Week 06 - ribWBKII

Theorie: Integraalrekening
Onderwerp: Traagheidsmomenten

In week 4 hebben we de afleiding van het lineair traagheidsmoment behandeld.

Het lineair traagheidsmoment duiden we aan met: I = ΣdA * y^2, in mm^4

Of te wel: I = $\int y^2\, dA$

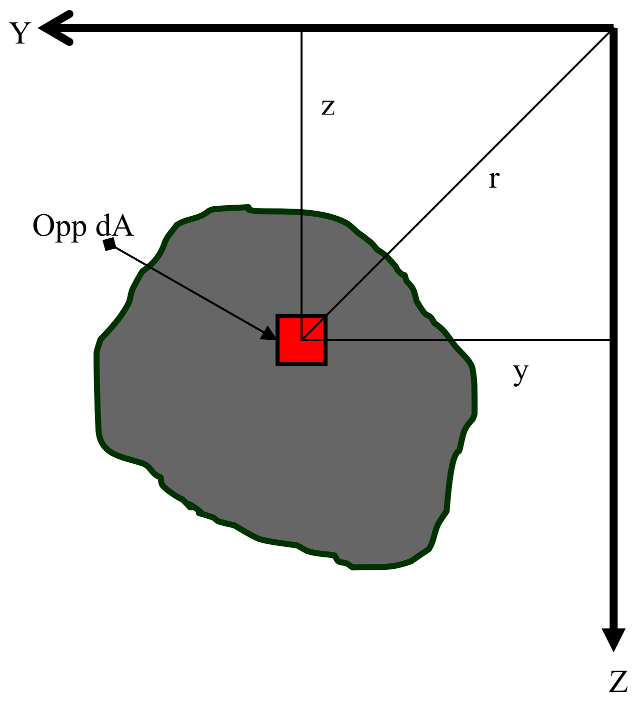
Dus: $M_b = \sigma_b / e * I$, kunnen we ook schrijven als: $M_b = I/e * \sigma_b$

De waarde I/e wordt het weerstandsmoment tegen buigen van de staafdoorsnede genoemd.

Wb = I/e, mm^3

Mb = Wb * σb wordt de buigingsformule genoemd.

We gaan hier nu iets verder op door:



Figuur 01

Het traagheidsmoment wordt ook wel het kwadratisch oppervlaktemoment genoemd.

Het lineair traagheidsmoment ten opzichte van een lijn is de som van alle deeltjes dA vermenigvuldigd met de bijbehorende zwaartepuntsafstand in het kwadraat.

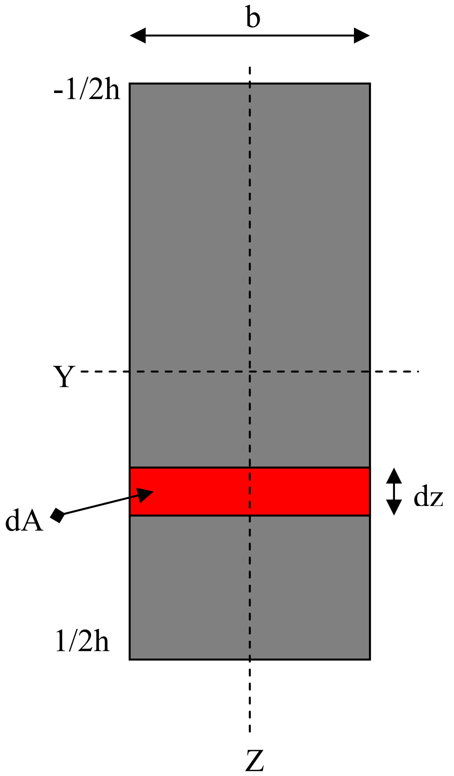
<u>Traagheidsmoment t.o.v. de y-as</u>

$$Iy = \int z^2 dA$$

<u>Traagheidsmoment t.o.v. de z-as</u>

$$Iz = \int y^2 dA$$

Het eigen traagheidsmoment is het traagheidsmoment om de as door het eigen zwaartepunt



Figuur 02

We bepalen het traagheidsmoment Iy om de y-as.

dA = b * dz

$$Iy = \int z^2 dA$$

Rekenregel

∫ c f(x) dx = ∫ cf(x) dx

Het product van een constante c en de onbepaalde integraal van een functie f is gelijk aan de onbepaalde integraal van het product van de constante en de functie f.

