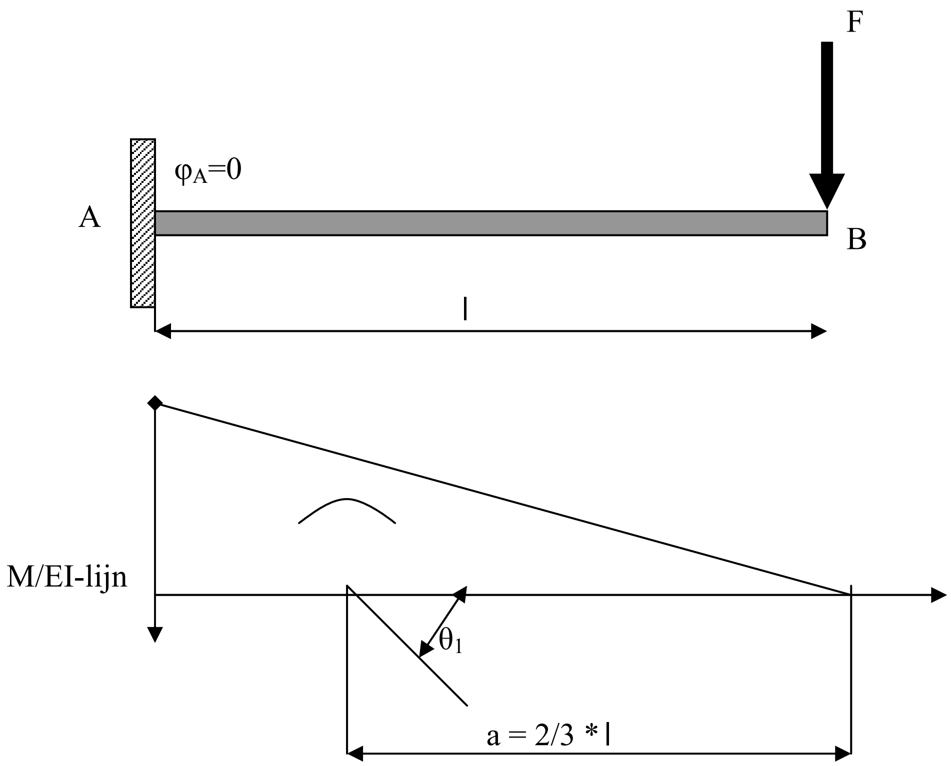
Week 08 - ribWBKII

Theorie: Integraalrekening
Onderwerp: Kromming, zakking en hoekverandering

Zakking voor een puntlast op een uitkragende ligger



$$\frac{M_{max}}{EI} = \frac{-Fl}{EI}$$

$$opperlvlakte = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

De hoekverandering in punt B is nu;

$$\varphi_B = \varphi_A + oppervlakte \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} \qquad \text{(in radialen)}$$

Belangrijk is dat de richting van het hoekje θ1 op de juiste manier wordt aangegeven. Bij een positief moment werkt het hoekje als een knikje naar boven.

Bij een negatief moment (zoals hierboven0 werkt het hoekje als een knikje naar beneden.
Knikje naar beneden dan zakking positief
Knikje naar boven dan zakking negatief

Voor de zakking in punt B passen we nu de 2e stelling van het gereduceerd momentenvlak toe.

Knikje omlaag dus hoek negatief en zakking positief

$$\varphi_B = -\theta_1 = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

$$\omega_B = \frac{\frac{1}{2}Fl^2\,\frac{2}{3}l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

<u>Opgave#1</u>

<u>Gegeven</u>
Uitkragende ligger met puntlast
Lengte = 6 meter
Kracht = 5 kN
E = 210.000 N/mm^2
Iy = 934 * 10^4 mm^4

<u>Gevraagd</u>
01. Oppervlakte momentenlijn
02. Zwaartepunt
03. Dwarskrachtenlijn
04. Momentenlijn
05. Hoekverandering
06. Zakking
07. Zakkingslijn

