1. Middelbare school.

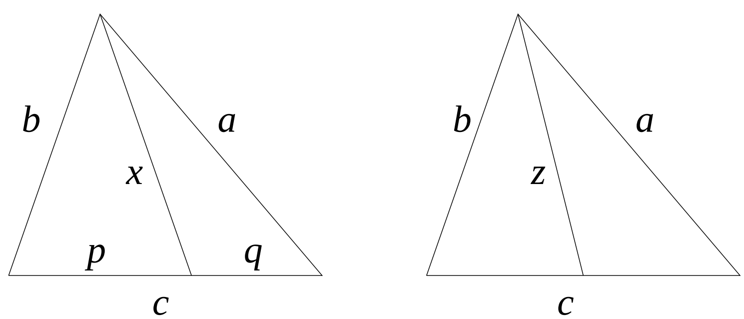
(1.1) *Ontbinden in factoren.* Ga uit van $2y^2 - 5y + 2$. Vermenigvuldig de uiterste coëfficiënten: $2 \cdot 2 = 4$. Ontbind 4 in twee factoren die samen -5 zijn (de coëfficiënt van y): -1 en -4. Zet die in een willekeurige volgorde: $2y^2 - 5y + 2 = 2y^2 - y - 4y + 2 = y(2y-1) - 2(2y-1) = (y-2)(2y-1)$.
Ontbind $x^2 + xy - 2y^2 + x + 5y - 2$.

(1.2) *Enkele merkwaardige producten*:
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.
Algemener:
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$
Is a^2+b^2 te ontbinden? En a^4+b^4? Dit alles goed leren en instampen. Ongeacht wat U van mathematici om U heen hoort (dat het steeds gemakkelijk af te leiden is o.i.d); ik wil mijn huis niet laten bouwen door een timmerman die voor elke spijker de handleiding van zijn hamer moet lezen.

(1.3) *De stelling van Stewart.* Zie onderstaande figuur. Bewijs nu:

$$x^2c = a^2p + b^2q - pqc.$$

(Voor de zwaartelijn geldt dus $z^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.)



(1.4) *Oppervlakte van een driehoek.* Laat een driehoek gegeven zijn met zijden a, b en c. De halve omtrek noemen we s en de oppervlakte O. Bewijs nu:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bewijs ook, dat met R en r de stralen van de om- resp. ingeschreven cirkel volgt:

$$R = \frac{abc}{4O}; \quad r = \frac{O}{s}.$$

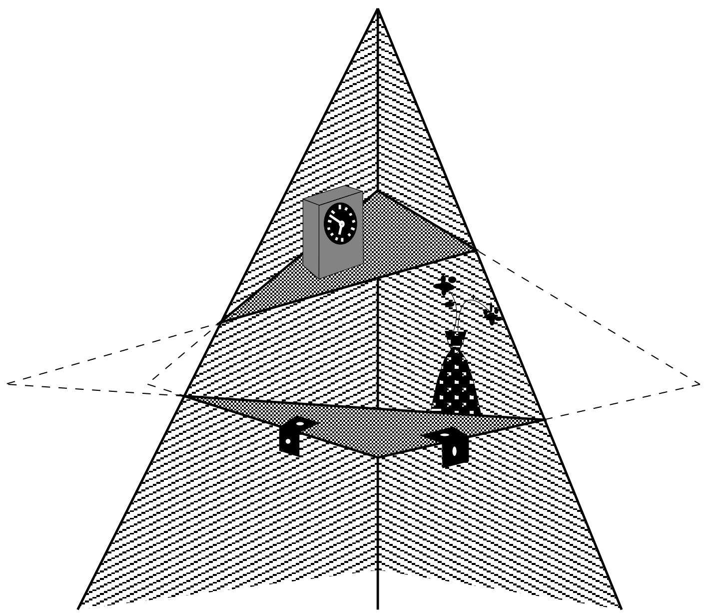
2. Affiene en projectieve meetkunde.

(2.1) Op de middelbare school „had” de meetkunde evenwijdigheid, afstanden en hoeken (*Euclidische meetkunde*). Als we alleen de evenwijdigheid overnemen, ontstaat de

(2.2) *Affiene meetkunde.* In een plat vlak, waarin we die meetkunde bedrijven, blijven stellingen hun geldigheid behouden bij scheve, evenwijdige projectie van dit vlak op een ander vlak. Zo gaat een parallellogram over in een ander parallellogram, zoals een dakraampje bij zonlicht op de vloer een parallellogram geeft. In die meetkunde bestaan geen lengten, maar wel *verhoudingen van evenwijdige lijnstukken*. Overstaande zijden van een parallellogram zijn dus wel even lang in dié zin, dat de lengte*verhouding* 1 is. Een

voorbeeld van een affiene stelling is de eigenschap, dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor delen. Bestaat een ruit in die meetkunde?
Affiene begrippen zijn o.a. ellipsen, parabolen en hyperbolen, maar geen cirkels. Indien we ook de evenwijdigheid loslaten, krijgen we de

(2.3) *Projectieve meetkunde.* Daarin bestaan zelfs geen verhoudingen, maar wel verhoudingen van verhoudingen (dubbelverhoudingen, met een germanisme); dit valt buiten het kader van dit geschrift. Een stelling uit de projectieve meetkunde behoudt haar geldigheid bij projectie uit één punt (*centrale projectie*). Ga zelf in een figuur na, dat evenwijdigheid en verhouding bij centrale projectie in het algemeen niet behouden blijven.
Kegelsnede is een projectief begrip, maar ellips, parabool, hyperbool niet! Een ellips gaat bij centrale projectie al snel in een hyperbool over; fiets maar eens in het donker, met de lamp aan.
Een voorbeeld van een stelling uit de projectieve meetkunde is de eigenschap, dat van een zeshoek waarvan de zijden raken aan een kegelsnede, de hoofddiagonalen door één punt gaan (stelling van Brianchon).
Een andere stelling krijgen we met behulp van een scheef gebouwd hoekkastje met twee plankjes; zie onderstaande figuur.



Beschouw de figuur als oosterse kunst: zweer de westerse „plumpen Realismus" af en ga *vlak* zien; zonder diepte. Haal er dan een projectieve stelling uit!

3. De opzet van de wiskunde.

(3.1) *Logica.* In de wiskunde wordt een vrij eenvoudige, tweewaardige logica gebruikt („niet-niet is wel"). Deze logica bevat geen gevoelsschakeringen, zoals de veel rijkere logica uit het dagelijkse leven, waar geslacht, karakter, ervaring, volksaard e.d. van invloed zijn. Toch kan men ook in de wiskunde de logica zelf kiezen. Zo bestaat bv. een zogenoemde *intuïtionistische wiskunde*. Daar is „niet-niet" niet hetzelfde als „wel". Bewijzen uit het ongerijmde zijn daar niet mogelijk. Een wel zeer eclatant voorbeeld is hier de stelling, dat een reëelwaardige functie, gedefinieerd op een gesloten interval in het continuum der reële getallen, op dat interval automatisch uniform continu is. Deze stelling is in de „gewone" wiskunde helemaal niet waar. In de intuïtionistische wiskunde echter is het een gevolg van de waaierstelling van Brouwer, die in die wiskunde een zeer belangrijke rol speelt.

(3.2) *Verzamelingen.* Sinds de tweede helft van de negentiende eeuw stoelt de wiskunde op de verzamelingenleer. Ook de middelbare scholier is hiermee (in de brugklas) getreiterd en heeft het vermoedelijk snel

weer vergeten, want het is moeilijk en functioneert niet in de „beginnerswiskunde”.
We hebben hier notaties als $x \in A$ (is element van), $A \cup B$ (vereniging), $A \cap B$ ofwel AB (doorsnede), $A \subset B$ (deelverzameling van; dit is *hetzelfde* (helaas) als $A \subseteq B$), $A \supset B$ ofwel $A \supseteq B$ (omvat), $A \setminus B$ (verschil), $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (symmetrisch verschil) en $\bar{A} = \Omega \setminus A$; hier is Ω een of ander „universum” waarvan we de verzamelingen die we beschouwen als deelverzamelingen kiezen. Zie het college voor meer uitleg.
Associatieve en distributieve wetten zijn hier geldig:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Voor vereniging en doorsnede bestaat de mogelijkheid van overaftelbaarheid van de indexverzameling (zie college): Laat I een gegeven verzameling zijn. Dan is

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \,|\, \exists_{\alpha \in I}(x \in A_\alpha)\}; \qquad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \,|\, \forall_{\alpha \in I}(x \in A_\alpha)\}.$$

De wetten van De Morgan zijn geldig in een gegeven universum:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}, \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}.$$

Met woorden zijn die heel eenvoudig!
Ga na, dat geldt voor indexverzameling $\mathbb{N}$ (de natuurlijke getallen):

$$\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \{x \,|\, x \in A_k \text{ voor oneindig veel waarden van } k\};$$

$$\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k = \{x \,|\, x \in A_k \text{ vanaf een of andere index } k\}.$$

De bovenste heet $\limsup_{n \to \infty} A_n$; de onderste $\liminf_{n \to \infty} A_n$.
Steeds is $\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n$; zie het college. Als deze verzamelingen gelijk zijn, spreken we van de *limiet* $\lim_{n \to \infty} A_n$.
Als $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, dan is $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \lim_{n \to \infty} A_n$.
Als $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, dan is $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \lim_{n \to \infty} A_n$.

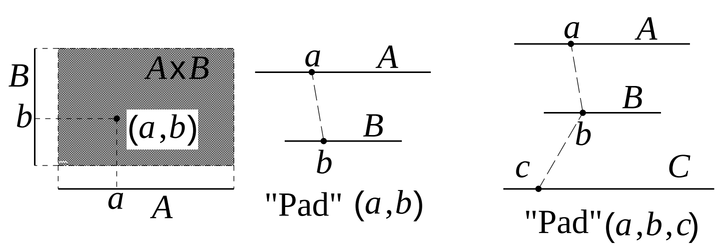
(3.3) *Cartesische producten*. Laat A en B verzamelingen zijn. Dan verstaan we onder het *Cartesisch product* van A en B de verzameling

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Analoog met meer verzamelingen, zoals $A \times B \times C$ (geordende drietallen) enz. We gebruiken hier de mogelijkheid, in de wiskunde nieuwe „objecten” te scheppen uit eerder gedefinieerde begrippen. Het kan met haken, komma’s, bloempjes of wat men ook wil. Een *theorie* is in de wiskunde een stelsel verzamelingen. Een drietal $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ kan men een *projectieve meetkunde* noemen; $\mathcal{P}$ is een verzameling van dingen die we *punten* moemen, $\mathcal{L}$ een verzameling van dingen die we *lijnen* noemen en I een *relatie* en wel een *incidentierelatie*: punt P ligt op lijn l schrijven we als PIl of $(P, l) \in I$ (lekker abstract! Abstract betekent afgetrokken (van de „werkelijkheid”)). Zo is ook een definitie van *docent* mogelijk:

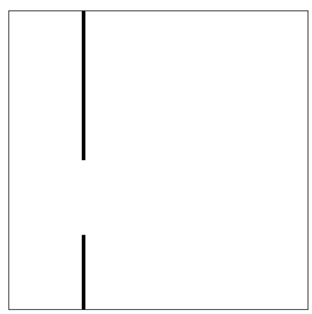
$$\text{docent} = (\text{syllabus}, \text{achterhoofd}, \text{krijtje}).$$

In het algemeen is $A \times B$ helemaal niet hetzelfde als $B \times A$. Dat is alleen zo als $A = B$.
Een Cartesisch product kan weergegeven worden als een rechthoek, maar ook als een *boom*. Dat laatste wordt veel gedaan in de kansrekening (gekoppelde experimenten, herhalingen enz.) en werkt vaak goed voor „hogere dimensies” als bij $A \times B \times C$. Zie onderstaande figuur.



(3.4) *Relaties.* Een deelverzameling van een Cartesisch product heet een *relatie*.
Het geeft niet wat voor deelverzameling! Als zo $R \subset A \times B$, dan wordt $(a, b) \in R$ wel geschreven als aRb of soms $R(a, b)$. Wij zullen zulke zeer algemene relaties niet gebruiken, maar voor ons doel de zaak wat beperken. We zullen twee soorten relaties onder de loupe nemen.