Dus:

$$Iy = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z^2 dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}\right] = \frac{b*h^3}{12} = \frac{1}{12}*b*h^3$$

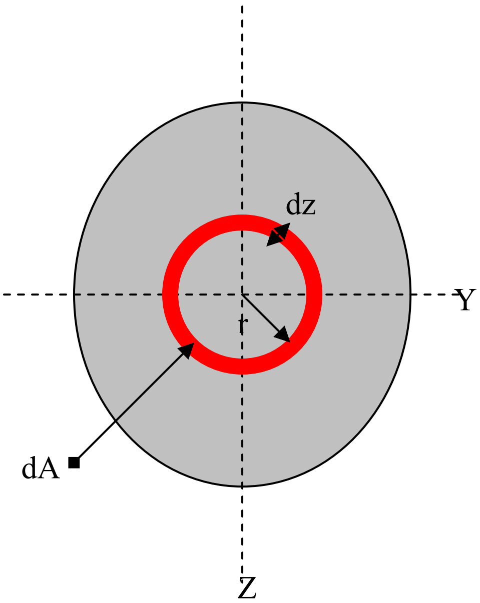
Evenzo Iz:

$$Iz = \frac{1}{12}*b^3*h$$

Het traagheidsprodukt (deze speelt een belangrijke rol bij niet symmetrische doorsneden)

$$I_{yz} = \int y.z.dA$$

Polair traagheidsmoment



Figuur 03

Als oppervlakte wordt een ring met dikte dr en een straal r opgenomen

$$dA = 2\pi .r * dr$$

Iz = Iy

$$I_{pol} = \int r^2 dA \Rightarrow \int_0^R 2.\pi .r^3 dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr \Rightarrow 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$I_{pol} = Iy + Iz$$

$$Iz = Iy = \frac{1}{2} I_{pol} = \frac{\pi}{64} D^4$$

Of

$$Iz = \frac{\pi}{4} R^4$$

Het polair traagheidsmoment t.o.v. O (figuur 01):

$$I_{pol} = \int r^2 dA$$

Is ook te schrijven als:

$$I_{pol} = Iy + Iz$$

Want:

$$r^2 = z^2 + y^2$$

$$\int r^2 dA = \int y^2 dA + \int z^2 dA \Leftrightarrow I_p = I_y + I_z$$

Verschuivingsregel van Steiner

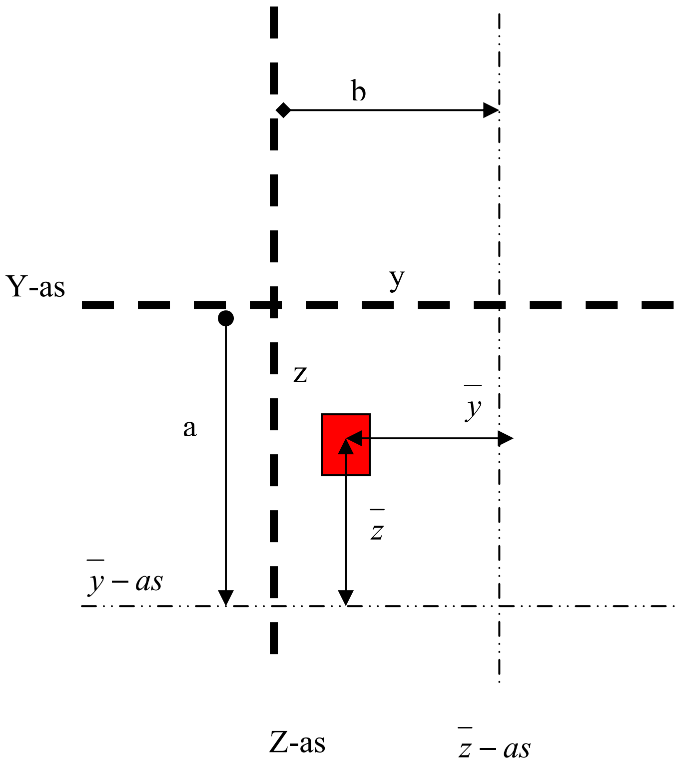
Willen we een doorsnede uit verschillende basisvormen samenstellen, dan weten we het traagheidsmoment van de basisvorm t.o.v. het eigen zwaartepunt. Het traagheidsmoment van het totaal is dan nog niet bekend.