Oplossing

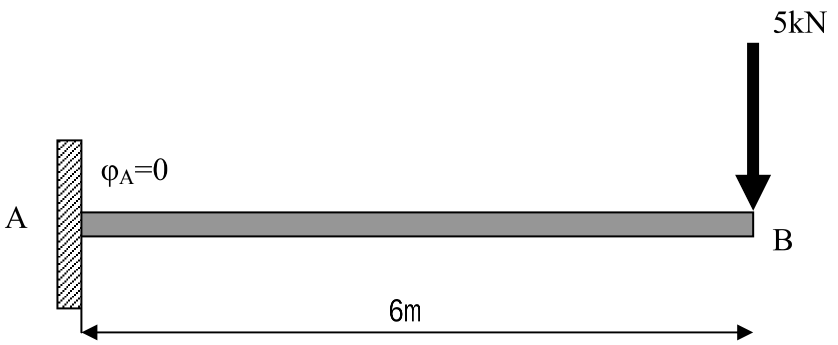
Som van de Momenten t.o.v. A = 0

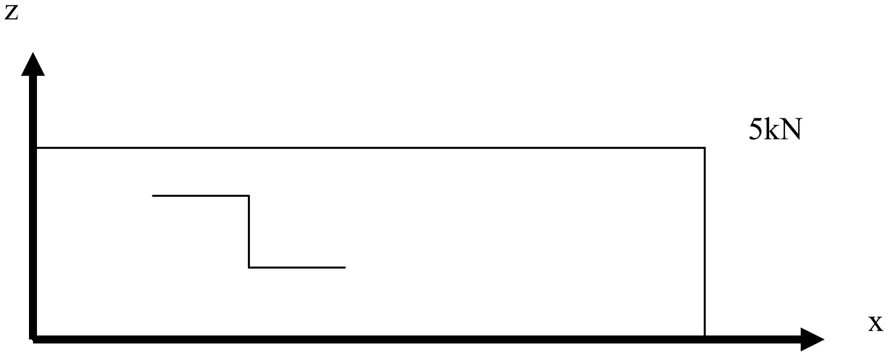
$$-F * l + M = 0$$

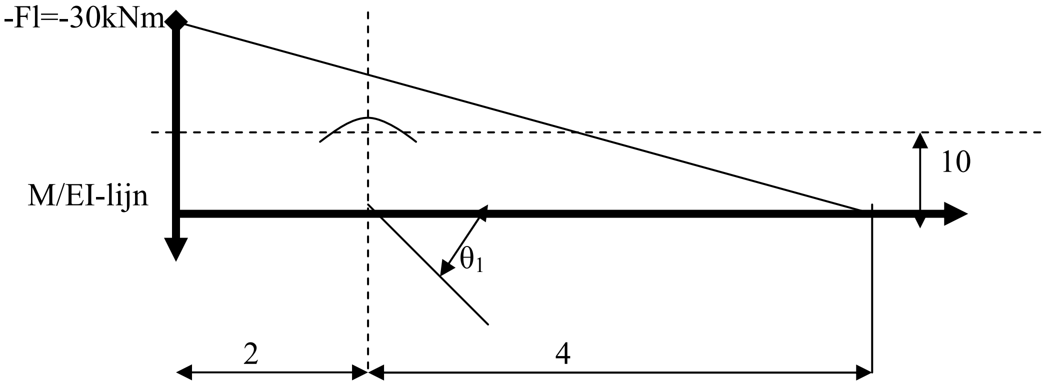
$$M = -5 * 6 = -30kNm$$

Som van de verticale krachten = 0

$-Fav + F = 0$ → Fav = - 5kN







<u>Bepaling oppervlakte momentenlijn</u>

$z = ax^2 + b$ → a=30/6 = 5 → $f(z) = -5x + 30$

$$O_{0,6} = \int_0^6 (-5x + 30)dx = \left[2{,}5x^2 + 30x\right]_0^6 = 2{,}5 * 36 + 180 = 90$$

<u>Bepaling oppervlakte momentenlijn</u>

Statisch moment t.o.v. de z-as

$$S_z = \int_0^6 x*(-5x+30)dx = \int_0^6 (-5x^2+30x)dx = \left[-1\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}30x^2\right]_0^6 = 180$$

$$x = \frac{Sz}{Atot} = \frac{180}{90} = 2$$

Statisch moment t.o.v. de y-as

$$x = -\frac{1}{5}z + 6$$

$$S_y = \int_0^{30} z*(-\frac{1}{5}z+6)dz = \int_0^{30} (-\frac{1}{5}z^2+6z)dz = \left[-\frac{1}{15}z^3 + 3z^2\right]_0^{30} = 900$$

$$z = \frac{S_y}{Atot} = \frac{900}{90} = 10$$

<u>Bepaling van de hoekverandering</u>

$$\frac{M_{\max}}{EI} = \frac{-Fl}{EI}$$

$$opperlvlakte = \frac{1}{2}Fl^2 = \frac{1}{2}*5*36 = 90$$

$$\theta_1 = -\frac{\frac{1}{2}Fl^2*l}{EI} = -\frac{\frac{1}{2}Fl^2}{EI} = -\frac{90}{EI}$$

