Week 02 - ribWBKII

Theorie: Sommeren
Onderwerp: Bepaalde en onbepaalde integraal

Voorafgaande:

De afgeleide functie

Voor de functie met voorschrift y = x^2 vinden we Δy / Δx = 2x + Δx als differentiequotient.

Laten we Δx steeds dichter tot nul naderen (Δx → 0), dan nadert de gemiddelde toename op een interval, ofwel het differentiequotient steeds meer tot 2x.

Voor x = 3 en Δx = 0,1 vindt men 6 + 0,1 = 6,1
Voor x = 3 en Δx = 0,01 vindt men 6 + 0,01 = 6,01
Voor x = 3 en Δx = 0,001 vindt men 6 + 0,001 = 6,001
Voor x = 3 en Δx = 0,0001 vindt men 6 + 0,0001 = 6,0001 enz.

We schrijven dit als $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$ voor x = 3

Als deze limiet bestaat voor x = 3, noemen we de functie differentieerbaar in het punt met de x-waarde 3.
6 is nu de werkelijke waarde op het moment x = 3

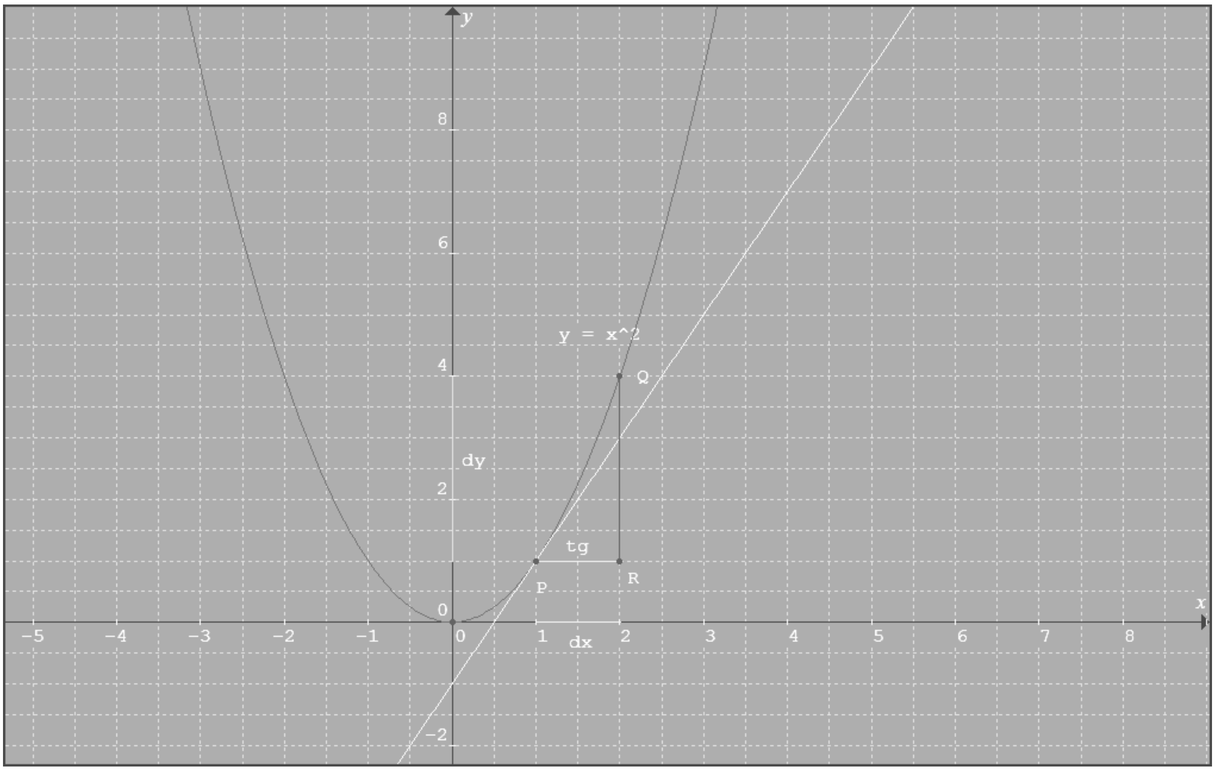
Voor Δy / Δx = 2x + Δx geldt dus $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

De limiet is zelf weer een functie van x
We noemen haar de afgeleide functie of kortweg de afgeleide en duiden haar aan met
f' = {(x,y')| y' = 2x}

De afgeleide is de limiet van het differentiequotient voor Δx → 0.