(3.5) *Equivalentierelaties.* Hiervoor nemen we $A = B$. Een *equivalentierelatie* is een relatie $R \subset A \times A$ met de volgende drie eigenschappen:
aRa voor elke $a \in A$ (*reflexiviteit*); $aRb \Rightarrow bRa$ (*symmetrie*); aRb en $bRc \;\Rightarrow aRc$ (*transitiviteit*).
Als aRb, dan heten a en b *equivalent*.
Door deze drie eigenschappen is de betreffende verzameling A op te splitsen in disjuncte verzamelingen, die *equivalentieklassen* heten. Deze klassen vormen een *partitie* van A. Elementen, die in eenzelfde klasse zitten, zijn equivalent.
Over de transitiviteit nog de volgende opmerking. Niet altijd geldt: Jan beter dan Piet, Piet beter dan Klaas, dus Jan beter dan Klaas. Beschouw het volgende experiment:
We hebben vier dobbelstenen. De aantallen ogen verschillen echter van die op conventionele dobbelstenen:
Steen a heeft twee vlakken met elk een 0 en vier met elk een 4.
Steen b heeft op elk vlak een 3.
Steen c heeft twee vlakken met elk een 6 en vier met elk een 2.
Steen d heeft drie vlakken met elk een 1 en drie met elk een 5.
Speler A kiest een steen. Daarna kiest speler B uit de overgebleven stenen een steen. Ieder werpt nu eenmaal zijn steen. Wie het hoogste aantal ogen werpt, wint.
Nu blijkt met enig kansrekenen op Wiskunde-A-niveau, dat door geschikte keuze van speler B (!!) deze altijd kan winnen mat kans $\frac{2}{3}$. De volgende keuzen blijken hiervoor te voldoen: ad, ba, cb, dc (dus als A steen a kist, kiest B steen d enz.). Men is licht geneigd te zeggen: d is beter dan a, a is beter dan b, b is beter dan c. De conclusie zou kunnen zijn: d is beter dan c. Echter, c is beter dan d.
Dit systeem staat bekend als *de niet-transitieve dobbelstenen van Bradley Efron*.
Opgave. In onderstaande figuur is het Cartesisch product I^2 van het eenheidsinterval I met zichzelf gesuggereerd. Daarin is de deelverzameling $A = \{(x, y) \,|\, (x = \frac{1}{4}) \wedge ((0 \leq y \leq \frac{1}{4}) \vee (\frac{1}{2} \leq y \leq 1))\}$ getekend.



Teken de kleinste equivalentierelatie in I^2 die A bevat. (Met kleinste wordt wiskundig bedoeld de doorsnede van alle equivalentierelaties die A bevatten; ook kan men zeggen: teken alle paren van punten die op grond van het gegeven equivalent *moeten* zijn.)

(3.6) *Afbeeldingen, functies.* Laat een relatie f in $A \times B$ gegeven zijn met de volgende eigenschap:
Bij *elke* $a \in A$ is *precies één* $b \in B$ te vinden met afb.
Vaak is van zo'n relatie een mooie grafiek te tekenen. Een relatie met de genoemde eigenschap heet een *afbeelding van* A *naar* B. In het geval $B \subset \mathbb{R}$ of $B \subset \mathbb{C}$ heet f wel een *functie van* A *naar* B. Soms ook wel als $B \subset \mathbb{R}^n$ (vectorwaardige functies). We noteren steeds $f : A \to B$. In plaats van afb schrijven we $f(a) = b$. Hierin is a het *argument* of *origineel* en b het *beeld*. De verzameling A heet het *domein* van f.
N.B. In sommige lectuur wordt wel gewaagd van de betiteling „voorschrift": een functie is een voorschrift...enz. Dat kan niet en dat mag niet. Niet alleen is het begrip „voorschrift" onwiskundig; sterker: het gaf en geeft aanleiding tot gruwelijke misverstanden, vooral op tentamens. Het is nogal eens gebeurd dat op een tentamen naar een functiebegrip werd gevraagd in een specifiek geval (kansrekening). Een niet gering

aantal studenten had, na op correcte manier „de y-tjes bij de x-jes" te hebben berekend, naarstig gespeurd naar een „voorschrift": het moest een formule zijn! Niets werd geschuwd, binomiaalcoëfficiënten enz.; naar later zeggen bleek het zeker een half uur te hebben gekost. De boosdoener was het ronduit schimmige begrip „voorschrift". Daar wordt in het dagelijks leven veelal een zin, een logische redenering achter gezocht. Zo ook door de student. Het betrof hier niet primair-wiskundestudenten; een reden wellicht waarom ze slappe calculus hadden gehad. Van genoemde logische redenering behoeft in de wiskunde echter geen sprake te zijn! Als ik drie aselecte getallen b_1, b_2, b_3 trek, zeg met een computer, en die toevoeg aan (d.i. niet optellen, maar „er bij zetten") resp. Aap, Noot, Mies, dan is een voorschrift f met $f(\text{Aap}) = b_1$ enz. ver te zoeken. We hebben wel een gewone functie.
Nee. Elke poging om deze poppenkast te verklaren blijkt stelselmatig te leiden tot een uitleg die eenvoudigweg op bovenstaande definitie uitkomt. Waarom dan niet meteen.

(3.7) *Injectiviteit, surjectiviteit, bijectiviteit.* Een afbeelding $f : A \to B$ heet *injectief* als verschillende originelen niet hetzelfde beeld kunnen hebben. Genoemde afbeelding heet *surjectief* als elk element van B daadwerkelijk als beeld optreedt van tenminste één element van A.
De zaak is kernachtiger te zeggen.

Injectief: elk element van B heeft *maximaal* één origineel.
Surjectief: elk element van B heeft *minimaal* één origineel.
Bijectief: elk element van B heeft *precies* één origineel.

Een interessant fenomeen doet zich voor. Blijkens bovenstaande definitie verandert de afbeelding f niet als we B opblazen: immers, de verzameling (a, b)-paren die de afbeelding vormen blijft ongewijzigd. Daaruit volgt, dat surjectiviteit op zich geen eigenschap van de afbeelding f zelf is, maar van het paar (f, B). Zoiets schrijft een mathematicus nooit. We blijven bij de notatie $f : A \to B$; daar is de verzameling B al apart in weergegeven. Als we weten waarover we het hier hebben, is geen verwarring mogelijk. Het surjectiviteitsbegrip is veel te belangrijk om van de hand te doen!

4. Getalsystemen. Oneindigheid.

(4.1) *Tellen.* Van school kennen we de getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en misschien –met een hartelijke leraar– ook $\mathbb{C}$. In de wiskunde hebben deze systemen axiomastelsels. De natuurlijke getallen, dus $1, 2, 3, \ldots$ (niet 0 er bij) zijn niet eenvoudig in te voeren. Zie hiervoor de bibliotheek (zoek onder Peano).
De natuurlijke getallen en het functiebegrip zorgen alleen al voor handen vol werk. Als ik een zak bonen tel en ik kom aan 53 en ik weet dat ik goed heb geteld, komt een ander, die ook goed telt, dan ook aan 53? Inderdaad, maar dat is geen eenvoudige stelling! Tellen blijkt onafhankelijk van de volgorde te zijn. We kunnen niet spreken van een verzameling van 53 elementen als niet eerst het telsysteem grondig is vastgelegd. In het kort komt het op het volgende neer. Een *beginstuk* van $\mathbb{N}$ is een deelverzameling B van $\mathbb{N}$ zó, dat $B \neq \mathbb{N}$ èn $\forall_{n \in B}(n \neq 1 \Rightarrow n - 1 \in B)$. Elk beginstuk blijkt een uniek *maximaal element* te hebben: er is een $n \in B$ met $n + 1 \notin B$. Een verzameling A heet *eindig* als een bijectie $\phi : A \to B$ bestaat met B een beginstuk. De eenduidigheid van het tellen houdt in, dat bij twee bijecties $\phi : A \to B_1$ en $\psi : A \to B_2$ met B_1 en B_2 beginstukken met maximaal element resp. N_1 en N_2, geldt: $N_1 = N_2$. Hiermee is het *aantal* elementen van A gedefinieerd.

(4.2) *Oneindigheden.* De collectie van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling A heet de *machtsverzameling* van A. Die wordt soms genoteerd met de cryptische uitdrukking 2^A (niet als getal bedoeld!). Bewezen kan worden, dat nooit een bijectie bestaat van A naar 2^A. (Wel een injectie! Welke ligt bijzonder voor de hand?). Dus de machtsverzameling heeft altijd „meer" elementen dan de verzameling zelf. Als we dit toepassen op bv. $\mathbb{N}$, krijgen we een wezenlijk grotere oneindigheid dan het „aantal" van $\mathbb{N}$. We komen daarmee aan het aantal der reëele getallen. Die verzameling is *overaftelbaar*. De natuurlijke getallen zijn *aftelbaar*. De verschillende eindig- en oneindigheden worden *kardinaalgetallen* genoemd.
Ook bij oneindige aantallen bestaat het begrip „evenveel". We spreken algemeen van *gelijkmachtig*. Een verzameling heet *eindig* als zij gelijkmachtig is met een beginstuk, *aftelbaar* als zij gelijkmachtig is met $\mathbb{N}$ en in alle andere gevallen *overaftelbaar*.
Opgave: Laat zien, dat $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ gelijkmachtig zijn.
Opgave: Soms wordt de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ bewezen door de reëele getallen tussen 0 en 1 te ontwikkelen

in een decimale breuk en dan aan te tonen dat een willekeurige rij reële getallen altijd tenminste één getal *niet* bevat. Dit is niet de vraag. Wel deze: ontwikkel het getal $\frac{3}{5}$ dyadisch (binair, tweetallig). Ga eerst na, hoe in het „gewone" geval van een tiendelige breuk de decimalen successievelijk kunnen worden verkregen; bv. met een computerprogramma (in gedachten). Voer het uit in het tweetallige stelsel. Controleer het resultaat (hier is kennis van de meetkundige reeks nodig):

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}; \qquad |r| < 1.$$

Algemeen is

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}; \qquad r \neq 1.$$

Loten met kans p. Laat een willekeurig getal tussen 0 en 1 gegeven zijn. Hoe kan men *met alleen een zuivere munt* een beslissing nemen met kans p? Ontwikkel p dyadisch en redeneer verder.

(4.3) *Bewijsmethode met volledige inductie.* Deze methode is een direct gevolg van de axioma's der natuurlijke getallen en komt in het kort hier op neer:
Stel dat we moeten bewijzen dat bewering $B(n)$ geldt voor alle natuurlijke n. De procedure is als volgt:
1. Bewijs dat $B(1)$ geldt.
2. Bewijs, uitgaande van de *vermeende* geldigheid van $B(n)$ voor zekere n, dat ook $B(n+1)$ waar is.
Gedeelte 1 is meestal eenvoudig. Bij gedeelte 2 (de *inductiestap*) is het belangrijk, dat we de letter n in de redenering laten staan, en niet daarvoor een of ander getal invullen. Meestal is het „te bewijzen" een formule waar n in zit. Schrijf die formule over, waarbij overal de letter n vervangen is door $n+1$. De nu ontstane formule moet worden afgeleid (met eerlijke, wiskundige middelen) uit de aangenomen oorspronkelijke formule. Zie het college voor enkele practische voorbeelden.
N.B. Vaak zijn de onderwijsopgaven, die voor volledige inductie bedoeld zijn, sneller, mooier en beter rechtstreeks te bewijzen dan met de vaak stompzinnige inductie. Slechts in enkele gevallen geeft die methode inzicht, en dan nog in moeilijke gevallen! Het is echter wel altijd een veilige methode. Men moet wel het „antwoord" al weten. Enkele voorbeelden waarmee *zonder* inductie de zaak veel sneller loopt en tevens inzicht geeft, volgen hieronder:

1). $\displaystyle\sum_{1\le k\le n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$ 2). $\displaystyle\sum_{1\le k\le n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

3). $\displaystyle\sum_{r\le k\le n} (k)_r = \frac{1}{r+1}(n+1)_{r+1}$; 4). $\displaystyle\sum_{0\le j\le k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$;

5). $2^n > n$; 6). $\displaystyle\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} = 2^n$; 7). $\displaystyle\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ (Binomium van Newton).

In 3) is $(k)_r \stackrel{\text{def}}{=} k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)$. Dit is een niet-standaarduitdrukking in de kansrekening; in de analyse betekent dezelfde uitdrukking meestal $k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)$ (het *Pochhammersymbool*). Met handigheid is de regel snel te zien. Overigens, bij sommige sommen (een som is een optelling; in de basisschool is het een opgave) is *partiële sommatie* erg goed toe te passen. De formule luidt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \Delta b_k; \qquad A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j; \qquad \Delta b_k = b_{k+1} - b_k.$$

Op ons tentamen komt die niet voor. Beter mee verlegen dan om verlegen!

(4.4) *Enkele notaties.* We zagen zojuist mooie somtekens. Al eerder zagen we vereniging en doorsnede; we hebben ook nog het *product*:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{1\le k\le n} a_k = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Een lege som is nul; een leeg product is één: waarom is dat handig? Beleger hiervoor zo nodig Uw docent. Een voorbeeld van een lege som is $\sum_{\{k\in\mathbb{N}\,|\,k^2<-4\}} 2^k$.