De hoekverandering in punt B is nu;

$$\varphi_B = \varphi_A - \theta_1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} = -\frac{90}{EI} \quad \text{(in radialen)}$$

$$EI = (210*10^6)*(934*10^{-8}) = 1961{,}4$$

$$\varphi_B = \frac{90}{1961{,}4} = 0.0459$$

Belangrijk is dat de richting van het hoekje θ1 op de juiste manier wordt aangegeven.
Bij een positief moment werkt het hoekje als een knikje naar boven.
Bij een negatief moment (zoals hierboven0 werkt het hoekje als een knikje naar beneden.
Knikje naar beneden dan zakking positief
Knikje naar boven dan zakking negatief

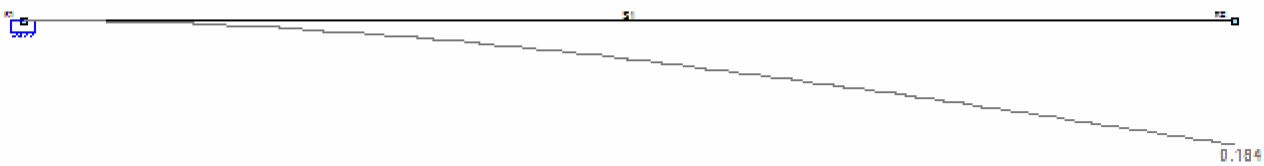
Voor de zakking in punt B passen we nu de 2e stelling van het gereduceerd momentenvlak toe.

Knikje omlaag dus hoek negatief en zakking positief

$$\varphi_B = -\theta_1 = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

$$\omega_B = \frac{\frac{1}{2}Fl^2 \frac{2}{3}l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{5*6^3}{3EI} = \frac{360}{EI}$$

$$\omega_B = \frac{360}{1961.4} = 0.184m = 184mm$$



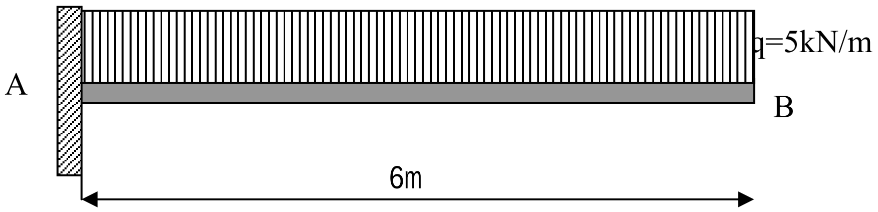
Opgave#2

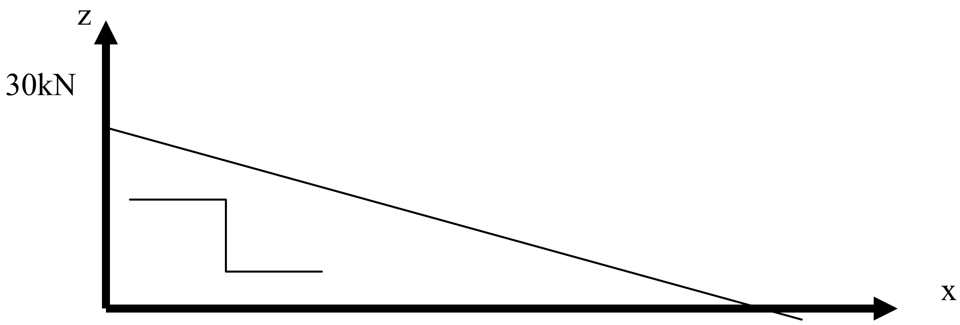
Gegeven
Uitkragende ligger met gelijkmatig verdeelde belasting
Lengte = 6 meter
q = 5 kN/m
E = 210.000 N/mm^2
Iy = 934 * 10^4 mm^4