Om nu het traagheidsmoment van het totaal te kunnen berekenen, ga je als volgt te werk.

01. Bepaal het zwaartepunt van de samengestelde constructie
02. Bepaal de arm van het deelzwaartepunt tot het gezamenlijk zwaartepunt (translatie)
03. Bepaal het getransleerde traagheidsmoment

Onderstaand figuur 04:

Y – Z → orthogonaal assenstelsel
$\bar{y} - \bar{z}$ → verschoven assenstelsel



Figuur 04

$$S_{\bar{y}} = \int \bar{z} dA \Rightarrow \int (z-a) dA \Rightarrow \int z dA - a \int dA \Rightarrow S_y - a * A$$

Evenzo;

$$S_{\bar{z}} = S_z - b * A$$

Voor het traagheidsmoment geldt:

$$I_{\bar{y}} = \int (\bar{z})^2 dA \Rightarrow \int (z-a)^2 dA \Rightarrow \int z^2 dA - 2*a\int z dA + a^2 \int dA = I_y - 2*a*S_y + a^2 * A$$

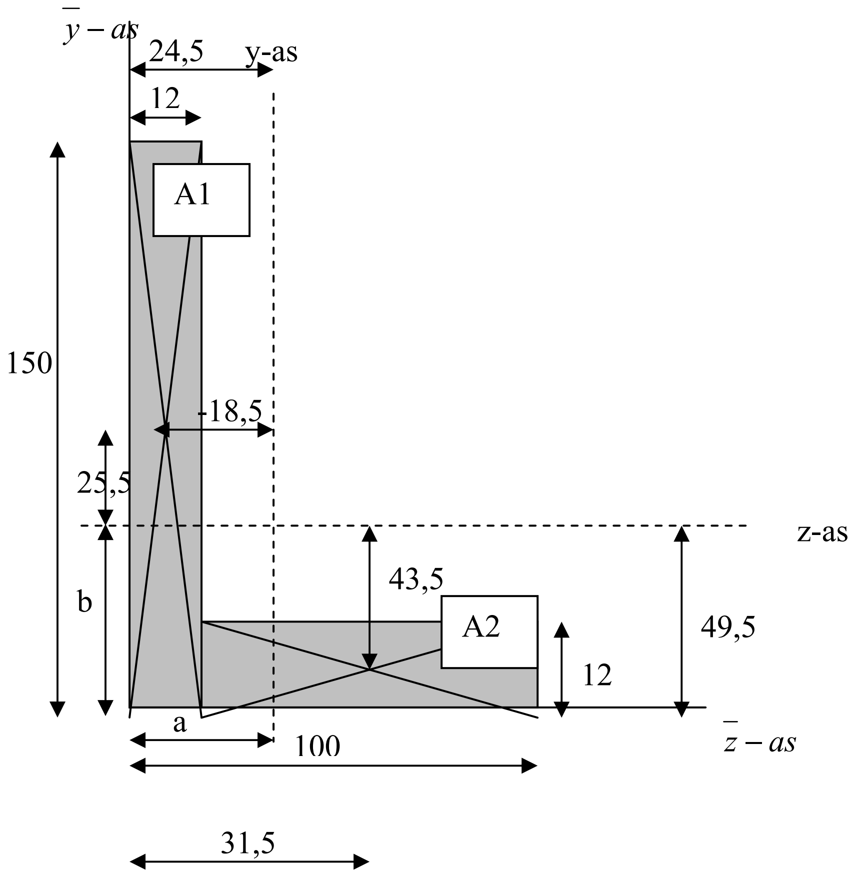
Sy en Sz = 0, als men van de eigen assen uitgaat, waarbij de vergelijking dan overgaat in:

$$I_{\bar{y}} = I_y + a^2 * A$$

En

$$I_{\bar{z}} = I_z + b^2 * A$$

<u>Voorbeeld#1</u>



Figuur 05

Gevraagd: $I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}, I_y, I_z$

Oplossing:

Atot = A1 + A2

Atot = (150 * 12) + (88 * 12) = 1800 + 1056 = 2856

Statisch moment t.o.v. de y-as

Sy = (A1 * y1) + (A2 * y2) = (1800 * 75) + (1056 * 6) = 135000 + 6336 = 141336

y = Sy / Atot = 141336 / 2856 = 49,5

a1 = 75 – 49,5 = 25,5
a2 = 6 – 49,5 = -43,5

Statisch moment t.o.v. de z-as

Sz = (A2 * z1) + (A2 * z2) = (1800 * 6) + (1056 * 56) = 10800 + 59136 = 69936

z = Sz / Atot = 69936 / 2856 = 24,5

a1 = 6 – 24,5 = -18,5
a2 = 56 – 24,5 = 31,5

Eigen traagheidsmoment t.o.v. de y-as

$$I_{y1,eigen} = \frac{1}{12} * b * h^3 = \frac{1}{12} * 12 * 150^3 = 3375000 mm^4$$

$$I_{y2,eigen} = \frac{1}{12} * b * h^3 = \frac{1}{12} * 88 * 12^3 = 12672 mm^4$$

Eigen traagheidsmoment t.o.v. de z -as

$$I_{z1,eigen} = \frac{1}{12} * b * h^3 = \frac{1}{12} * 150 * 12^3 = 21600 mm^4$$

$$I_{z2,eigen} = \frac{1}{12} * b * h^3 = \frac{1}{12} * 12 * 88^3 = 681472 mm^4$$

Traagheidsmoment t.o.v. de $\bar{y}-as$ (verschuiving van Steiner)

$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{12} * b * h^3 + a^2 A + \frac{1}{12} * b * h^3 + a^2 A$$

$$I_{\bar{y}} = 3375000 + 75^2 * 1800 + 12672 + 6^2 * 1056 = 13{,}6 * 10^6 \, mm^4$$

Traagheidsmoment t.o.v. de $\bar{z}-as$ (verschuiving van Steiner)

$$I_{\bar{z}} = 21600 + 6^2 * 1800 + 681472 + 56^2 * 1056 = 4{,}08 * 10^6 \, mm^4$$

Traagheidsmoment van het totaal

$$I_y = \frac{1}{12} * b * h^3 + a^2 A + \frac{1}{12} * b * h^3 + a^2 A$$

$$I_y = 3375000 + (25{,}5)^2 * 1800 + 12672 + (43{,}5)^2 * 1056 = 4545450 + 2010888 = 6556338 = 6{,}56 * 10^6 \, mm^4$$

$$I_z = 21600 + (18{,}5)^2 * 1800 + 681472 + (31{,}5)^2 * 1056 = 637650 + 1729288 = 2366938 = 2{,}37 * 10^6 \, mm^4$$

Of

$$I_{\bar{y}} = I_y + b^2 * A$$

$$I_y = I_{\bar{y}} - b^2 * A = 13{,}6 * 10^6 - (150 * 12 + 88 * 12) * 49{,}5^2 = 6{,}56 * 10^6 \, mm^4$$

$$I_{\bar{z}} = I_z + a^2 * A$$

$$I_z = I_{\bar{z}} - a^2 * A = 4{,}08 * 10^6 - (150 * 12 + 88 * 12) * 24{,}5^2 = 2{,}37 * 10^6 \, mm^4$$

Traagheidsprodukt

$$I_{yz} = (I_{yz})_1 + (I_{yz})_2$$

$$= (0 + 1800 * (-18{,}5) * (25{,}5)) + (0 + 1056 * (31{,}5) * (-43{,}5)) = -2{,}3 * 10^6 \, mm^4$$