Opgave: Bereken 1) $\prod_{n=1}^{1000} \frac{(k+2)(k+3)}{k(k+1)}$ 2) $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ en 3) $\sum_{k=1}^{n} \ln(2k)$.
We zagen ook binomiaalcoëfficiënten. We hebben

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}; \quad \alpha \in \mathbb{R},\ k \geq 0 \text{ geheel.}$$

In de schoolboekjes zien we vaak $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$. Dat is een mooie symmetrische formule; goed voor de theorie. Voor de practijk is het een onding. Vaak is zoiets nodig als $\binom{100}{3}$ of zoiets; sommige rekenmachientjes kunnen die theorieformule niet aan en de student laat het antwoord open (historisch, historisch!). Jammer! Toch maar die andere leren. Bovendien: α hoeft niet geheel te zijn! Het binomium van Newton (opgave 7 uit **4.3**) geldt algemener: het wordt eventueel een oneindige reeks (geen enkel probleem; zie later):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k; \qquad |x| < 1.$$

Voor de gewone binomiumformule kunnen we eventueel van $-\infty$ tot ∞ sommeren: het is nl. enorm handig, de volgende aanvulling op de definitie van de *gewone* binomiaalcoëfficiënt aan te brengen:

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ als } k < 0 \text{ of als } k > n \qquad (n \geq 0 \text{ geheel}).$$

Vooral in de kansrekening zeulen sommige auteurs hele maxima en minima mee in sommatiegrenzen, zulk masochisme hoeft niet! Ook bij het schrijven van programmaatjes *kan* het handig zijn in de subroutine voor de binomiaalcoëfficiënt die uitbreiding in te voeren.
Opgave: Benader $\sqrt{250}$ tot op een decimaal of drie. (Deel eerst door $\sqrt{256}$ en gebruik de binomiaalformule). Er zijn snellere methoden (Newton-Raphson e.d.), maar dit is aardig om wat te oefenen.
Opgave: Bewijs dat $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ en wel op twee manieren: eerst met een redenering. Gebruik hierbij, dat $\binom{n}{k}$ *gelijk is aan het aantal deelverzamelingen van k elementen uit een verzameling van n elementen*. De tweede methode is duf rekenen (breuken gelijknamig maken). Dat gaat in dit geval wel snel. Deze formule is de opzet van de *driehoek van Pascal*, zie het college.
Overigens, met genoemde combinatorische interpretatie is de bewering in opgave 4 uit **4.3** direct te zien door een vaas met gekleurde ballen te beschouwen.
Grote faculteiten: Tenslotte nog een handige formule voor het rekentuig. We hebben

$$\ln(n!) \approx (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n}; \qquad {}^{10}\log(n!) = \frac{\ln(n!)}{\ln 10}.$$

Dit is een uitgebreide vorm van de *formule van Stirling* (zie bibliotheek). We zien bijvoorbeeld:
$4711! \approx 2,0426 \cdot 10^{15620}$.
Opgave: Een zakje totaal onsamenhangend „zwart-op-wit" (1000.000 deeltjes zwart en 1000.000 deeltjes wit) wordt goed geschud. De kans dat al het zwart boven ligt is $\binom{2000000}{1000000}^{-1}$. Benader deze kans op drie significante cijfers.

5. Optellen.

(5.1) *Optellen van eindig veel getallen*. Dit is wat winkeliers vaak doen. De optelling van reële getallen is commutatief (de volgorde doet er niet toe) en associatief (we mogen clubjes getallen samen nemen, die apart optellen en de resultaten hiervan optellen; de som is onafhankelijk van de wijze waarop we dit doen).
Opgave. Bereken snel uit het hoofd: $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
Gauss deed dit als klein jongetje in enkele seconden; hij beschikte niet over een formule.

(5.2) *Optellen van oneindig veel getallen*. We zullen ons uitsluitend beperken tot het optellen van *aftelbaar* veel getallen. Overaftelbaar kan in principe ook, maar dat geeft een oerwoud van moeilijkheden.

Een zeer merkwaardig fenomeen doet zich voor: eerst moeten we ons afvragen, *hoe* we zullen optellen. Schrijf de getallen, zeg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in een *rij* op. Een rij is mooi wiskundig te definiëren: het is een functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$. Inderdaad: schrijf bv. $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ enz. De optelling kan nu geschieden via het *limietbegrip*. Zie voor dit begrip de middelbare school of de bibliotheek. Het limietbegrip wordt doorgaans erg moeilijk gevonden („er zit toch geen epsilon in, hè?" vraagt op een vergadering een angstige docent die hoge slagingspercentages wil halen). Eén troost: vóór de invoering van het strenge limietbegrip omstreeks het midden van de negentiende eeuw was de analyse *ontzettend veel moeilijker*! Sommige dingen kan men zich niet snel eigen maken. Zulks moet bestudeerd worden en herbestudeerd. Dan moet het bezinken. Dat gaat niet door er kantooruren in te proppen en er studiepunten tegenaan te gooien.

(5.3) *Convergente reeksen.* Terug naar de optelling. De som $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ definiëren we als de limiet voor $n \to \infty$ van de som van de eerste n termen (de n-de partiële som met een mooi woord). Als die limiet bestaat, heet dit getal de *som* van de *reeks* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Onder een reeks wordt meestal de rij der partiële sommen verstaan. De notatie is altijd als een „rij met plustekens". Het is een symbolisch ding. De mathematicus ziet er geen been in te schrijven:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s$$

als s de som van de reeks is. Nu lijkt de reeks een getal te zijn. U ziet: de wiskundige is de oude nestgeur van de fysicus niet kwijt; gelukkig maar! Een notatie dient steeds zó te zijn, dat men zich er wel bij voelt. Voor de practicus is het zaak, het getal s te benaderen tot op de gewenste nauwkeurigheid en wel *door voldoende termen te nemen en die op te tellen.* Als de limiet van de partiële som bestaat, heet de reeks *convergent.* Let wel: de volgorde van optellen ligt hierbij vast!
Opgave: Als dit optellen met de hand of een computer geschiedt, moeten de in absolute waarde kleinste termen het eerst opgeteld worden, of het laatst, of maakt het niet uit?

(5.4) *Meetkundige reeksen.* Elke volgende term wordt gevonden door de vorige met een *constant* getal, de *reden* r, te vermenigvuldigen. Noem a de aanvangsterm. De reeks heeft de in **4.2** aangegeven gedaante. Bewijs de daar vermelde formules.
Overweeg ook: Elf keer op de wijzerplaat van een klok dekken de wijzers elkaar. De tijd die verloopt tussen twee opeenvolgende dekkingen bedraagt dus 12/11 uur. Als het één uur is, staat de uurwijzer op de een. Vijf minuten later staat de minutenwijzer daar, maar is de uurwijzer 5/12 minuut verder. Dat moet er bij. Maar dan ook nog $5/(12)^2$ enz. Dus $5 + 5/12 + 5/(12)^2 + \cdots = 60/11$.

(5.5) *Harmonische reeksen.* Het prototype hiervan is de reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$. Deze is divergent: de som is oneindig. Immers, de derde plus de vierde term zijn samen groter dan $\frac{1}{2}$. De vijfde t/m de achtste zijn samen groter dan $\frac{1}{2}$ (de laatste term van zo'n blok is de kleinste!). Neem dus elk nieuw blok tweemaal zo lang als het vorige. Elk blok is groter dan $\frac{1}{2}$. Ze overlappen niet, maar sluiten prachtig op elkaar aan. De som van de reeks is dus oneindig en de reeks is divergent. (In feite is de n-de partiële som ongeveer gelijk aan $\ln n$).

(5.6) *De reeks van Leibniz.* Een mooie reeks is $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$, de reeks van Leibniz. De som is $\pi/4$. Het is een van de slechtste reeksen als we π willen „bepalen". Waarom is zo'n reeks convergent?
We vlechten twee reeksen: afwisselend positieve en negatieve termen. Belangrijk is, dat elke volgende term in absolute waarde kleiner (evt. niet groter) is dan zijn voorganger en ook, dat de limiet van de n-de term nul is voor $n \to \infty$. Schrijf $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ met alle a's positief. Ga op de begane grond zitten. Ga met de lift a_1 omhoog. Ga vervolgens a_2 naar beneden. *Dan ben je hoger dan de begane grond.* Nu een afstand a_3 naar boven. *Dan ben je lager dan je eerst was.* We zien, dat een stijgende rij benedenkeerpunten ontstaat en een dalende rij bovenkeerpunten; teken zelf een plaatje.
Nu bestaat een „bijna-axioma" van de reële getallen: *een dalende, naar beneden begrensde rij heeft een limiet.* Analoog natuurlijk voor een stijgende naar boven begrensde rij. Dus: de bovenkeerpunten hebben een limiet, zeg B en de benedenkeerpunten hebben een limiet, zeg b. We zien direct dat $b \leq B$ (teken een figuur).

Elke reis van de lift overspant beide limieten. De afstand tussen die limieten is dus kleiner dan elke a_k. Omdat a_k naar nul gaat voor $k \to \infty$, vallen b en B samen. De reeks is convergent!

(5.7) *Absoluut convergente en voorwaardelijk convergente reeksen.* Een reeks als een meetkundige is een heerlijk ding. In welke volgorde je de termen ook optelt, steeds komt hetzelfde antwoord. Neem nu eens iets als de reeks van Leibniz. Of de reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. De som van de laatste is $\ln 2$. Beide reeksen hebben iets eigenaardigs: *men kan er uit krijgen wat men wil door geschikte volgorde van termen.* Het gaat hier om twee gevlochten divergente reeksen. De procedure is als volgt. Kies een willekeurig reëel getal c. Als $c > 0$, neem je eerst net zoveel positieve termen tot je voor het eerst boven c uitkomt. Dat kan, want de positieve termen tellen tot ∞ op. Vervolgens neem je de eerste negatieve term. Als je daarmee beneden c uitkomt, ga je verder met positieve termen, tot je weer net boven c komt. Als je na de eerste negatieve term echter nog boven c zit, neem je ook de volgende negatieve, enz. Je komt zo beslist eens beneden c, want de negatieve termen tellen tot $-\infty$ op. Dus: steeds zoveel positieve tot je boven c bent, dan weer zoveel negatieve tot je beneden c bent. Belangrijk is, dat hiermee alle termen aan bod komen èn dat als limiet c wordt bereikt: elke sprong die net over c gaat is de grootte van een „verre" term. Omdat de n-de term naar nul gaat voor $n \to \infty$, is de limiet juist c. Voor $c < 0$ gaat de redenering analoog. Een dergelijke reeks heet *voorwaardelijk* of *relatief* convergent. De reeks der absolute waarden is divergent. Als die ook convergent is, heet de reeks *absoluut convergent*. Absoluut convergente reeksen mag men berekenen door willekeurige volgorde der termen.
Macaber, dit alles! Het heeft zeer ver strekkende gevolgen. Doorgaans blijft men ver van relatief convergente reeksen af. Dit heeft te maken met het feit, dat volgordeperikelen een gevolg zijn van het limietbegrip, toegepast op partiële sommen. Dat is een kunstmatige aangelegenheid! Voor veel fysische processen, numerieke en kanstheoretische methoden, zijn die dingen niet relevant. Dan wordt gegrepen naar een integraalbegrip, dat ook de reeksen omsluit en waar geen volgorde der termen bestaat (Lebesgue-integratie bv.). Natuurlijk blijven relatief convergente reeksen bestaan, maar ze zijn dan niet in de theorie besloten.

(5.8) *Asymptotische reeksen.* Merkwaardig maar waar: deze zijn nog al eens divergent en tegelijk zeer geliefd! We gaan er niet diep op in. Ze dienen om functies te benaderen op een gegeven interval, meestal in een omgeving van oneindig of nul. Kenmerkend is, dat de fout die men maakt door af te breken, kleiner is dan de eerste weggelaten term (in absolute zin). Vaak worden die termen erg klein om vervolgens weer te stijgen. Ze rijzen daarna vaak de pan uit. Het is dus de kunst, juist bij het minimum af te breken. Dan is de benadering goed. Zie voor een schat aan voorbeelden *Abramowitz & Stegun: Handbook of mathematical functions* (Dover; grote oplage, zeer algemeen).
Veracht de divergente reeksen niet! Er is een gigantische theorie over bekend. Het is in sommige gevallen mogelijk een probleem op te lossen door een uitstapje te maken naar die theorie, daarin te werken en de zaak vervolgens „terug te vertalen". Het probleem is dan (misschien) opgelost.
Het beroemdste werk over divergente reeksen is het boek *Divergent series* van Hardy; bezoek de bibliotheek en schrik.

6. Differentiëren.

(6.1) De gewone diferentiaal- en integraalrekening nemen we over van de middelbare school. Een korte herhaling met enkele kleine aanvullingen volgt. De afgeleide van een functie f in een punt (getal) a is

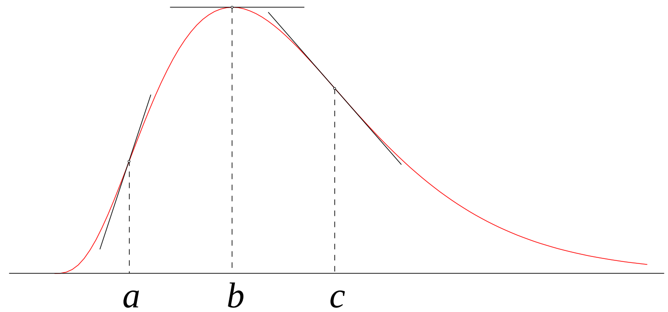
$$\left\lfloor \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right\rfloor_a = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De *kettingregel*:

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \left\lfloor \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \right\rfloor_{u=g(x)} \cdot g'(x).$$

Voorbeelden: Met $f(x) = \sin(x^2 + x + 1)$ volgt $f'(x) = \left[\cos(x^2 + x + 1)\right] \cdot (2x + 1)$.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + a)^7 = 7(x + a)^6$ (a een constante).

In onderstaande figuur zien we een functieschets met enige (buig)raaklijnen.