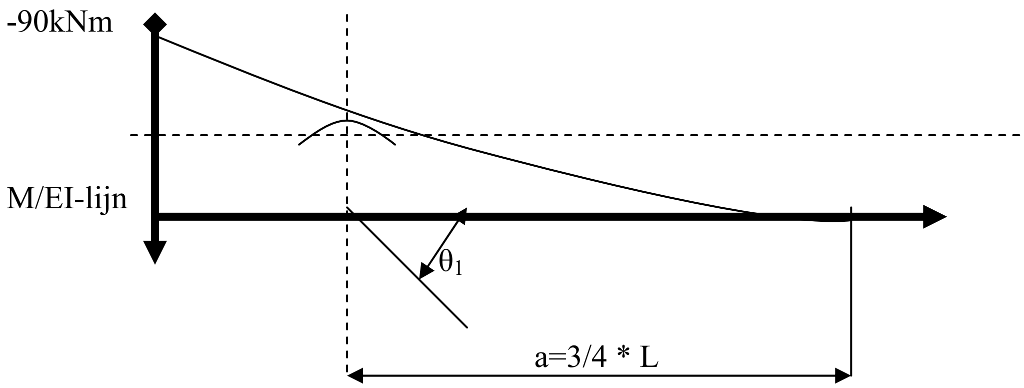
Gevraagd

01.Dwarskrachtenlijn
02.Momentenlijn
03.Hoekverandering
04.Zakking
05.Zakkingslijn

Oplossing







Bepaling van de hoekverandering

$$\frac{M_{\max}}{EI} = \frac{-\frac{1}{2}ql^2}{EI} = -\frac{\frac{1}{2}*5*6^2}{EI} = -\frac{90}{EI}$$

$$opperlvlakte = \frac{1}{3}*\frac{1}{2}ql^2*l = \frac{ql^3}{6} = \frac{5*6^3}{6} = 180$$

$$\theta_1 = -\frac{\frac{1}{3}*\frac{1}{2}*ql^2*l}{EI} = -\frac{\frac{1}{6}ql^3}{EI} = -\frac{180}{EI}$$

De hoekverandering in punt B is nu;

$$\varphi_B = \varphi_A - \theta_1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{3}\frac{M_{\max}*l}{EI} = -\frac{180}{EI} \qquad \text{(in radialen)}$$

$$EI = (210*10^6)*(934*10^{-8}) = 1961{,}4$$

$$\varphi_B = \frac{180}{1961{,}4} = 0.0918$$

Belangrijk is dat de richting van het hoekje θ1 op de juiste manier wordt aangegeven.
Bij een positief moment werkt het hoekje als een knikje naar boven.
Bij een negatief moment (zoals hierboven0 werkt het hoekje als een knikje naar beneden.
Knikje naar beneden dan zakking positief
Knikje naar boven dan zakking negatief

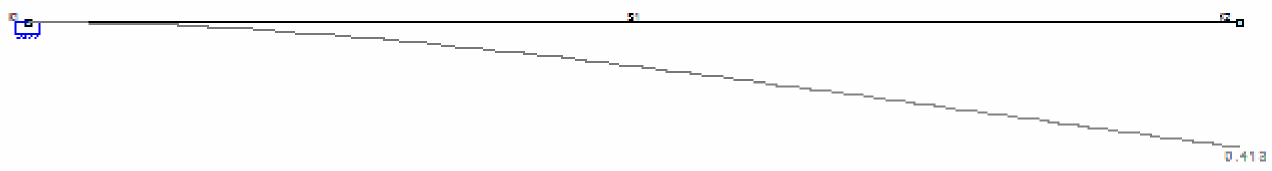
Voor de zakking in punt B passen we nu de 2e stelling van het gereduceerd momentenvlak toe.

Knikje omlaag dus hoek negatief en zakking positief

$$\varphi_B = -\theta_1 = -\frac{ql^3}{6EI}$$

$$\omega_B = \frac{\frac{1}{6}ql^3\,\frac{3}{4}l}{EI} = \frac{ql^4}{8EI} = \frac{5*6^4}{8EI} = \frac{810}{EI}$$

