,21) - \Phi(-1,2) = 0,5382 - 0,1151 = 0,4231.$$

Als een discrete stochast normaal benaderd wordt moet je continuïteitscorrectie toepassen.

In de praktijk komt de normale verdeling veel voor. Met normaal-waarschijnlijkheidspapier kun je controleren of een verdeling bij benadering normaal is. Daar-toe maak je een *relatieve cumulatieve* frequentie-verdeling. Let op hoe je klassen op de horizontale as uitzet. Voor details verwijst ik naar hoofdstuk 7, para-graaf 4, opgaven 5 en 6. Bekijk in die opgaven ook nog eens hoe je μ en σ af kunt lezen.

Hypothesetoetsen

Bij een toets horen een toetsingsgrootheid X . Er zijn twee hypothesen over de stochast X .

We onderscheiden twee gevallen: X is binomiaal of X is normaal.

Bij een binomiale stochast

H_0 : X heeft kansparameter p

H_1 : X heeft kansparameter $p_X > p$ (rechts-eenzijdig)

of: X heeft kansparameter $p_X < p$ (links-eenzijdig)

of: X heeft kansparameter $p_X \neq p$ (tweezijdige toets)

Bij een normale stochast

H_0 : X heeft gemiddelde $\mu = \mu_0$

H_1 : X heeft gemiddelde $\mu > \mu_0$ (rechts-eenzijdig)

of: X heeft gemiddelde $\mu < \mu_0$ (links-eenzijdig)

of: X heeft gemiddelde $\mu \neq \mu_0$ (tweezijdige toets)

H_0 wordt verworpen als de overschrijdingskans (dat is de kans dat de waarde van de toetsingsgrootheid in het kritieke gebied ligt) kleiner is dan α (het **significantisniveau**)

Of de toets eenzijdig of tweezijdig is moet je meestal uit de context opmaken.

Voorbeeld

De lengte van 18-jarige jongens afgerond op een geheel aantal cm is bij benadering normaal verdeeld met $\mu = 182$ en $\sigma = 10$.

Laat X de afgeronde lengte zijn, en N de normale stochast met $\mu = 182$ en $\sigma = 10$, dan:

$P(X = 181) = P(180,5 \leq N \leq 181,5)$

$P(X > 170) = P(N > 170,5)$ enz..

Voorbeeld

Fien heeft een dobbelsteen waarmee ze opvallend vaak zes ogen gooit. Ze gaat de dobbelsteen testen door bij honderd worpen te kijken hoe vaak ze zes gooit. Dat blijkt 23 keer te zijn. Het significantieniveau is 0,05.

X is het aantal keren dat er zes ogen gegooid wordt.

Dan is X binomiaal met $n = 100$.

H_0 : X heeft kansparameter $\frac{1}{6}$ (dobbelsteen is in orde)

H_1 : X heeft kansparameter groter dan $\frac{1}{6}$ (er wordt erg vaak zes ogen gegooid)

H_0 wordt verworpen als

$P(X \geq 23, \text{ met } n = 100 \text{ en } p = \frac{1}{6}) < 0,005$

$1 - \text{binomcdf}(100, 1/6, 22) \approx 0,063\dots$, dus H_0 wordt geaccepteerd.

Het kritieke gebied van de toets: $P(X \geq 23) > 0,05$ en

$P(X \geq 24) \approx 1 - \text{binomcdf}(100, 1/6, 23) \approx 0,0378\dots < 0,05$, dus: 24, 25, 26, ... 100.

Voorbeeld

Jaap bestelt bij een handelaar zakken aardappelen van 2,5 kg. Ze worden gevuld met een vulmachine met $\sigma = 0,1$.

Volgens Jaap is de machine te zuinig afgesteld. De handelaar beweert dat de machine afgesteld is op een gemiddeld vulgewicht van 2,5 kg.

Hoeveel moet het gemiddelde gewicht van een zak aardappelen zijn, wil de handelaar gelijk krijgen met significantieniveau 0,05 ?

N is het gemiddelde gewicht van een zak.

H_0 : gemiddelde $N = 2,5$

H_1 : gemiddelde $N < 2,5$

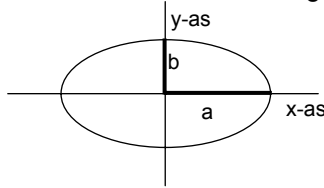
H_0 wordt verworpen als het gewicht van een zak onder de grenswaarde g komt met: $P(N < g \text{ met } \mu = 2,5 \text{ en } \sigma = 0,1) < 0,05$.

$g \approx \text{invNorm}(0.05, 2.5, 0.1) \approx 2,3355\dots$

8 Trillingspatronen

In dit hoofdstuk bekijken we eerst figuren van Lissajous: de banen die een punt beschrijft onderhevig aan een horizontale en verticale trilling.

Een bijzonder geval van een Lissajous-figuur is de ellips.



De ellips met symmetriepunt $(0,0)$ en halve horizontale as a en halve verticale as b heeft vergelijking:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Verder komen de formules van **Simpson** aan de orde.

$$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2} \text{ (forka)}$$

Tenslotte komt de tangens aan de orde.

Een kogeltje beweegt volgens de standaard-cirkelbeweging en is op tijdstip t in $P(\cos t, \sin t)$.

De helling van lijn OP noemen we de **tangens** van t , kortweg: $\tan t$.

Als Q het snijpunt van lijn OP met de lijn $x=1$ is, dan geldt: de y -coördinaat van $Q = \tan t$.

We hebben de volgende regels voor de tangens (ook op de formulekaart).

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

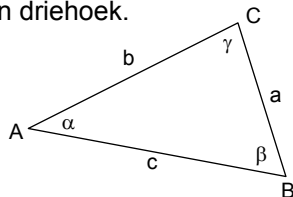
Verband tussen hoeksnelheid en periode

Een kogeltje draait gelijkmatig (eenparig) over een cirkel met periode p en hoeksnelheid ω .

Dan geldt $|\omega| \cdot p = 2\pi$.

Uit 4vwo

Op de formulekaart komen de sinus- en cosinusregel voor. Ze gelden in een driehoek.



Sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Cosinusregel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Voorbeeld

Een punt beweegt volgens: $x = 2 \cos t$ en $y = \sin t$. De baan is een ellips met symmetriepunt $O(0,0)$. De horizontale as is 4 en de verticale as: 2.

Voorbeeld

De ellips uit het vorige voorbeeld heeft vergelijking

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4$$

Voorbeeld

Een punt is onderhevig aan twee verticale trillingen met dezelfde frequentie. Dan is het resultaat weer een harmonische trilling, bijvoorbeeld

$$y_1 = \sin(2x) \text{ en } y_2 = \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\text{Dan } y_1 + y_2 = \sin(2x) + \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$2 \sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right)$$

eerste formule Simpson

$P(\cos t, \sin t)$

Voorbeeld

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\tan t} = \frac{1}{2\sqrt{\tan t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

Voorbeeld

In driehoek ABC is gegeven $a = 2$, $b = 3$ en $\beta = 30^\circ$.

We willen weten hoe groot α is.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ dus: } \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin 30^\circ}, \text{ dus } \sin \alpha = \frac{1}{3}, \text{ dus } \alpha = 19,47^\circ.$$

We willen ook weten hoe groot c is.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \text{ dus:}$$

$$9 = 4 + c^2 - 2c\sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{3} - 5 = 0.$$

Exacte oplossingen vind je met de wortelformule (forka):

$$c = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{32}}{2} = \sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}.$$

Alleen $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ is een oplossing voor c .