In het maximum: $f'(b) = 0$; $f''(b) < 0$ (f' daalt!). Bij a eerst stijging van f', daarna daling: f' heeft een maximum in a. Dus $f''(a) = 0$ en $f^{(3)}(a) < 0$ enz. Ook $f''(c) = 0$, maar $f^{(3)}(c) > 0$. Probeer dit soort overwegingen snel te maken!
Aardige toepassingen zijn maxima en minima van oppervlakten, of inhouden (doosjes e.d.).

(6.2) *Differentiatie van sommen, producten en quotiënten.* We vermelden alleen de regels, aangevuld met wat vraagstukken.
$(f+g)' = f' + g'$; $(fg)' = f'g + fg'$; $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (Leibniz).
Opgave: Bereken alle afgeleiden van $x^3\,\mathrm{e}^x$; idem van $x^2\,\mathrm{e}^{-ax}$ (a constant).
Differentiatie van inverse functie: Met $y = f(x)$ en $x = g(y)$ (f en g zijn elkaars inverse; $g = f^{-1}$) volgt

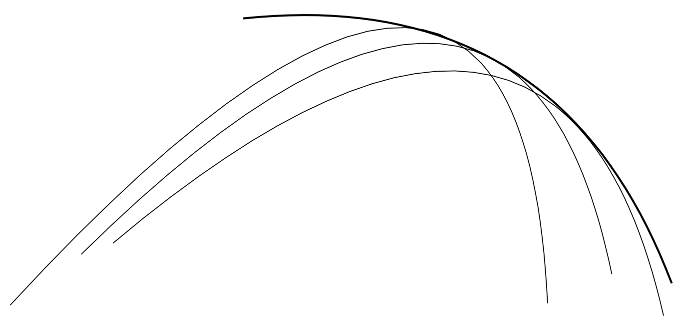
$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Voorbeeld: $x = \sin y$; $y = \arcsin x$ ($-1 \le x \le 1$; $-\pi/2 \le y \le \pi/2$). Voor $-\pi/2 < y < \pi/2$ is $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$, zodat voor $-1 < x < 1$ geldt: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Opgave. Ga zelf na met differentiatie van inverse functies: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^y$.
Logarithmisch differentiëren:

$$h = \frac{f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot f_m^{\alpha_m}}{g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot g_n^{\beta_n}} \implies \frac{h'}{h} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{f_i'}{f_i} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{g_j'}{g_j}.$$

Als een functie meer dan één variabele heeft, zoals een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dan kunnen we *partieel differentiëren*: differentieer naar een der variabelen, waarbij alle overige variabelen constant worden gehouden. In de volgende paragraaf wordt dit toegepast.

(6.3) *Omhullenden.* We gaan uit van een *functieschaar*: een geparametriseerde verzameling functies. Schrijf $y = g(x, \alpha)$. Bij elke α (uit een of ander interval van reële getallen) is een functie gedefinieerd.
Zo'n schaar kan ook *impliciet* worden gegeven; dat biedt voordelen: we schrijven dan $f(x, y, \alpha) = 0$. Zo stelt $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ met $\alpha > 0$ een verzameling concentrische cirkels voor; de straal van zo'n cirkel is juist α.
In onderstaande figuur zien we een stel krommen met daarbij (dik getekend) een stuk kromme, die aan alle krommen uit de schare raakt. Zo'n kromme heet een *omhullende*.



In een raakpunt hebben de omhullende en de schare-kromme dezelfde raaklijn, dus ook dezelfde afgeleide $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Neem twee krommen die dicht bij elkaar liggen: $f(x, y, \alpha) = 0$ en $f(x, y, \alpha + h) = 0$ (h klein). Dan is

$$0 = \frac{f(x, y, \alpha + h) - f(x, y, \alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, \alpha + h) - f(x, y, \alpha)}{h} = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha).$$

Hieruit volgt, dat de vergelijking van de omhullende (indien deze bestaat) als volgt gevonden kan worden:

$$\text{Elimineer } \alpha \text{ uit } \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \quad f(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{((Alweer) Leibniz).}$$

We zullen deze procedure toelichten aan de hand van twee beroemde voorbeelden: de *veiligheidskromme* en de *caustische lijn*.

(6.4) *De veiligheidskromme*. We gaan uit van de schare parabolen

$$\begin{cases} y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = (v_0 \cos \alpha)t \end{cases} . \tag{1}$$

Hierin is α de elevatiehoek, v_0 de beginsnelheid en g de versnelling van de zwaartekracht. Eliminatie van t geeft

$$a x^2 (u^2 + 1) - xu + y = 0; \tag{2}$$

hier zijn de afkortingen

$$a = \frac{g}{2 v_0^2} \text{ en } u = \tan \alpha \tag{3}$$

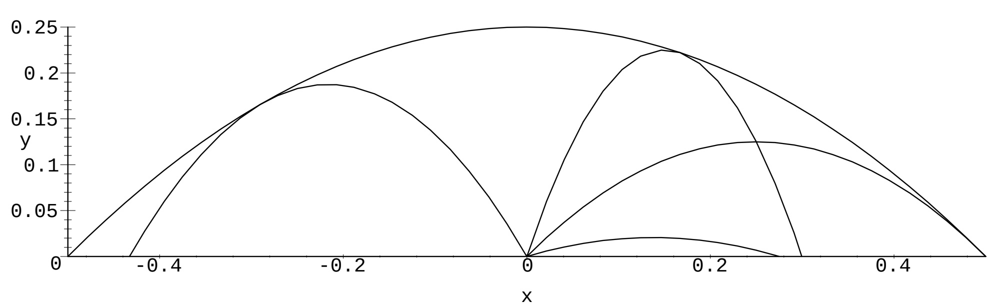
gebruikt. Partiële differentiatie van (2) naar u geeft

$$2 a x^2 u - x = 0, \text{ dus } u = \frac{1}{2ax}. \tag{4}$$

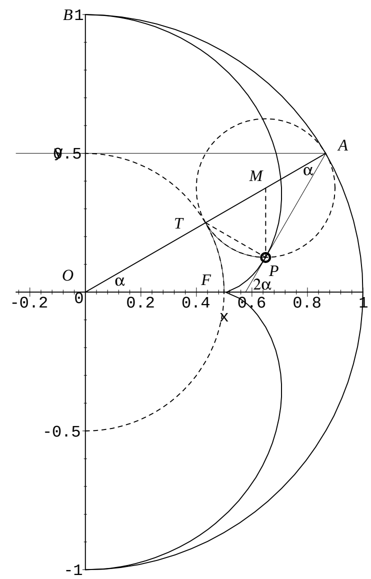
Eliminatie van u uit het stelsel $\{(2), (4)\}$ geeft met gebruikmaking van (3) tenslotte de vergelijking van de omhullende kromme:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2 v_0^2} x^2. \tag{5}$$

Dit is een parabool; de *veiligheidskromme*. Indien men hier buiten blijft, kan men niet worden geraakt. Een eventuele in het wilde weg schietende terrorist is alzo omgeven door een veiligheids-omwentelingsparaboloïde, waarvan hijzelf in het brandpunt staat. Buiten die paraboloïde komen geen kogels.
Ga na, dat eventuele voorkennis, dat het een parabool is, direct tot (5) leidt: het hoogste punt wordt gevonden uit de energievergelijking $mgh = \frac{1}{2} m v_0^2$ en het verste punt volgt door x te maximaliseren uit (1) (met $y = 0$), of door de voorkennis dat een elevatiehoek van 45° maximale horizontale afstand geeft.
In onderstaande figuur is $a = 1$ en u resp. $-\sqrt{3}$, 0,3, 1 en 3. De getekende baan met de kleinste elevatiehoek (rechtsonder) raakt de veiligheidskromme „onder de grond”.



(6.5) *De caustische lijn.* In onderstaande figuur stelt de grote halve cirkel de doorsnede voor van een holle spiegel met straal 1 en middelpunt O. Een lichtstraal komt horizontaal van links en kaatst in punt A (de hoogte $\frac{1}{2}$ in de figuur is toeval). De terugkerende straal raakt aan een kromme, de *caustische lijn*. Men ziet die dagelijks op de bodem van thee- en koffiekopjes.



De vergelijking van deze lijn is op de gebruikelijke manier te vinden: stel de vergelijking op van de teruggekaatste straal. Deze vergelijking bevat een parameter, zoals de in de figuur aangegeven hoek α, of een of andere handige functie van α. Differentiatie van de vergelijking naar die parameter geeft met de vergelijking zelf en eliminatie van genoemde parameter direct het gewenste resultaat.
We vinden voor de teruggekaatste straal:

$$y - \sin\alpha = (\tan 2\alpha)(x - \cos\alpha). \tag{1}$$

Differentiatie naar α geeft

$$\begin{aligned} -\cos\alpha &= \frac{2}{\cos^2 2\alpha}(x - \cos\alpha) + \tan 2\alpha \sin\alpha \\ &= \frac{2x - 2\cos\alpha + (2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha}{(2\cos^2\alpha - 1)^2}; \end{aligned} \tag{2}$$

na vereenvoudiging hebben we

$$x = \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos^3\alpha. \tag{3}$$

Met behulp van (3) en (1) volgt:

$$\begin{aligned} y &= \sin\alpha + (\tan 2\alpha)(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \cos^3\alpha) = \sin\alpha + \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}(1 - 2\cos^2\alpha) \\ &= \sin\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \sin^3\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Uit (3) en (4) volgt tenslotte door eliminatie van α:

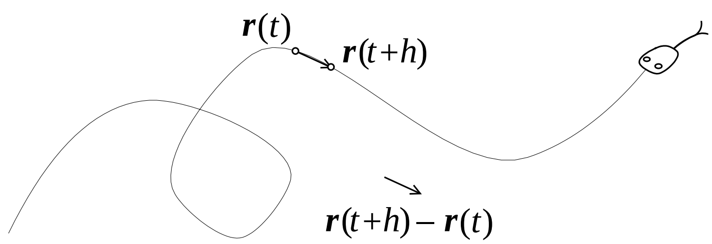
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y^{2/3} = \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Nog een aardige bijzonderheid: In de figuur is een halve cirkel getekend met straal 1/2 en nog een cirkel met straal 1/4. Nu blijkt: boog TF = boog TP. (Deze bogen zijn in de figuur getrokken getekend op hun gestippelde cirkels.) We krijgen de caustische lijn door de kleine cirkel over de grotere te rollen: het middelpunt ligt eerst op de y-as en het punt P ligt boven op die cirkel; na driekwart omwenteling van de rollende cirkel is dit punt in F aangekomen. Het punt P beschrijft de caustische lijn. Na verder rollen wordt de onderste helft beschreven.

7. Integreren.

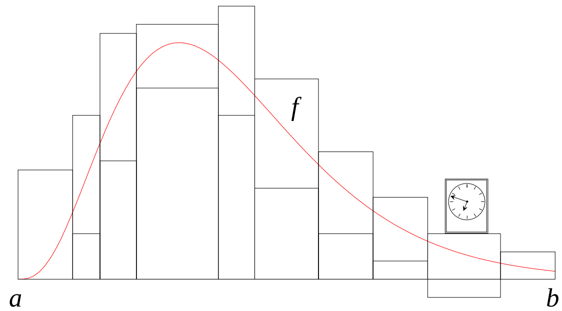
(7.1) *Inleiding.* Lezing van de „ouden" geeft, dat integreren het optellen is van bijna-oneindig veel getallen, die elk bijna-oneindig klein zijn. Later is aan dit geheel een strenge grondslag gegeven. ECHTER: het gevoel der ouden is van onschatbare waarde: laat ons een integraal zien als een som van dingen, die elk ontstaan uit de samensmelting van een „macroscopisch" iets met een „microscopisch" iets. Kleineer dit soort redeneringen niet! De ervaring heeft overduidelijk aangetoond, dat leerlingen, die uitsluitend hun toevlucht zochten in exacte, abstracte definities, volslagen stuurloos werden bij ontstentenis van een onderdeel van zo'n definitie. Het gevoel, de geest moet aan de definitie vooruit gaan! Dan blijkt ook, dat een bepaalde definitie „voor de hand ligt". Waarom wordt op de middelbare school verteld dat de integraal van b naar a het tegengestelde is van de integraal van a naar b? Logica? Omdat de formules mooi kloppen? De aldaar tentoongestelde integraal is een doodgewone lijnintegraal, die loopt over een „kromme" (d.i. een recht lijnstukje) in $\mathbb{R}^1$.
Veel te vaak wordt aan oppervlakte gedacht. Zelfs in de mechanica wordt in een „(t, v)-diagram" geïntegreerd... de afgelegde weg is de oppervlakte! Het moet en zal in het oppervlakte-dwangbuis. Omdat eenvoudige logica ontbreekt, is zoiets alleen goed te leren door een standvastige leerling, die door die poppenkast heen kijkt.

(7.2) *Lijnintegralen.* In onderstaande figuur is een kromme getekend in een of andere veeldimensionale ruimte.