$$\omega_B = \frac{810}{1961.4} = 0.413m = 413mm$$



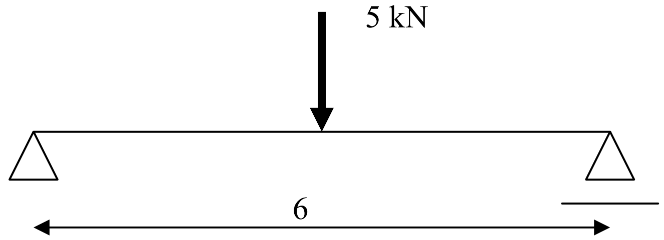
Opgave#3

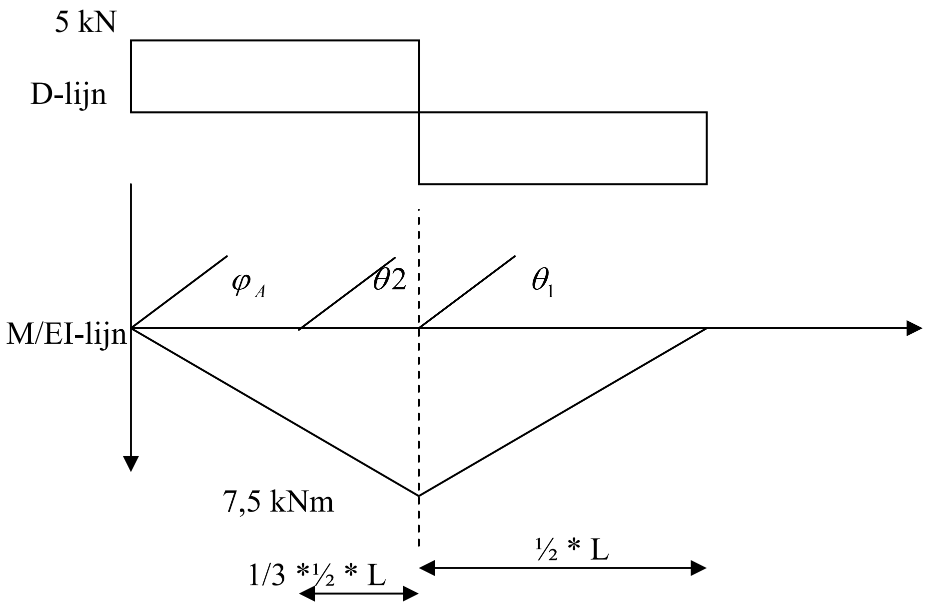
Gegeven

Uitkragende ligger met puntlast
Lengte = 6 meter
Kracht = 5 kN
E = 210.000 N/mm^2
Iy = 934 * 10^4 mm^4

Gevraagd

01.Dwarskrachtenlijn
02.Momentenlijn
03.Hoekverandering
04.Zakking
05.Zakkingslijn





Randvoorwaarden: zakking in A en B is nul
Knikje positief dus zakking is negatief

$$oppervlakte = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} Fl \quad * l = \frac{Fl^2}{8}$$

$$\theta_1 = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{4} Fl * \frac{1}{2} l}{EI} = \frac{Fl^2}{16EI} = \frac{5*36}{16EI} = \frac{11{,}25}{EI} = \frac{11{,}25}{1961{,}4} = 0.0057$$

Bepalen van de hoekverdraaiing (knikje positief zakking negatief)

$\omega_B = 0$

2e Stelling

$$\omega_B = -\varphi_A * l - \theta_1 * \frac{1}{2} l \Rightarrow \varphi_A = -\frac{\theta_1 * \frac{1}{2} l}{l} = -\frac{Fl^2}{16EI} = -\frac{5*36}{16EI} = -\frac{11{,}25}{EI} = -\frac{11{,}25}{1961{,}4} = -0.057$$

$\varphi_B = -\varphi_A = 0.057$

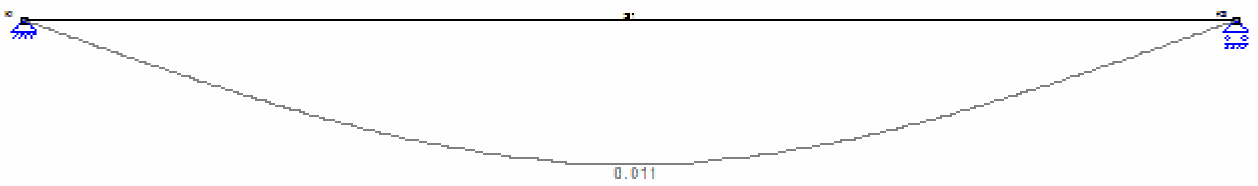
Zakking in het midden

Hiervoor moet het statisch moment van het gereduceerd oppervlak tussen A en het midden worden bepaald.

