Basisstructuren Informatica (BSI)

Log / Exp

Aanvullende reader

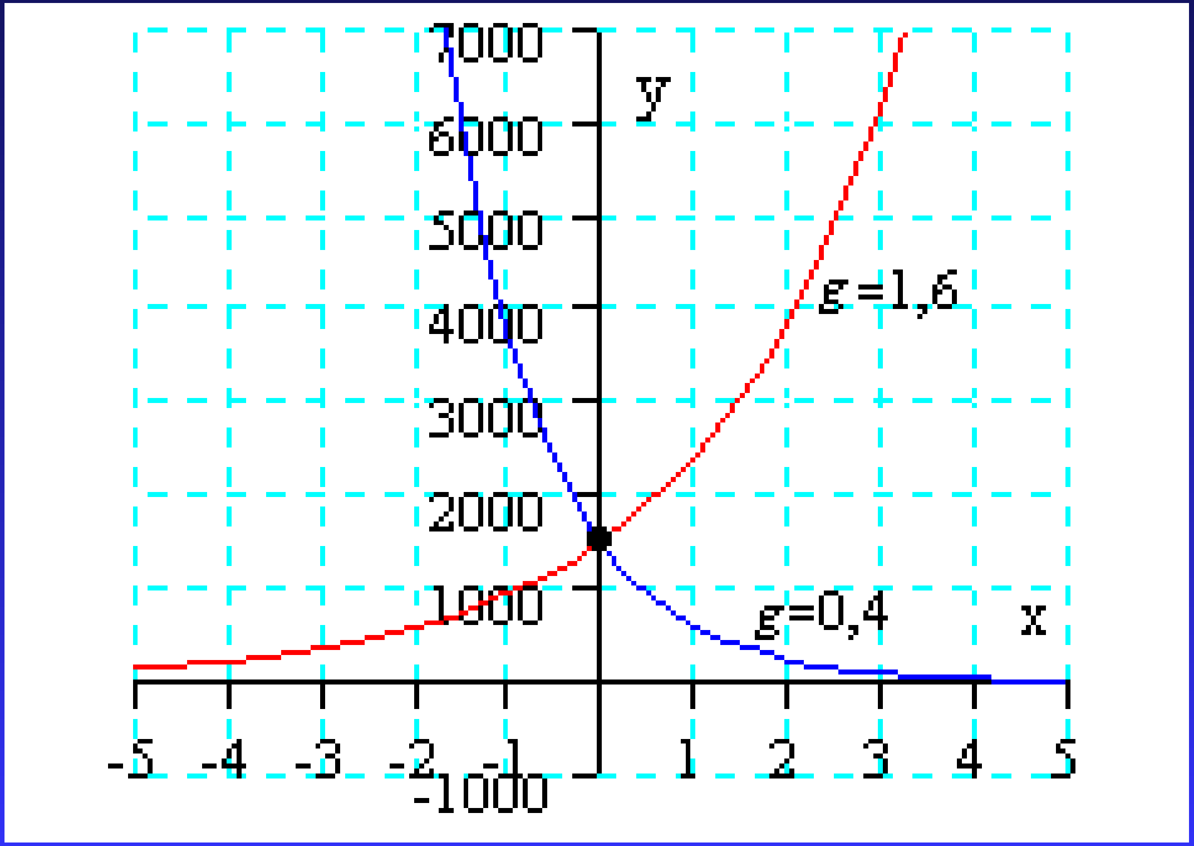
Logaritmen en exponentiële functies

Definitie machten

- $a^0 = 1$
- a^n (met $n \in IN^+$) is gedefinieerd als $a*a*\ldots*a$ (n factoren)
- a^{-n} (met $n \in IN^+$) is gedefinieerd als $1/a^n$
- $a^{p/q}$ (met $p \in IN$ en $q \in IN^+$) is gedefinieerd als de q-de machts wortel uit a^p
- Voorbeelden:
  - $3^5 = 3*3*3*3*3 = 243$
  - $3^{-5} = 1/243$
  - $3^{5/2} = \sqrt{3^5} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