In die ruimte werkt op sommige plaatsen, toevallig juist op de kromme, een kracht: dat is een *vectorveld*, zie het college. We trekken een sleetje voort langs een kronkelige bergweg. De energie, die nodig is voor een klein (dus bijna recht) stukje weg, is het inproduct van de kracht (een macroscopisch ding) en het stukje weg (een microscopisch vectortje in de richting waarin het sleetje wordt getrokken). Bovengenoemde „samensmelting" is hier dus niets anders dan het inproduct.
Andere operaties zijn ook mogelijk! Het uitproduct kan ook (als de ruimte driedimensionaal is): dat levert een plaatselijk infinitesimaal vectortje op. Optellen van die vectortjes geeft de integraal. Meestal wordt een vectortje als een rij of kolom van (hier) drie getallen weergegeven: ons resultaat is dan drie gewone integralen tegelijk. Op een computer zijn dit soort integralen doorgaans eenvoudig te berekenen. Verdeel de weg in kleine stukjes. Dat is goed te doen, als een of andere parameter wordt gekozen; bv de „tijd" t: de kromme is daarmee *geparametriseerd*. Laat in een punt van de kromme de tijd met een klein stukje toenemen. Dat geeft een richtingsvectortje (*raakvector*) langs de weg; zeg $\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)$. Bereken vervolgens $\boldsymbol{v} \times [\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)]$. Dat is een klein vectortje; een bijdrage aan de integraal. Tel de coördinaten van dat vectortje op bij drie separate registers: register 1 krijgt zo de x-component van de integraal; register 2 de y-component en register 3 de z-component. Daarmee is de integraal benaderd. Als we de invoering van de Riemannintegraal begrijpen (strooipunten, zie verderop), leveren andere integralen, zoals deze, geen specifieke moeilijkheden meer op.
Lijnintegralen komen vaak voor. De weg kan een *strategie* zijn; de integraal is bv. de opbrengst die bij die strategie behoort. De vraag is nu, deze opbrengst te maximaliseren over verschillende strategieën. Dat vak heet *variatierekening*. Het wordt in de natuurkunde gebruikt, in de economie (besliskunde, operationele research („dynamisch programmeren") enz; algemeen overal waar men rijker of beter wil worden.

(7.3) *De Riemannintegraal.* In onderstaande figuur zien we de grafiek van een functie f op een segment $[a, b]$. Het segment is in intervallen verdeeld; daarop zijn een boventrapfunctie en een ondertrapfunctie weergegeven.



Strikt genomen behoeven de boven- en ondertrap niet op dezelfde verdeling gebaseerd te zijn, maar door de gemeenschappelijke verfijning te nemen is de tekening eenvoudiger, terwijl het voor de theorie niet van wezenlijk belang is. Door de verdeling fijner te maken, is het meestal mogelijk de *bovensom* (d.i. de oppervlakte onder de boventrap) wat kleiner te maken en de ondersom eventueel wat groter. Indien nu boven- en ondersommen willekeurig dicht bij elkaar te brengen zijn door de verdelingen maar fijn genoeg te kiezen, blijkt één uniek reëel getal, zeg I te bestaan zó, dat I zowel de grootste ondergrens is van de bovensommen als de kleinste bovengrens van de ondersommen. Deze I heet de *Riemannintegraal* van f over $[a, b]$; d.i. onze schoolintegraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Voorbeelden van Riemann-integreerbare functies zijn continue en monotone functies.
Van groot practisch belang is de benadering van de Riemann-integraal via *strooipunten*: Verdeel het interval in kleine deelintervalletjes $[x_{i-1}, x_i]$. Kies in interval i een willekeurig punt c_i, een z.g. *strooipunt*. De integraal benaderen we met $\sum_i f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Voor integralen over een ruimtekromme gaat dit geheel analoog; het is de manier bij uitstek voor computerberekeningen.
Zie voor meer uitleg het college.
Opgave. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x) = 1$ als x rationaal is en $f(x) = 0$ als x irrationaal is. Bestaat de Riemannintegraal $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?

(7.4) *Integraalberekening.* We zetten de schoolregel in het zonnetje:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u = f(x).$$

Dit geeft $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, waarin F een primitieve van f is. De sport is nu: zoek F bij f.
De primitieve van f is de klasse $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.
Partiële integratie: $\displaystyle\int fG\,\mathrm{d}x = FG - \int Fg\,\mathrm{d}x$. Voorbeeld:
$\int x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot x\,\mathrm{d}x = x \cdot x - \int x \cdot 1\,\mathrm{d}x$, dus $2\int x\,\mathrm{d}x = x^2$ en $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$. (De constante hoeft indien niet strikt nodig, niet steeds worden meegesleept. Dat is zo'n gedoe. Aan het eind niet vergeten!) Overigens, deze integraal kan het snelst via „basis × halve hoogte".
Opgave. Bereken partieel: $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$. [Antw.: $-x\cos x + \sin x + C$]
Een eenvoudige tweede-orde differentiaalvergelijking: $y'' = x + 1$. Dan is $y' = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1$ en $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$. Merk op dat de oplossing (*integraalkromme*) twee vrijheidsgraden heeft (de constanten C_1 en C_2).

(7.5) *Microscopische dingen maken.* Officieel behoort dat natuurlijk met veel duurdere termen te worden omschreven. Semi-duur: maak een elementje. Veronderstel bv. dat de booglengte van een kromme $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ voor $a \le t \le b$ moet worden bepaald. Laat t toenemen met een klein stukje $\mathrm{d}t$. De bijdrage $\mathrm{d}s$ aan de booglengte s is dan $\|\boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t)\|$, dat is ongeveer $\|\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t\| = \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,|\mathrm{d}t| = \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t$. Tenminste, als we t inderdaad laten *toenemen*. Anders moeten we $-\mathrm{d}t$ schrijven.

Nu is ook duidelijk wat de booglengte van een stuk grafiek van een functie $y = f(x)$ zal zijn: de kromme is $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Differentiatie geeft $\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}\right\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.
Opgave. Bereken de booglengte van de grafiek $y = x\sqrt{x}$ op $[0,1]$.
Opgave: Gegeven zijn de kwart cirkel $\mathcal{C} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 = 1,\ 0 \le x \le 1,\ y \ge 0\}$ en de kwart ellips $\mathcal{E} = \{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 \le x \le a,\ y \ge 0\}$, $a,b > 0$. Wat is $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\,\|\boldsymbol{r}\|$? En $\int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}\,\|\boldsymbol{r}\|$? Zoek zelf in practijkgevallen altijd handige plakjes, sectortjes, kegeltjes enz. Over het laatste gesproken: *beredeneer* dat moet gelden:

$$\text{Inhoud bol } = \frac{4}{3}\pi r^3 \Longleftrightarrow \text{oppervlakte bol } = 4\pi r^2.$$

In de abstracte wiskunde worden dingen als $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ enz. als lineaire functies gezien (raakruimten). Zie het college (duale ruimte en cobasis van een vectorruimte). Dat is een logische zaak; voor de practijkbeoefenaar is een „klein stukje" goed! Hier speelt enerzijds, dat voor de „goede verstaander" functie en functiewaarden (... de functie $f(x)$ is...) door elkaar worden genoteerd en anderzijds, dat ons zicht op de „werkelijkheid" slechts grove benaderingen toelaat. (In de practijk bestaan bv. geen irrationale getallen. Die zitten alleen tussen de oren.) Het is geen enkel bezwaar om met losstaande objecten als $\mathrm{d}x$ enz. te rekenen. Sterker nog: dit nalaten omdat men de definitie niet kent werkt verlammend op het inzicht, opent de poort naar zelfkwelling en spant het paard achter de wagen: de wiskunde is juist zo opgebouwd dat het verband met de fysische werkelijkheid zo goed en intensief mogelijk is.
Ook met reële getallen werken gaat prima zonder „de" definitie daarvan te kennen. Van die mogelijkheid wordt veelvuldig gebruik gemaakt.
Zwaartepunten en traagheidsmomenten. Het *moment* van een figuur $\mathcal{F}$ t.o.v. de y-as is $\int_{\mathcal{F}} x\,\mathrm{d}S$, waarin $\mathrm{d}S$ een massa-elementje is; wij nemen een „homogene plaat": dus een oppervlakte-elementje. (Een dunne strook, evenwijdig aan de y-as zou misschien mooi zijn, want daarvoor zijn alle x-waarden gelijk: een strook i.p.v. een $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$-oppervlakte-elementje scheelt een dimensie, dus een integraal). Zo'n moment is gelijk aan het moment van het zwaartepunt van de figuur t.o.v. de y-as, d.i. $x_Z O$ waarin O de oppervlakte van de figuur is.
Voor een traagheidsmoment, d.i. $\int_{\mathcal{F}} x^2\mathrm{d}V$, ligt de zaak iets ingewikkelder. Hier hebben we de regel van Steiner: Het traagheidsmoment t.o.v. een of andere as l is gelijk aan het traagheidsmoment t.o.v. een as, evenwijdig aan l maar door het zwaartepunt van de figuur, *vermeerderd* met het bedrag MR^2, waarin M de massa van de figuur is en R de afstand tussen de twee assen. In de kansrekening houdt deze regel in dat de variantie van een meting gelijk is aan het tweede moment minus het kwadraat van het eerste moment.
Soms kan een integraal snel worden gevonden door dit soort dingen toe te passen; verschuiving geeft nogal eens mooie symmetrie!
Opgave. Zij $\mathcal{D}$ het inwendige van de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(1,3)$, $(2,7)$ en $(9,6)$.
Schrijf het antwoord (hoeft niet uitgewerkt te worden) van de integraal $\iint_{\mathcal{D}}(2x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ direct op.
Opgave. Zij $\mathcal{K}$ de eenheidskubus $\{(x,y,z)\,|\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.
Schrijf het antwoord van $\iiint_{\mathcal{K}}(x-2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ direct op.
Opgave. Is met de gegevens van bovenstaande opgave de waarde van de integraal
$\iiint_{\mathcal{K}}(2x^3y-3y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ direct op te schrijven?

8. Voorbeelden in de integraalrekening.

(8.1) *Standaardintegralen*. Bij deze leidraad zijn lijsten gevoegd met enkele vaak voorkomende integralen. Het gaat hier in wezen om *het berekenen van een primitieve*.

(8.2) *Partiële-breuksplitsing*. Vaak is een integrand een zogenoemde *rationale functie*: dat is geen rationaalwaardige functie, maar een functie die te schrijven is als quotiënt van twee polynomen. Zo'n functie is als volgt te schrijven:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1+b_2x^2+\cdots+b_nx^n} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\frac{\alpha_{ij}}{(x-c_i)^j} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}\frac{\beta_{kl}x+\gamma_{kl}}{(x^2+g_kx+h_k)^l};$$

een mondvol. De betekenis is als volgt:
1. De graad van de noemer in het linkerlid moet groter zijn dan de graad van de teller.
2. Teller en noemer hebben geen nulpunten (lees: niet-constante factoren) gemeen.
3. De noemer heeft (evt.) reële nulpunten c_i; c_i heeft multipliciteit J_i.
4. De noemer heeft (evt.) complexe nulpunten; anders gezegd de noemer bevat reëel-onontbindbare kwadratische factoren (kwadratische functies met negatieve discriminant) $x^2 + g_k x + h_k$ met multipliciteiten L_k. We hebben $J_1 + \cdots + J_I + 2(L_1 + \cdots + L_K) = n$.
Door het rechterlid onder één noemer te brengen en wel dezelfde noemer als het linkerlid, kunnen we na gelijkstelling van overeenkomstige coëfficiënten in de tellers, alle α_i, β_{kl} en γ_{kl} berekenen, zie het college.
De theorie is lastig (ingewikkeld); die slaan we over. Veel computeralgebra-programma's beschikken over deze bewerking.
Voorbeeld: Na achteroverzitten aan de computer blijkt:

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x^8 + 5x^7 + 25x^6 + 70x^5 + 170x^4 + 286x^3 + 365x^2 + 325x + 125} =$$
$$\frac{0,12}{(x+1)^2} - \frac{0,016}{x+1} + \frac{0,016x - 0,12}{x^2+x+5} + \frac{0,2x - 0,6}{(x^2+x+5)^2} + \frac{1,6x}{(x^2+x+5)^3}.$$

De noemer is nl. te ontbinden:
$x^8 + 5x^7 + 25x^6 + 70x^5 + 170x^4 + 286x^3 + 365x^2 + 325x + 125 = (x+1)^2(x^2+x+5)^3$.
Kleine gevallen kunnen eenvoudig met de hand:

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right).$$

Nu de functie zo is „afgebroken", resteren integralen van het type

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^r} \quad \text{en} \quad \int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+gx+h)^s}\,\mathrm{d}x.$$

De linker integraal is $\dfrac{-1}{(r-1)(x-c)^{r-1}} + C$ als $r \neq 1$ en $\ln|x-c| + C$ als $r = 1$.
De rechterintegraal is ingewikkeld; eerst kunnen we de teller schrijven als $\frac{1}{2}\beta(2x+g) + (\gamma - \frac{1}{2}\beta g)$. Omdat de integraal met $2x+g$ in de teller gelijk is aan $\int(1/u^s)\,\mathrm{d}u$ met $u = x^2+gx+h$ kunnen we die meteen berekenen. De integraal die te berekenen overblijft is van het type $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+gx+h)^s}$; deze is met de substitutie $x + \frac{1}{2}g = v$ van het type $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{(v^2+a^2)^s}$. Met $v = aw$ tenslotte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}w}{(w^2+1)^s}$; door partiële integratie is s te „verkleinen"; zie ons integralenblad!
Voor het zoeken naar primitieve functies bestaat een heel arsenaal slimmigheden en substituties. Zie hiervoor het integralenblad.