Als bij een functie voor elke waarde van x binnen een interval de afgeleide functie bestaat, dan noemen we de functie differentieerbaar op dat interval.

Afgeleide en richtingscoefficient



Bovenstaand is een gedeelte van de grafiek f: f(x) = x^2 getekend.
Op de kromme bepalen we het punt P(1,1) en laten het orgineel van P met dx toenemen en de functiewaarde van P met df(x). Zo ontstaat het punt Q waarvan de coordinaten zijn;
1 + dx en 1 + dy

Uit de driehoek PQR blijkt dat de richtingscoefficient van de lijn PQ = tan = dy/dx, dus gelijk aan het differentiecoefficient.

Als we punt Q langs de kromme tot P laten naderen, nemen dx en dy voortdurend af.
Als dx → 0 valt Q op den duur met P samen. Lijn PQ heeft dan zijn limietstand bereikt en is een raaklijn in punt P geworden.

Nemen we de hoek die deze raaklijn met de positieve x-as maakt, dan zal voor de richtingscoefficient van de raaklijn gelden:

$$\tan \alpha = \lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} 2x + dx = 2x = f'(x)$$

Voor het punt P met x = 1, zal de RC dus 2 zijn. Maar in elk willekeurig punt van de kromme kan nu de RC van een raaklijn in dat punt worden bepaald door in f'(x) = 2x de x-waarde van dat punt te substitueren.

Voor x = 3 vindt men dan tan α = f'(3) = 6; voor x =4 vindt men tan α = f'(4) = 8

De afgeleide functie is daardoor een maat voor de steilte van de kromme. Het vinden van de afgeleide heet *differentiëren*.

Regels voor het differentiëren

Om het differentiëren van functies te bekorten maakt men gebruik van algemene regels waarvan er hier een aantal zonder bewijs volgen:

Regel 1

$\mathbf{f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0}$ (R.C = 0, een horizontale lijn)
De afgeleide van een constante functie is nul

Regel 2a

$\mathbf{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n * x^{n-1}}$
Voorbeeld: $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

Regel 2b

$\mathbf{f(x) = a * x^n \rightarrow f'(x) = a * n * x^{n-1}}$
Voorbeeld: $f(x) =3x^5 \rightarrow f'(x) = 15x^4$
$f(x) = 7x \rightarrow f'(x) = 7x^0 = 7$

Regel 3
De somregel
Zijn g en h functies van x, dan geldt:
$\mathbf{f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)}$

Regel 4
de productregel
Zijn g en h functies van x, dan geldt:
$\mathbf{f(x) = g(x) * h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)}$

Regel 5
de quotientregel
Zijn g en h functies van x, dan geldt:

$$\mathbf{f(x) = g(x) / h(x) \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) * g'(x) - g(x) * h'(x)}{h^2(x)}}$$

Regel 6 $\mathbf{f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x}$

Regel 7 $\mathbf{f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = - \sin x}$

Primitiveren

De methode waarmee we de afgeleide bepalen noemen we differentiëren.
(De afgeleide functie f' van een gegeven functie f)

Het vinden van de functie f van een gegeven afgeleide functie f' noemen we primitiveren.

De verkregen functie f wordt dan de primitieve functie genoemd.