Grafiek exponentiële functie

- Bijvoorbeeld:
  $f(x) = 1500 * 0{,}4^x$ en $h(x) = 1500 * 1{,}6^x$



Eigenschappen exp. functies

- De grafiek van $f(x) = a^x$
  - bevat altijd het punt (0,1)
  - is voortdurend stijgend als $a > 1$
  - is voortdurend dalend als $0 < a < 1$
  - heeft de x-as als asymptoot
- De inverse functie van $f(x) = a^x$ is de functie $g(x) = {}^{a}\log x$ (zie verderop)
- De grafiek van $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ stijgt sneller dan die van $f(x) = x^c$ voor elke $c > 0$

Rekenregels voor machten

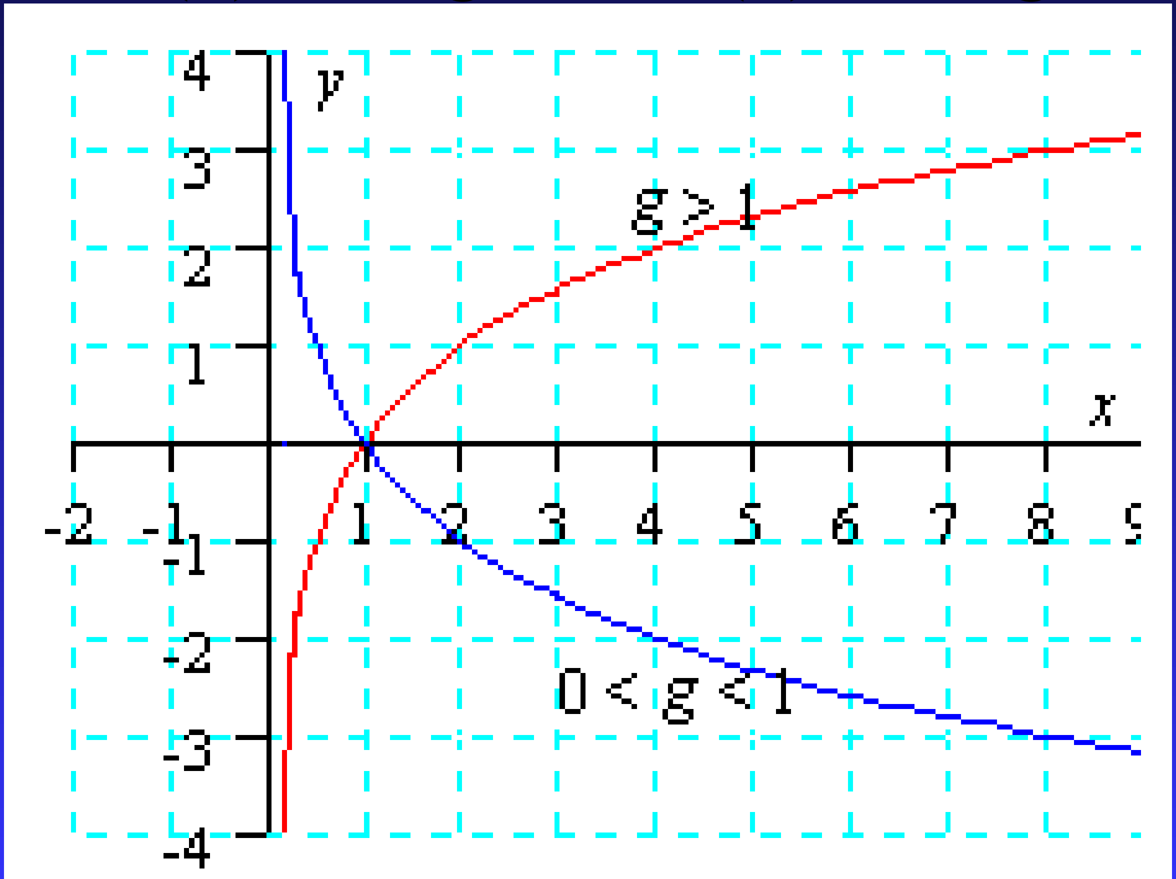
- **M1.** $a^0 = 1$
- **M2.** $a^1 = a$
- **M3.** $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- **M4.** $a^p / a^q = a^{p-q}$
- **M5.** $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- **M6.** $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- **M7.** $a^{-p} = 1/a^p$
- **M8.** $a^{½} = \sqrt{a}$
- **M9.** $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Definitie logaritmen