(8.3) *Plakjes snijden*. We refereerden eerder al naar het „fysisch plakjes snijden", een van de allerkrachtigste methoden om integralen te berekenen. Hier volgen nog enkele voorbeelden; sommige worden ook wel op middelbare scholen verteld. Teken steeds zelf een bijpassende figuur!

(8.4) *Inhoud kegel*. Het *grondvlak* van de kegel wordt begrensd door een of andere kromme, een *richtkromme* van de kegel. Noem de oppervlakte van het grondvlak O. Boven dit grondvlak hangt ergens een vast punt, de *top*. We verbinden deze top met elk punt van de richtkromme; zo ontstaan de *beschrijvenden*. Laat ook een loodlijn neer vanuit de top op het grondvlak. Noem de hoogte h. Breng op een diepte x onder de top een vlak aan, evenwijdig aan het grondvlak. Dit vlak snijdt de beschrijvenden op die hoogte volgens een kromme, die gelijkvormig is aan de richtkromme. De zo ontstane doorsnede geven we dikte $\mathrm{d}x$; nu is de plak gemaakt. De inhoud van de plak is opp. plak $\times\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{h}\right)^2 O\,\mathrm{d}x$. De inhoud van de kegel is dus $\int(\text{Inh. plak}) = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 O\mathrm{d}x = \frac{1}{3}hO$.

(8.5) *Inhoud omwentelingslichaam*. Hier bestaan mooie formules voor; wij beperken ons tot wenteling van een *vlakke* kromme $y = f(x)$ om de x-as; $a \leq x \leq b$. Een plak, loodrecht op de x-as is een cirkelschijfje met straal $|f(x)|$ en dikte $\mathrm{d}x$. De inhoud van de plak is dus $\pi y^2\,\mathrm{d}x$ en de totale inhoud is $\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$.

(8.6) *Oppervlakte omwentelingslichaam.* De manteloppervlakte van de plak in het vorige voorbeeld is $2\pi y\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$. De gevraagde oppervlakte is dus
$2\pi\int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$.
Opm.: De manteloppervlakte van een rechte cirkelkegel (evt. evenwijdig aan het grondvlak afgeknot) is gemiddelde omtrek boven- en ondervlak × lengte beschrijvende.
Opgave: Voer de berekening uit met de functie $y=\sqrt{a^2-x^2}$; $-1\le x\le 1$, $a>0$.

(8.7) *Meervoudige integralen; herhaalde integralen.* Laat A een mooie verzameling zijn in $\mathbb{R}^2$ en f een niet al te onredelijke functie. We hechten betekenis aan de *dubbele integraal*

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

op de gebruikelijke manier: macroscopisch de $f(x,y)$-waarde; microscopisch de waarde $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, die in het geval van berekening met een computer dus een klein rechthoekje wordt. De resulterende integraal-elementen zijn dus inhouden van rechthoekige zuiltjes met grondoppervlakte $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en hoogte $f(x,y)$. De integraal zelf stelt ingeval $f(x,y)>0$ dus de inhoud voor van het gebied boven A, onder de grafiek van f.
We nemen vervolgens aan, dat het grondvlak een gebied is tussen twee grafieken en wel tussen $y=\phi(x)$ en $y=\psi(x)$ met $\phi(x)\le\psi(x)$; $a\le x\le b$. Zo'n gebied noemt men wel een *normaal gebied*. Vaak leest men „normaalgebied"; een ingeburgerd germanisme. Snij nu een plakje loodrecht op de x-as, met x-coördinaat x en dikte $\mathrm{d}x$. De oppervlakte van die plak is een gewone integraal: dat is $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ (merk op dat x hier vast is gekozen!) en de inhoud van de plak is $\left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$. We hebben zo

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y).$$

De rechter integralen heten *herhaalde integralen*. Voor integratie over een rechthoek $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ maakt bij mooie (bv. continue) functie f de integratievolgorde niet uit:

$$\iint_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le d}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x,y).$$

Meestal wordt bij een herhaalde integraal de laatste integraal (die *het eerst* berekend wordt!) afgesloten met bijbehorende $\mathrm{d}x$ of $\mathrm{d}y$ enz.:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Drie, vier en nog meer integralen tegelijk gaat geheel analoog.

(8.8) *Voorbeeld*:

$$\begin{aligned}\iiint_{\substack{0<x<1\\ 0<y<x\\ 0<z<x+y}} (x^2y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^{x+y} (x^2y+z)\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\left[x^2yz+\tfrac12 z^2\right]_{z=0}^{z=x+y}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\left[x^2y(x+y)+\tfrac12(x+y)^2\right]\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \left[x^3y+x^2y^2+\tfrac12(x+y)^2\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\left[\tfrac12x^3y^2+\tfrac13x^2y^3+\tfrac16(x+y)^3\right]_{y=0}^{y=x}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\left(\tfrac12x^5+\tfrac13x^5+\tfrac16\cdot 8x^3-\tfrac16x^3\right)\\
&= \tfrac{5}{36}+\tfrac{7}{24}=\tfrac{31}{72}.\end{aligned}$$

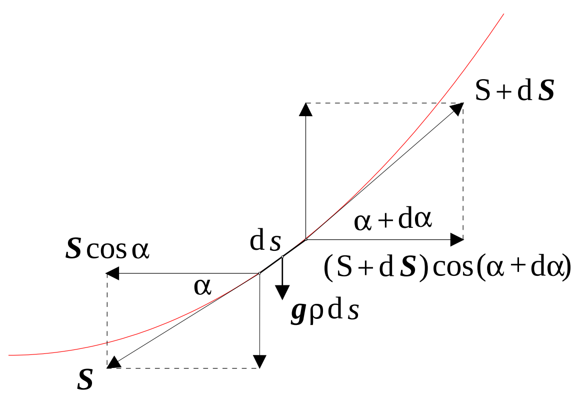
De *aanvankelijke* integratievolgorde blijkt uit de herhaalde-integraalvoorstelling

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} (x^2y+z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Opgave: Een tot complete razernij leidende middelbare-schooloefening. We willen in het vorige voorbeeld eerst de x- vervolgens de y- en tenslotte de z-integraal berekenen. Dan moet het gebied omgewerkt worden; dat is soms lastig, of het gaat helemaal niet. In dit geval wel, omdat het gebied *convex* is (we gaan hier nu niet op in). Vind eerst de uiterste grenzen voor de laatste integratievariabele: $0<z<2$, ga dit na. Bij gegeven z met $0<z<2$ moet gelden: $z<x+y<2$ en $0<y<x<1$. Teken dit gebied in het xy-vlak. Snel blijkt, dat we moeten onderscheiden $0<z<1$ en $1<z<2$. Stel eerst $0<z<1$. Dan moeten we onderscheiden: $0<y<\frac12 z$ en $\frac12 z<y<1$. In het eerste geval volgt $z-y<x<1$ en in het tweede geval $y<x<1$. Stel nu $1<z<2$. Dan onderscheiden we $z-1<y<\frac12 z$ en $\frac12 z<y<1$. In het eerste geval volgt $z-y<x<1$ en in het tweede geval $y<x<1$. Ga dit alles na. Dus

$$\begin{aligned}\iiint_{\substack{0<x<1\\0<y<x\\0<z<x+y}} (x^2y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac12 z}\mathrm{d}y\int_{z-y}^1 (x^2y+z)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}z\int_{\frac12 z}^1\mathrm{d}y\int_y^1 (x^2y+z)\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_1^2 \mathrm{d}z\int_{z-1}^{\frac12 z}\mathrm{d}y\int_{z-y}^1 (x^2y+z)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}z\int_{\frac12 z}^1\mathrm{d}y\int_y^1 (x^2y+z)\,\mathrm{d}x\\ &= \ldots = \tfrac{487}{5760}+\tfrac{193}{960}+\tfrac{131}{1920}+\tfrac{221}{2880}=\tfrac{31}{72}.\end{aligned}$$

(8.9) *Vergelijking van een hangend koord („kettinglijn”).* In onderstaande figuur is een deel van een hangend koord getekend en daarin een stukje ter lengte $\mathrm{d}s$.



De krachten die op dit stukje werken, zijn de vectoren $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}+\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ en $\rho\boldsymbol{g}\mathrm{d}s$. Het stukje $\mathrm{d}s$ is in rust. Zowel de som der horizontale als die der verticale componenten is nul.
Horizontaal:

$$\begin{aligned}&-S\cos\alpha+(S+\mathrm{d}S)\cos(\alpha+\mathrm{d}\alpha)=0\\ &-S\cos\alpha+(S+\mathrm{d}S)(\cos\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha)=0\\ &-S\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\cos\alpha\,\mathrm{d}S\\ &\frac{\mathrm{d}S}{S}=-\tan\alpha\,\mathrm{d}\alpha=y'\mathrm{d}\alpha\\ &\ln S=-\ln\cos\alpha+\text{const};\qquad S=\frac{\text{const}}{\cos\alpha}=:\frac{D}{\cos\alpha}.\end{aligned}$$

Verticaal:

$$\begin{aligned}&-S\sin\alpha+(S+\mathrm{d}S)\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha)=g\rho\,\mathrm{d}s\\ &-S\sin\alpha+S(\sin\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha)+\sin\alpha\,\mathrm{d}S=g\rho\,\mathrm{d}s\\ &S\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{d}S=g\rho\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Met $S = \dfrac{D}{\cos\alpha}$ volgt $\mathrm{d}S = \dfrac{-D}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$. Dus

$$\begin{aligned} &D\,\mathrm{d}\alpha + \sin\alpha\left(\frac{D}{\cos^2\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right) = g\rho\,\mathrm{d}s \\ &D(1+\tan^2\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = g\rho\,\mathrm{d}s \\ &D\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = g\rho\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Met $y' = \tan\alpha$ volgt $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = y''\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}$. Dus $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = y''\mathrm{d}x$.
Tevens is $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1+y')^2}\,\mathrm{d}x$. Zodat

$$\begin{aligned} &Dy'' = g\rho\sqrt{1+y'^2};\ \text{schrijf } y'' = A\sqrt{1+y'^2}, \\ &\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = A;\quad \text{met } u \stackrel{\text{def}}{=} y' : \\ &\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = A\,\mathrm{d}x;\ \text{voor zekere } B \text{ is } \ln(u+\sqrt{u^2+1}) = Ax+B. \end{aligned}$$

Met $\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = z$ volgt $u = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = \sinh z$. (De functie $\ln(u+\sqrt{u^2+1})$ heet $\operatorname{arcsinh} u$.)
Hier is $z = Ax+B$; we hebben met $y' = u$:

$$\begin{aligned} &u = \sinh(Ax+B),\ \text{dus } y' = \sinh(Ax+B),\ \text{met zekere } C : \\ &y = \frac{1}{A}\cosh(Ax+B) + C = \frac{1}{2A}\left(\mathrm{e}^{Ax+B} + \mathrm{e}^{-(Ax+B)}\right) + C. \end{aligned}$$

(8.10) *Opmerkingen.*
1. We herleidden $(S+\mathrm{d}S)\cos(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - S\cos\alpha$, het antwoord was $\cos\alpha\,\mathrm{d}S - S\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$. Een term $\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}S$ is verdonkeremaand! Dat is een „tweede-orde" term. Die verliest zijn invloed bij verfijning van de verdeling ofwel verkleining van het stukje $\mathrm{d}s$. Als een integraal tweedimensionaal is, hebben we uitsluitend stukjes als $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, of $\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}S$ enz., maar juist géén „losse" $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\alpha$ of $\mathrm{d}s$. Bij berekeningen op een computer zijn deze zaken direct in te zien. De enige dwarsligger kan divergentie zijn, zodat het lijkt of een ééndimensionale integraal met, zeg een „$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$" erin, toch iets oplevert wat redelijk lijkt. Maar dan is de integraal zelf al verkeerd.
Sneller nu met een functie van twee variabelen: schrijf $u = u(x,y)$. Dan is

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y.$$

Hier eenvoudig $u = S\cos\alpha$, dus $u_S = \cos\alpha$, $u_\alpha = -S\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ en $\mathrm{d}(S\cos\alpha) = \cos\alpha\,\mathrm{d}S - S\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$. Dat gaat sneller.
2. Een snellere manier om het wiskundige probleem van de kettinglijn te formuleren is de volgende. Het koord hangt zó, dat de potentiële energie zo klein mogelijk is. Teken een grafiek van een of andere functie $y = y(x)$. Met $y(a)$ en $y(b)$ bekend (de ophangpunten) èn de lengte van de kromme bekend, moet een functie y gevonden worden, die voldoet aan

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = s, \qquad \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \text{ minimaal.} \tag{$*$}$$

Dit typische probleem uit de variatierekening valt buiten het bestek van dit geschrift.
Opgave: Ga na of $(*)$ inderdaad het geformuleerde probleem beschrijft.