Voorbeeld#1

Gegeven functie	**Primitieve functie**
F'(x) = f(x) = 2x	→ F(x) = x^2
F'(x) = f(x) = 3x^2	→ F(x) = x^3
F'(x) = f(x) = cosx	→ F(x) = sinx
F'(x) = f(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	= ½ * $x^{-½}$ → F(x) = $x^{½}$ = √x

Voorbeeld#2

F'(x) = 4x^3 → F(x) = x^4 + 10

Hier is aan de primitieve functie een willekeurige constante toegevoegd (10).
De afgeleide van deze willekeurige constante is immers nul.

Als we van deze functie alle primitieven willen opschrijven, noteren we dat als;

F(x) = x^4 + C met C een willekeurige constante.

Onbepaalde integraal

Onder de onbepaalde integraal van een functie f verstaan we de verzameling van alle primitieven van f.

We schrijven de onbepaalde integraal van een functie f als ∫ **(f(x)dx**

Het ∫-teken wordt integraalteken genoemd.

Definitie

F'(x) = f(x) ↔ ∫ (f(x)dx = F(x) + C

Voorbeeld#3

∫ 3x^2 dx = x^3 + C
∫ x^2 + 5 dx = 1/3 x^3 + 5x + C
∫ 1/5x^4 dx = 1/25 x^5 + C

Standaardintegralen

01. $\int dx = x + C$
02. $\int x^{\alpha} dx = (1 / (\alpha + 1))\, x^{\alpha + 1} + C \ (\alpha \neq -1)$
03. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
04. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Rekenregels

$\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx = \int (f(x) \pm g(x))\, dx$

De som van de onbepaalde integralen van twee functies f en g is gelijk aan de onbepaalde integraal van de som van f en g

$\int c\, f(x)\, dx = c\int f(x)\, dx$

Het product van een constante c en de onbepaalde integraal van een functie f is gelijk aan de onbepaalde integraal van het product van de constante en de functie f.

Voorbeeld#4 – Substitutiemethode

De substitutieregel is gerelateerd aan de kettingregel.
Soms bevat de te primitiveren functie (bijv. f) zelf nog een andere functie (bijv. u). Door deze tijdelijk te vervangen voor een symbool wordt de te primitiveren functie overzichtelijker.
Echter je krijgt dan ook met de afgeleide van u te maken !

Stel:

$f(x) = \int \sin(2x)dx$:

We herschrijven dit mbv substitutie, en definieren $u(x) = 2x$

Dit resulteert in:

$$f(x) = F'(x) = \int \sin(u)dx$$

Een functie met argument u kan echter niet geprimitiveerd worden naar x.

We moet dx dus door du zien te vervangen.

Gelukkig geldt: $\frac{du}{dx} = u'(x)$, zodat we kunnen schrijven: $du = u'(x) * dx$

Of tewel: $dx = \frac{du}{u'(x)}$

In ons geval: u(x) = 2x → u'(x) = 2 → $dx = \frac{du}{2} = \frac{1}{2} du$

$$F'(x) = \int \sin(u) * \frac{1}{2} du$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int \sin(u) * du$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(u)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

Controle

f(x) = - ½ cos 2x

Het is een samengestelde functie

t = 2x (u = 2x)

afgeleide t = 2

u → cos(u)

afgeleide cos(u) → - sin(u)

a * -sin(2x) * 2 = sin(2x)

a = - ½

- ½ * - sin(2x) * 2 = sin(2x)

Dus:

∫ sin2xdx = - ½ cos 2x + C

Voorbeeld#5

f(x) =∫ sin(x/3)dx

We herschrijven dit mbv substitutie, en definieren u(x) = x/3

Dit resulteert in:

$$f(x) = F'(x) = \int \sin(u)dx$$

Een functie met argument u kan echter niet geprimitiveerd worden naar x.

We moet dx dus door du zien te vervangen.