- ${}^{a}\log b = x$ dan en slechts dan als $a^x = b$
- Voorbeelden:
  - ${}^{5}\log 25 = 2$, want $25 = 5^2$
  - ${}^{2}\log 4\sqrt{2} = 2½$, want $4\sqrt{2} = 2^2 * 2^{½} = 2^{2½}$
  - ${}^{8}\log 4 = 2/3$, want $4 = 2^2 = (2^3)^{2/3} = 8^{2/3}$
  - ${}^{10}\log (-100)$ bestaat niet,
    want $10^x > 0$ voor elke x en dus nooit gelijk aan -100

Grafiek logaritmische functie

- Bijvoorbeeld: $f(x) = {}^{2}\log x$ en $h(x) = {}^{½}\log x$



Eigenschappen log-functies

- De grafiek van $f(x) = {}^a\log x$
  - bevat altijd het punt (1,0)
  - is voortdurend stijgend als $a > 1$
  - is voortdurend dalend als $0 < a < 1$
  - heeft de y-as als asymptoot
- De inverse functie van $f(x) = {}^a\log x$ is de functie $g(x) = a^x$, de grafieken zijn dus elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$
- De grafiek van $f(x) = {}^a\log x$ ($a > 1$) stijgt minder snel dan die van $f(x) = x^c$ voor elke $c > 0$

Natuurlijke logaritmen

- De natuurlijke logaritme ln x is gedefinieerd als ${}^{e}\log x$, waarbij e = 2,71828182845...
- e is net als pi een reëel getal dat een oneindig aantal niet-repeterende decimalen heeft, een irrationaal getal
- De raaklijn aan de grafiek van f(x) = ln x in het punt (1,0) heeft richtingscoëfficiënt 1
- De afgeleide van f(x) = ln x is gelijk aan f'(x) = 1/x

Exp. functie met grondtal e

- $f(x) = e^x$ is de inverse van $g(x) = \ln x$
- De afgeleide van $f(x) = e^x$ is $f'(x) = e^x$
- Elke exponentiële functie is te schrijven als een e-macht:
  $f(x) = a^x = e^{\ln(a\hat{}x)} = e^{x \cdot \ln a}$
- De afgeleide van $f(x) = a^x$ is dus
  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Rekenregels voor logaritmen

- **L0.** ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log (b \cdot c)$
- **L1.** ${}^{a}\log b^{p} = p \cdot {}^{a}\log b$
- **L2.** ${}^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$

  $(a > 0$ en $a \neq 1$ en $b > 0)$
- **L3.** $a^{{}^{a}\log b} = b$
- **L4.** ${}^{a}\log b = \log b \,/\, \log a$
- **L5.** ${}^{a}\log b = {}^{g}\log b \,/\, {}^{g}\log \qquad (g>0)$
- **L6.** Afgeleide van $f(x) = {}^{a}\log x$ is $f'(x) = 1/(x \ln a)$

Links

- Om te spelen met de grafieken van logaritmische en exponentiële functies, zie de java-applets op
  - http://users.pandora.be/chris.cambre/chris.cambre/exp_en_log_functies.htm