Opgave: Formuleer wiskundig het probleem van de glijbaan: We willen van een hoog punt $(0, H)$ naar een laag punt $(a, 0)$ glijden langs een kromme $y = y(x)$ zó, dat de tijdsduur minimaal is. Oplossen wordt niet gevraagd; de oplossing is een deel van een *cycloïde*, de baan die een vlekje op de buitenrand van een band tijdens het fietsen aflegt.

9. Taylorontwikkeling.

(9.1) Een beproefde methode om functiewaarden in de omgeving van een gegeven punt te benaderen is die met de *Taylorontwikkeling*. Dat is een soort reeksontwikkeling. Voor de practijk voldoen meestal enkele termen. Voor de theorie gaat men vaak door; zo ontstaan de *Taylorreeksen*.

(9.2) *Schets van de ontwikkeling*. We gaan uit van de bekende definitie van afgeleide:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dat schrijven we iets anders:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \text{ beetje.} \qquad (*)$$

Deze idee passen we toe op de functie f' i.p.v. f en wel in een integraal:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x [f'(a) + f''(a)(u - a) + \text{beetje}]\,\mathrm{d}u \\ &= f'(a)(x - a) + f''(a) \cdot \frac{1}{2}(x - a)^2 + \text{beetje.} \end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + \text{beetje.} \qquad (**)$$

We zien: $(**)$ is een soort „verbetering” van $(*)$. We schrijven nu $(**)$ met f' i.p.v. f, weer in de integraal $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(u)\,\mathrm{d}u$ enz. Meteen ontstaat de ontwikkeling:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x - a)^{n-1} + R_n;$$

waarbij we hopen dat het wat R_n betreft bij een beetje blijft. Het is de *restterm*. Hier is veel aan gerekend in de geschiedenis; er is een hele resttermcultuur ontstaan. De belangrijkste gedaanten zijn:

$$\begin{aligned} &\frac{(1 - \theta)^{n-r}}{r} \cdot \frac{(x - a)^n}{(n-1)!} f^{(n)}\big(a + \theta(x - a)\big), \qquad \text{(Schlömilch)}, \\ &(1 - \theta)^{n-1} \frac{(x - a)^n}{(n-1)!} f^{(n)}\big(a + \theta(x - a)\big), \quad \text{(Cauchy)}, \\ &\frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}\big(a + \theta(x - a)\big) \quad \text{(Lagrange)}. \end{aligned}$$

Steeds is θ een getal met $0 < \theta < 1$, r een natuurlijk getal $\leq n$. Voor elke voorstelling weer anders; bovendien hangt θ niet alleen van a, maar ook van x af! Dat maakt de theorie lastig.
De uitdrukkingen van Cauchy en Lagrange volgen eenvoudig uit die van Schlömilch door resp. $r = 1$ en $r = n$ te nemen.
In de practijk worden Taylorontwikkelingen vrijwel niet gebruikt om functies numeriek te benaderen. Veel sneller en scherper gaat het met orthogonale polynomen (bv. die van Chebyshev – veel gebruikt in de basic-ROM van goedkope computers, zoals eertijds de ZX-Spectrum en de Commodore 64), nog beter met gebroken rationale functies (kettingbreuken, Padébreuken), zie elk handboek, bv. het eerder aangehaalde boek van Abramowitz en Stegun.

(9.3) *Ordesymbolen.* Als we een Taylorontwikkeling hebben t/m een of andere restterm $R_n(x)$ (neem voor het gemak $a = 0$), dan is in een omgeving van 0 die term te schatten: $|R_n(x)| < M|x|^n$ voor zekere $M > 0$ en daarbij $|x|$ klein genoeg. We schrijven wel $R_n(x) = \mathrm{O}(x^n)$ $(x \to 0)$.
Met de term $\mathrm{O}(x^n)$ wordt bedoeld, dat deze term t.o.v. x^n begrensd blijft als x tot 0 nadert: $|\,\mathrm{O}(x^n)/x^n| < M$ voor zekere vaste M en alle x dicht genoeg bij 0. Zo bestaat ook een *kleine o*: de uitdrukking $g(x) = \mathrm{o}(x \ln x)$ $(x \to \infty)$ bv. betekent $\lim_{x\to\infty} g(x)/(x \ln x) = 0$. De notatie O of o betekent *Ordnung*; het zijn de *O- en o-symbolen van Landau-Bachmann*. Grote O: „van dezelfde orde als" (d.i. quotiënt is begrensd); kleine o: „van kleinere orde dan" (d.i. quotiënt gaat naar nul). Als $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ $(x \to a)$, dan is ook $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ $(x \to a)$; niet omgekeerd! Ga dit na. Geef ook een voorbeeld waarbij het omgekeerde niet waar is.

(9.4) *Machtreeksen.* Van de Taylorontwikkeling gaan twee belangrijke ontwikkelingen uit:
1. Het geval $n = 2$. Dit geeft de inleiding in de variatierekening.
2. Het geval $n = \infty$ geeft de voortlopende *Taylorreeksen*, dat zijn machtreeksen. Een *machtreeks* is een reeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Met de definitie $0^0 = 1$. (Dat is vrijwel overal het handigst om te doen, maar 0^0 is in de wiskunde nog niet uitgekristalliseerd. Vele geavanceerde rekenmachientjes geven $0^0 = 1$. Er is geen „zeer redelijke limiet" waar dat uit zou volgen; ook x^x (met limiet 1 voor $x \to 0$) is maar een keus.)
Nu blijkt: bij elke machtreeks bestaat een getal $R \geq 0$, evt. ∞ met de eigenschap, dat de reeks absoluut convergent is voor $|x| < R$ en divergent voor $|x| > R$. Zo ontstaat een *convergentie-interval* met grenzen $-R$ en R. Voor $|x| = R$ is nader onderzoek nodig: convergentie slechts op $[-R, R)$, op $(-R, R]$, op $(-R, R)$ of op $[-R, R]$ zijn alle vier mogelijk.
Op $(-R, R)$ is de machtreeks juist de Taylorreeks van de somfunctie. Als deze laatste f is, is dus

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Natuurlijk kan x worden vervangen door $x - a$ enz. Een Taylorreeks om 0 heet wel een *MacLaurinreeks*.
Voor ons is van belang, dat een machtreeks binnen het convergentie-interval willekeurig vaak kan worden gedifferentieerd en geïntegreerd. De som is dan ook de zoveelste afgeleide of primitieve van de somfunctie van de reeks.
Voorbeelden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \Longrightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots;\\
\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots;\\
\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.
\end{aligned}$$

De laatste is een speciaal geval van het uitgebreide binomium van Newton (ook een Taylorreeks!). Zie voor meer voorbeelden het college.

10. Limieten

(10.1) *Betekenis.* „Limiet" komt van *limes*, dat is „grens". Het limietbegrip is een hoeksteen in de topologie; in het bijzonder in de (eventueel veeldimensionale) analyse. Wij zullen nu alleen (kort) spreken over *limieten van functies*; eerder zagen we al een limiet van een rij verzamelingen.
Voor het limietbegrip is nodig het begrip *omgeving* en *gereduceerde omgeving*. Deze begrippen hebben in de topologie hun algemene beslag. Afschaduwingen vinden we in de vectorrekening (lineaire analyse), die kan hier oneindigdimensionaal zijn (functieruimten), maar ook eindigdimensionaal (functies van „meer" (dan wat?) variabelen, complexe getallen) en eendimensionaal (reële getallen).

In elk dezer gevallen wordt een *omgeving* van een punt (element) gedefinieerd. Een *gereduceerde omgeving* van een punt is een gewone omgeving van dat punt *met uitzondering van dat punt zelf*. Zo is voor de reële getallen een *open* intervalletje om een punt een omgeving van dat punt.

(10.2) *Limiet van een reële functie*. We zien vaak de notatie

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Voor het gevoel betekent dat, dat de waarde $f(x)$ willekeurig dicht bij c komt te liggen, als we maar x „dicht genoeg" bij a kiezen. Wiskundig betekent dit, dat bij *elke* omgeving L van c een *gereduceerde* omgeving A van a bestaat, zó, dat

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \in L. \tag{1}$$

In analyseboeken leest men meestal *direct*

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \neq a \left(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \epsilon\right). \tag{2}$$

Een omgeving wordt hier gemaakt door de afstand tot een bepaald punt kleiner dan een bepaalde waarde te maken; dit is een *metrische topologie*. Zie het college. Voor punten in het platte vlak krijgen we op deze wijze open cirkelschijven om de punten. Voor de algemene theorie echter is het van geen belang of het ook echt cirkelschijven zijn; elliptische of rechthoekige vormen zijn ook goed! Ook hoeft het punt niet „in het midden" te liggen. De formule (1) is zeer algemeen; we kunnen bijvoorbeeld direct betekenis geven aan de uitdrukking

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = c,$$

hier is A uit (1) bijvoorbeeld een open cirkelschijf om het punt (a, b). In de practijk wordt hier vaak een open rechthoek genomen; voor dit geval is een aan (2) analoge uitdrukking

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \forall(x,y) \neq (a,b) \left((|x-a| < \delta_1) \wedge (|y-b| < \delta_2) \Longrightarrow |f(x) - c| < \epsilon\right); \tag{3}$$

voor een cirkelschijf, *equivalent* met (3):

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall(x,y) \neq (a,b) \big((x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \Longrightarrow |f(x) - c| < \epsilon\big). \tag{4}$$

In bovenstaande definitie kan voor a ook het symbool ∞ of $-\infty$ worden gekozen; een omgeving van ∞ is eenvoudig een interval van de vorm (K, ∞) met K reëel (practijk: K groot). *Hetzelfde geldt voor c.* Als bijvoorbeeld $c = \infty$ (symbolisch bedoeld!), wordt ϵ vervangen door een „grote" M en „$|f(x) - c| < \epsilon$" wordt „$f(x) > M$". *Blijf dus aan omgevingen denken*, dan loopt alles vanzelf!
In al deze voorbeelden is bij eindige a, b en c „dicht bij" synoniem met „kleine afstand". Dit is niet de algemene gang van zaken in de wiskunde; omgevingen kunnen zeer goed gedefinieerd worden zonder een afstandsbegrip te gebruiken.
Opgave: Laat een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven zijn. Geef een omschrijving van $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ met epsilon en delta('s).

(10.3) *Enkele regels met voorbeelden*. Bij goniometrische functies *radialen* gebruiken (teken hierbij zelf figuren; zie evt. middelbare school of het college).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Deze drie limieten zijn als speciale gevallen van een *afgeleide* te beschouwen; zie het college. Handig is vaak, voorkomende functies in een Taylorreeks te ontwikkelen. Limiet en sommatie kunnen bij eindig veel termen altijd verwisseld worden. Met oneindige sommatie is dit niet meer zo, dus $\lim \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ is niet altijd hetzelfde als $\sum_{n=1}^{\infty} \lim f_n(x)$. *Bij machtreeksen is het wel altijd goed, mits de limietwaarde van x binnen de convergentiecirkel ligt.*

Voor de practijk zijn meestal twee, hooguit drie termen voldoende; alleen in textbookpesterijen gaat men graag verder.
Voorbeeld:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\mathrm{O}(x^5)\right]-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\mathrm{O}(x^2)\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = -\frac{1}{6}\cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

Zie voor het O-symbool de eerder behandelde Taylorontwikkeling. In plaats van dit symbool kan ook de gehele reeks worden opgeschreven mits bekend; dat is hier bij de sinus het geval. Dus

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right]-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{5!}x^2+\cdots\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = -\frac{1}{6}\cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

Immers, limiet en som kunnen bij machtreeksen worden verwisseld; zie boven.
Opgave: Ga na: $\sin x = \mathrm{O}(1)$ $(x\to\infty)$; $\tan x = \mathrm{O}(1/[(\pi/2)-x])$ $(x\to\pi/2)$; $\ln x = \mathrm{o}(1/x)$ $(x\to 0)$.
In onderstaande limieten zijn α en β vast (zij hangen niet van x af).