Gelukkig geldt: $\frac{du}{dx} = u'(x)$, zodat we kunnen schrijven: $du = u'(x) * dx$

Of tewel: $dx = \frac{du}{u'(x)}$

In ons geval: u(x) = x/3 → u’(x) = 1/3 → $dx = \frac{du}{1/3} = 3du$

$$F'(x) = \int \sin(u) * 3du$$
$$F'(x) = 3\int \sin(u) * du$$
$$F(x) = -3\cos(u)$$
$$F(x) = -3\cos(x/3) + C$$

Controle

F(x) = -3 cos (x/3) + C

Het is een samengestelde functie

u = x/3

afgeleide u = 1/3

afgeleide -cos(u) → sin(u)

a * sin(x/3) * 1/3 = sin(x/3)

a = 3

3 * sin(x/3) * 1/3 = sin(x/3)

Dus:

$\int$ sin(x/3)dx = -3 cos (x/3) + C

Voorbeeld#6

$\int x\sqrt{x}\,dx = 2/5\, x^2 \sqrt{x}$

Oplossing:

$x\sqrt{x} = x * x^{½} = x^{1 ½}$

primitiveren → $x^{2 ½}$ = $1 / 2 ½ \ * x^{2 ½}$ → $2/5\, x^2 \sqrt{x}$

Voorbeeld #7 met partiele integratie

De formule voor partiele integratie is gebaseerd op de productregel bij het differentiëren.
Er zijn 2 manieren om de formule op te schrijven – ze komen op hetzelfde neer.

Manier 1: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Manier 2: $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

Wat je dus moet doen:
1) Je functie is het product van 2 andere functies. Bepaal van de ene de afgeleide en van de andere de primitieve.
2) Vul nu de gewenste formule in.

Belangrijk: Bedenk eerst welke functie je het beste kan differentiëren en welke je het beste kan differentiëren. M.a.w. maak de juiste keuze voor f en g!

Bepaal de primitieve functie van:

f(x) = sin(x)2x

<u>Poging 1</u>

Schrijfwijze 1		**Schrijfwijze 2**	
f(x)=sin(x)	**f'(x)=cos(x)**	**f(x)=sin(x)**	**f'(x)=cos(x)**
g'(x)=2x	**g(x)=x^2**	**g(x)=2x**	**G(x)=x^2**

Invullen in formule geeft:

$$\int \sin(x)2x * dx = \sin(x) * x^2 - \int \cos(x) * x^2 dx$$

De term die nu alsnog geïntegreerd moet worden is nog ingewikkelder geworden dan hij als was. De poging is mislukt.

Poging 2

Kiezen we f en g andersom, dan geldt:

Schrijfwijze 1
f(x)=2x f'(x)=2
g'(x)=sin(x) g(x)= -cos(x)

Schrijfwijze 2
f(x)=2x f'(x)=2
g(x)=sin(x) G(x)= -cos(x)

Invullen in formule (manier 2) geeft:

$$\int \sin(x) * 2x * dx = -2x * \cos(x) - \int -2 * \cos(x) dx$$
$$= -2x * \cos(x) + 2\int \cos(x) dx$$
$$= -2x * \cos(x) + 2\sin(x)$$

Waarmee de poging is gelukt.

In het algemeen kan je de termen met een sinus, cosinus of e-macht meestal beter als g kiezen, en termen met x^n erin als f. Immers: e-machten, sinussen en cosinussen blijven min of meer gelijk bij integreren of primitiveren, terwijl bij x^n de macht verhoogd wordt bij primitiveren, en juist verlaagd wordt bij differentiëren.