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0\ (\alpha>0);\quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta x} = 0\ (\alpha\in\mathbb{R},\ \beta>0);\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = \infty\ (\alpha\in\mathbb{R},\ \beta>0);$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha\ln x = 0\ (\alpha>0);\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\ (\alpha>0).$$

Zeer belangrijk is de

(10.4) *Regel van De L'Hôpital*: Gevraagd wordt

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Hierbij nadert x tot iets wat voor het ogenblik niet van belang is. Belangrijk is, dat de limiet van de vorm ∞/∞ of $0/0$ is. Dan differentiëren we teller en noemer naar x. Als de zo ontstane breuk weer van zo'n type is, differentiëren we verder enz. Zo is bijvoorbeeld

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^x+x)'}{(\mathrm{e}^x-x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^x+1)'}{(\mathrm{e}^x-1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1.$$

In dit voorbeeld is steeds sprake van ∞/∞ tot aan het eind.
Opgave: Bereken deze limiet op een andere manier.
Een andere toepassing van de regel van De L'Hôpital is

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^y}{y}\,\mathrm{d}y\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x\frac{\mathrm{e}^y}{y}\,\mathrm{d}y\right)'\Big/\left(\mathrm{e}^x/x\right)' = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x/x}{\mathrm{e}^x\,(1/x-1/x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-1/x} = 1.$$

Ga zelf na, dat het een geval ∞/∞ betreft. Tot slot noemen we de

(10.5) *Insluitingsstelling*. Stel $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = c$ en $g(x)\le f(x)\le h(x)$ voor x in een omgeving van a. Dan is $\lim_{x\to a} f(x) = c$.
Dit is een eenvoudige stelling; zie voor verdere toelichting het college.
Voorbeeld: Gevraagd wordt $\lim_{x\to\infty} 1/[x+(\sin x)\sqrt{x}\,]$. Omdat voor $x>4$:

$$0<\frac{1}{x+(\sin x)\sqrt{x}}\le\frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} < \frac{1}{\sqrt{x}}\to 0\ (x\to\infty),$$

is de gevraagde limiet gelijk aan nul. (Gebruikt is: $\sqrt{x}-1>1$.)
Opgave: Bereken $\lim_{x\to 0}\sin x/\sqrt{x}$ en $\lim_{x\to\infty}\sin x/\sqrt{x}$

11. Complexe analyse

(11.1) *Invoering van de complexe getallen.* „Complex” betekent *samengesteld*. Een *complex getal* is een geordend paar reële getallen; dus een element van $\mathbb{R}^2$. Optelling van complexe getallen en vermenigvuldiging van een complex getal met een reëel getal geschiedt als gebruikelijk. Voor complexe getallen is een *vermenigvuldiging* gedefinieerd: voor complexe getallen (a,b) en (c,d) geldt

$$(a,b)(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac-bd, ad+bc). \tag{1}$$

Deze vermenigvuldiging is commutatief en associatief. Met de afkorting

$$\mathrm{i} \stackrel{\text{def}}{=} (0,1) \tag{2}$$

en de isomorfie

$$a \longleftrightarrow (a,0) \tag{3}$$

is het complexe getal (a,b) te schrijven als $a+b\mathrm{i}$ of ook wel $a+\mathrm{i}b$. De grootheid i wordt wel de *imaginaire eenheid* genoemd; we hebben

$$\mathrm{i}^2 = -1. \tag{4}$$

De verzameling der complexe getallen heet het *complexe vlak*; we duiden dit aan met $\mathbb{C}$. Als een complex getal in wat algemene notatie wordt aangeduid met zoiets als $a+b\mathrm{i}$, wordt stilzwijgend verondersteld dat a en b reëel zijn. Dan heet a het *reële deel* van z en b het *imaginaire deel*. Let op: het imaginaire deel van een complex getal is zelf dus reëel!
Door bovenstaande constructie vormen de reële getallen een deelverzameling van de complexe getallen. Een reëel getal is dus ook complex; het getal 1 bijvoorbeeld is nu ook een vector en wel langs de *reële as*. De complexe getallen $b\mathrm{i}$ heten *zuiver imaginair*; zij vormen de *imaginaire as*.

(11.2) *Poolcoördinaten.* Een complex getal is een vector in $\mathbb{R}^2$; we kunnen die ook in poolcoördinaten aangeven. Voor $z=a+b\mathrm{i}$ definiëren we:

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2} \tag{5}$$

en

$$\operatorname{Arg} z = \angle(z,1); \qquad -\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi. \tag{6}$$

Het getal $|z|$ heet de *absolute waarde* of *norm* van z. Steeds is $|z| \ge 0$; $|z|=0$ geldt alleen als $z=0$.
Het getal $\operatorname{Arg} z$ heet het *hoofdargument* van z. In sommige literatuur wordt dit in $[0,2\pi)$ genomen.
Onder $\arg z$ verstaan we

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + k\cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \operatorname{Arg} z + \mathbb{Z}2\pi. \tag{7}$$

De verzameling $\arg z$ heet het *argument* van z (met $\mathbb{Z}$ duiden we de verzameling der gehele getallen aan).

(11.3) *Complex-toegevoegde; rekenregels.* Bij $z=a+b\mathrm{i}$ heet $a-b\mathrm{i}$ de *complex toegevoegde* van z; notatie $\bar{z}$; ook wel z^* (a en b hier zoals gezegd reëel!). In de volgende rekenregels zijn w en z complexe getallen.

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z+\bar{z}); \qquad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}); \qquad \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}; \tag{8}$$

$$|zw| = |z||w|; \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \ne 0); \quad z\bar{z} = |z|^2; \tag{9}$$

$$|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(w\bar{z}); \tag{10}$$

$$|z \pm w| \le |z| + |w|;\ |z \pm w| \ge |z| - |w| \text{ en } |z \pm w| \ge |w| - |z|;\ \text{samen } |z \pm w| \ge \big||z| - |w|\big| \tag{11}$$

Begrippen als open verzameling, gebied, limiet nemen we rechtstreeks over uit de theorie van de eindigdimensionale reële Euclidische ruimte (zie de lineaire algebra); de *afstand* tussen complexe getallen z en w is $|z-w|$. (Het inproduct is $\operatorname{Re}(z\bar{w})$ ofwel $\operatorname{Re}(\bar{z}w)$.)

(11.4) *Complexe functies; differentiatie en integratie*. Veel begrippen uit de reële analyse in $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ zijn direct over te nemen in de complexe getallen, zoals continuïteit en convergentie van rijen en reeksen. We noemen ook het integreren en differentiëren van complexwaardige functies van een *reële* variabele. Zo is bijvoorbeeld uit reële functies $u(t)$ en $v(t)$ de complexe functie

$$z(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t) \tag{12}$$

te maken; in geval van differentieerbare u en v is

$$z'(t) = u'(t) + \mathrm{i}\,v'(t) \tag{13}$$

en in geval van bijvoorbeeld stuksgewijs continue u en v:

$$\int_{t_0}^{t_1} z(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

(11.5) *Lijnintegralen*. Ook is de *lijnintegraal* complex te schrijven: voor een complexwaardige functie f van een *complexe* variabele z is de integraal over een stuksgewijs gladde kromme (een mooie kromme voor ons; zie het college)

$$\gamma = \big\{ z(t) \,\big|\, t_0 \le t \le t_1 \big\} \tag{15}$$

gelijk aan

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,\mathrm{d}t; \tag{16}$$

terwijl de integraal niet afhangt van de parametrisering van γ. Een andere integraal is bijvoorbeeld

$$\int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)|z'(t)|\,\mathrm{d}t; \tag{17}$$

het geval $f(z) \equiv 1$ geeft

$$\int_\gamma |\mathrm{d}z| = \int_{t_0}^{t_1} |z'(t)|\,\mathrm{d}t = \text{ booglengte van } \gamma. \tag{18}$$

Het is onnodig de vectorintegraalrekening hier opnieuw op te zetten. De complexe notatie en rekenwijze blijken echter vaak voordelen te bieden.

(11.6) *Complexe machtreeksen*. Veel complexe functies worden gedefinieerd door middel van een machtreeks. In de reële analyse heeft een machtreeks een convergentie-interval; een complexe machtreeks blijkt een convergentie*straal* te hebben. Als we deze R noemen, dan is $0 \le R \le \infty$. De reeks convergeert absoluut voor $|z| < R$ en divergeert voor $|z| > R$. Voor $|z| = R$ (een cirkel in $\mathbb{C}$ om 0 met straal R) is nader onderzoek nodig. De reeksen $\sum z^n$, $\sum z^n/n$ en $\sum z^n/n^2$ hebben alle convergentiestraal 1. Het convergentiegebied wordt dus begrensd door de *eenheidscirkel* $|z| = 1$. Op de eenheidscirkel is de eerste reeks divergent; de tweede is op de cirkel alleen divergent als $z = 1$, verder relatief convergent en de derde is op de eenheidscirkel overal absoluut convergent.
De reeks $\sum n^n z^n$ heeft convergentiestraal 0; de reeks $\sum z^n/a^n$ $(a > 0)$ heeft convergentiestraal a en de reeks $\sum z^n/n!$ heeft convergentiestraal ∞. Ten overvloede herhalen we, dat de begrippen convergentiecirkel en convergentiestraal van toepassing zijn op *macht*reeksen.

(11.7) *Voorbeelden van machtreeksen.* Enige complexe functies zijn:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots; \tag{19}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots; \tag{20}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots; \tag{21}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots; \tag{22}$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots; \tag{23}$$

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}; \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \qquad (\text{steeds } n \text{ geheel } \geq 0). \tag{24}$$

(11.8) *Enige identiteiten*:

$$\sin(-z) = -\sin z; \quad \cos(-z) = \cos z; \quad \sinh(-z) = -\sinh z; \quad \cosh(-z) = \cosh z; \tag{25}$$

$$\cosh z = \cos \mathrm{i} z; \quad \sinh z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i} z; \quad \cosh \mathrm{i} z = \cos z; \quad \sinh \mathrm{i} z = \mathrm{i} \sin z; \tag{26}$$

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i} z} - e^{-\mathrm{i} z}}{2\mathrm{i}}; \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i} z} + e^{-\mathrm{i} z}}{2}; \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \tag{27}$$

$$e^{\mathrm{i} z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z \ (\text{vaak gebruikt met } z = \phi \in \mathbb{R}); \quad e^z = \cosh z + \mathrm{i} \sinh z; \tag{28}$$

$$(\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i} \sin nz \ (\text{i.h.b. } z = \phi \in \mathbb{R}: \textit{ formule van De Moivre}); \tag{29}$$

$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w; \quad \cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w; \tag{30}$$

$$\sinh(z \pm w) = \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w; \quad \cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \sinh z \sinh w \ (!); \tag{31}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z; \quad \cos 2z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z; \tag{32}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1; \quad \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z; \quad \cosh 2z = 2\cosh^2 z - 1 = 1 + 2\sinh^2 z. \tag{33}$$

(11.9) *Vraagstukken.*

1. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$:
z met $|z| = 13$, $\operatorname{Arg} z = \arctan(\frac{5}{12})$; w met $|w| = 6$, $\operatorname{Arg} w = -\frac{1}{2}\pi$.

2. Teken in $\mathbb{C}$ de volgende verzamelingen:
a) $\operatorname{Re} \dfrac{z-1}{z+1} < 0$; b) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$; c) $1 \leq |z| \leq 2$ & $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Beschouw de afbeelding $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = e^z$.
Bereken het beeld onder f van $A = \{x + \mathrm{i}y \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ en van $B = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

4. Los op: a) $e^{2z} - (1 + \mathrm{i})e^z + \mathrm{i} = 0$; b) $\cos z = 5$.

Functie	**Afgeleide**	**Een primitieve**
x^a	$ax^{a-1} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$
$\dfrac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert$
a^x	$a^x \ln a \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x \quad (a > 0;\ a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\dfrac{x}{a} \quad (\lvert x\rvert < \lvert a\rvert)$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$		$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$		$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert \quad (x^2 \neq a^2;\ a \neq 0)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}}$		$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+c}\right\rvert \quad \left(x^2+c>0;\ c\neq 0\right)$
$\sqrt{x^2+c}$		$\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+c}+\dfrac{1}{2}c\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+c}\right\rvert, \ \left(x^2+c>0;\ c\neq 0\right)$
$f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$		$\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{x}{(x^2+1)^n}+\dfrac{2n-1}{2n}\displaystyle\int f_n(x)\mathrm{d}x$

Bovenstaande lijst is geldig voor dié x-waarden, waarin de functie gedefinieerd is en waarin de afgeleide en/of primitieve bestaat.

Integrand bevat	**Substitutie**	**Gevolg**
$\cos x$ en/of $\sin x$	$u = \tan\frac{1}{2}x$	$\cos x = \dfrac{1-u^2}{u^2+1}; \quad \sin x = \dfrac{2u}{u^2+1}; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$
$\sqrt{1-x^2}$	$x = \sin\phi$	$\sqrt{1-x^2} = \cos\phi; \quad \mathrm{d}x = \cos\phi\,\mathrm{d}\phi$
$\sqrt{x^2-1}$	$u = x+\sqrt{x^2-1}$	$x = \dfrac{u^2+1}{2u}; \quad \sqrt{x^2-1} = \dfrac{u^2-1}{2u}; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{u^2-1}{2u^2}\,\mathrm{d}u$
$\sqrt{x^2-1}$	$x = \dfrac{1}{\sin\phi}$	$\sqrt{x^2-1} = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}; \quad \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos\phi}{\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$
$\sqrt{x^2+1}$	$u = x+\sqrt{x^2+1}$	$x = \dfrac{u^2-1}{2u}; \quad \sqrt{x^2+1} = \dfrac{u^2+1}{2u}; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{u^2+1}{2u^2}\,\mathrm{d}u$
$\sqrt{x^2+1}$	$x = \cot\phi = \dfrac{1}{\tan\phi}$	$\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\sin\phi}; \quad \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{sin^2\phi}$

Enige Jacobianen

Poolcoördinaten : $x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi \quad (r \geq 0;\ 0 \leq \phi < 2\pi); \quad J(r,\phi) = r.$

Cylindercoördinaten : $x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi \quad z = z \quad (r \geq 0;\ 0 \leq \phi < 2\pi); \quad J(r,\phi,z) = r.$

Bolcoördinaten:

$$x = r\cos\phi\sin\theta \quad y = r\sin\phi\sin\theta \quad z = r\cos\theta \quad (r \geq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ 0 \leq \phi < 2\pi) \quad J(r,\theta,\phi) = r^2\sin\theta.$$