Bepaalde integraal

Als de functie f een primitieve F heeft, dus als dF(x) / dx = fx, dan is volgens de hoofdstelling van de integraalrekening de bepaalde integraal:

$$\int_b^a f(x)dx = \left[F(x)\right]_b^a = F(b) - F(a)$$

Voorbeeld#8

$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C$

Volgens de hoofdstelling van de integraalberekening geldt nu:

$$\int_1^3 3x^2 dx = \left[x^3\right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

Maar ook:

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 8 - (-1) = 9$$

En ook:

$$\int_{1}^{1} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{1}^{1} = 1^3 - 1^3 = 1 - 1 = 0$$

Voorbeeld#9

$$\int_{1}^{2} 3x^2 dx + \int_{2}^{3} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{1}^{2} + \left[x^3\right]_{2}^{3} = \left(2^3 - 1^3\right) + \left(3^3 - 2^3\right) = 3^3 - 1^3 = \left[x^3\right]_{1}^{3} = \int_{1}^{3} 3x^2 dx = 27 - 1 = 26$$

Bovenstaand is ook gelijk aan:

$$\left(3^3 - 1^3\right) = -\left(1^3 - 3^3\right) = -\int_{3}^{1} 3x^2 dx$$

Voorbeeld#10

$$\int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx = \left[\sin x\right]_{0}^{0.5\pi} = \sin 0.5\pi - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = \left[\sin x\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \sin\frac{3}{2}\pi - \sin\frac{1}{2}\pi = (-1) - (1) = -2$$

Rekenregels:

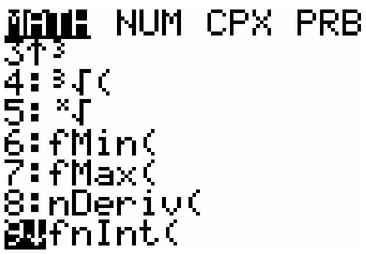
01. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

02. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

03. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Voorbeeld#11

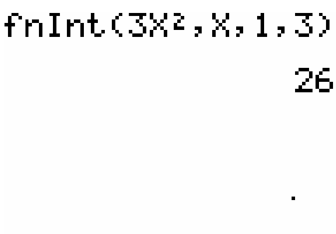
$\int_1^3 3x^2 dx = \left[x^3\right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$



Met TI83/84

[Math]
Optie 9 → fnInt(
Toets in → 3x^2, x , 1 , 3)
[enter]

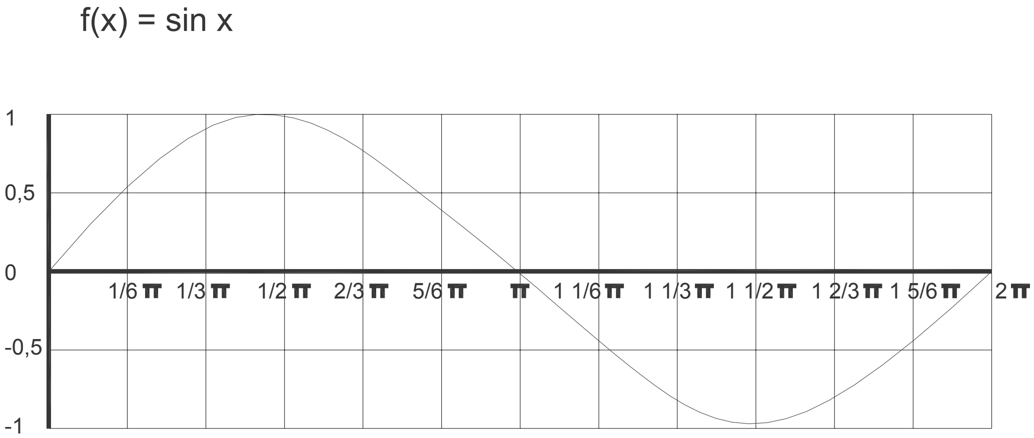
Antwoord → 26



Bijlage 01

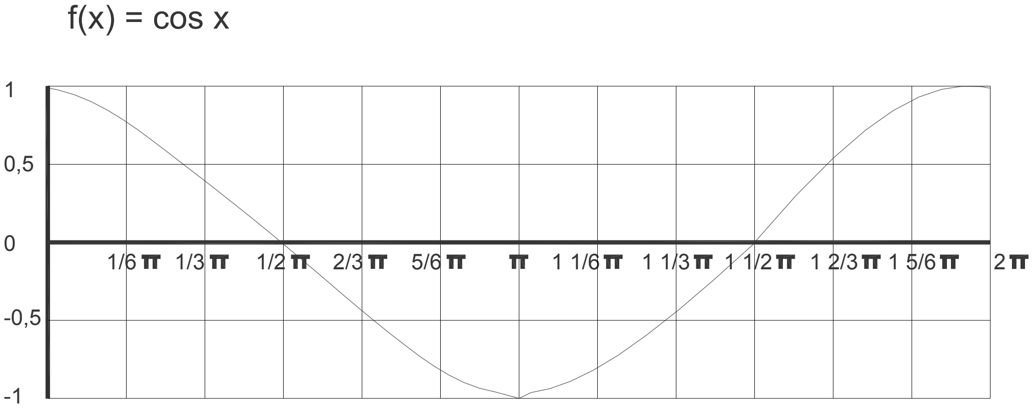
Tabel van de functie f(x) = sin x

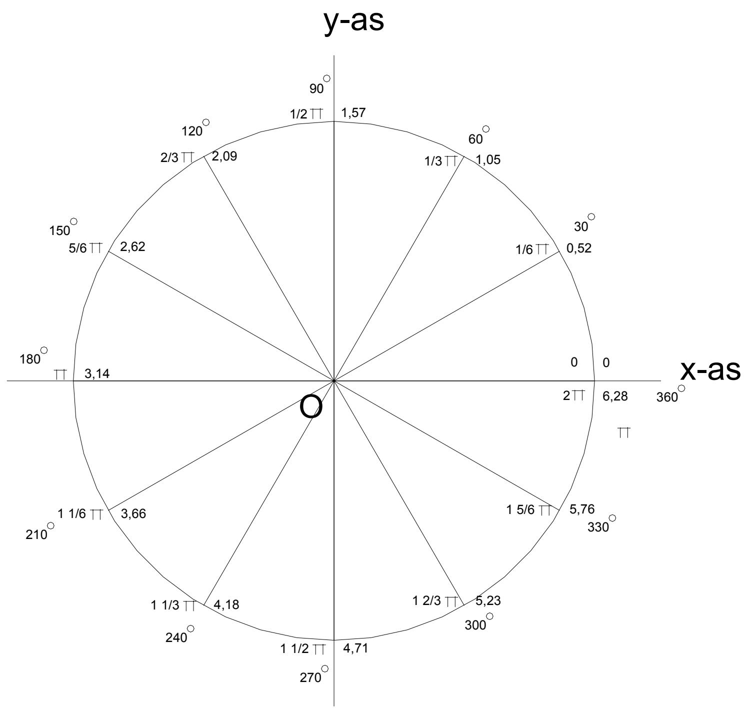
x	0	1/6π	1/3π	1/2π	2/3π	5/6π	π	1 1/6π	1 1/3π	1 1/2π	1 2/3π	1 5/6π	2π
f(x)	0	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0	-0,5	-0,9	-1	-0,9	-0,5	0



Tabel van de functie f(x) = cos x

x	0	1/6π	1/3π	1/2π	2/3π	5/6π	π	1 1/6π	1 1/3π	1 1/2π	1 2/3π	1 5/6π	2π
f(x)	1	0,9	0,5	0	-0,5	-0,9	-1	-0,9	-0,5	0	0,5	0,9	1





Bijv. <u>graden → radialen</u>

90°/360° * 2π = 1,57 →
1,57 / π = 0,5 →
1,57 = 0,5π

rad = α / 360 * 2π

<u>radialen → graden</u>

1 1/2π = 4,71 →
4,71 / 2π * 360° = 270°

α = rad / 2π * 360°

<u>Voorbeeld#11</u>

Sin 1/6π = sin 0,52 = 0,5 ($\frac{\pi}{6}$/ 2π * 360° = 30° → sin 30° = 0,5)