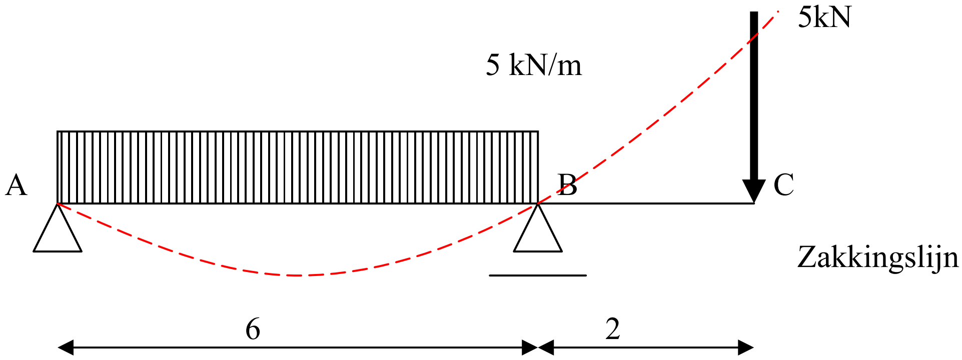
$$\theta_2 = \frac{Fl^2}{8EI} = \frac{5*36}{8EI} = \frac{22{,}5}{EI} = \frac{22{,}5}{1961{,}4} = 0.0115$$

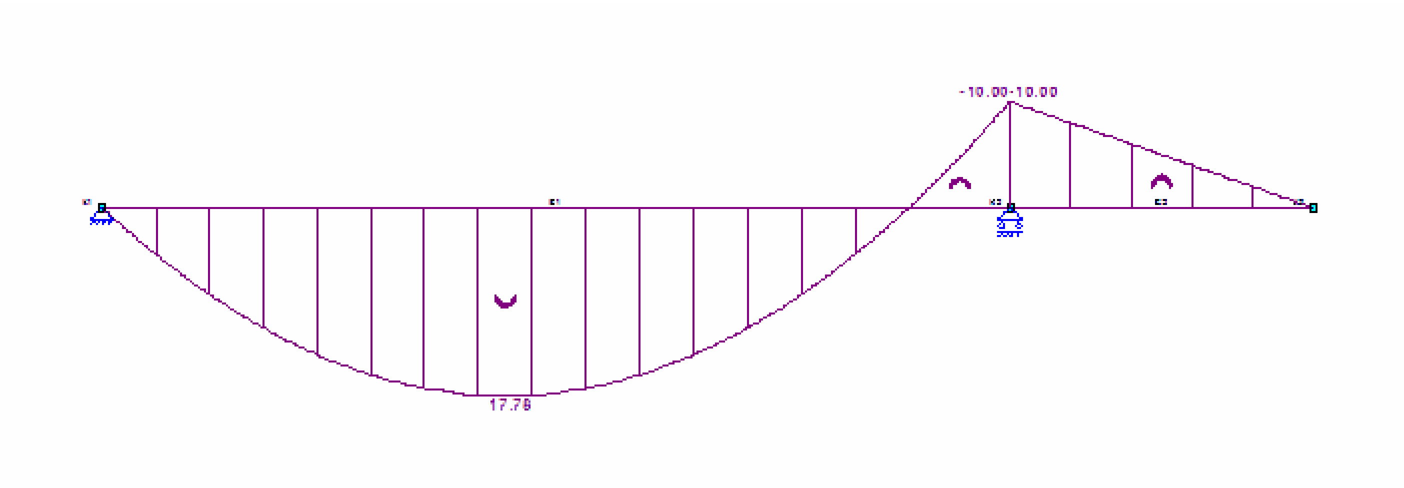
$$\omega_{midden} = --\varphi_A * \frac{1}{2} l - \theta_2 * \frac{1}{6} l = --\frac{Fl^2 * \frac{1}{2} l}{16EI} - \frac{Fl^2 * \frac{1}{6} l}{16EI} = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{5*6^3}{48EI} = \frac{22.5}{EI}$$

$$\omega_{midden} = \frac{22.5}{1961{,}4} = 0{,}0115m = 11{,}5mm$$



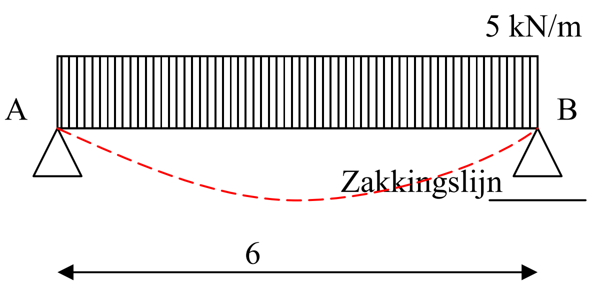
<u>Opgave#4</u>
E=210000 N/mm2
I=934 * 10^4 mm^4





Oplossing
Toepassen van de “Vergeet-Mij-Nietjes”. (zie bijlage)

Deel A-B



Hoekverandering in B

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI} = \frac{5*6^3}{24*1961{,}4} = 0{,}023 rad$$

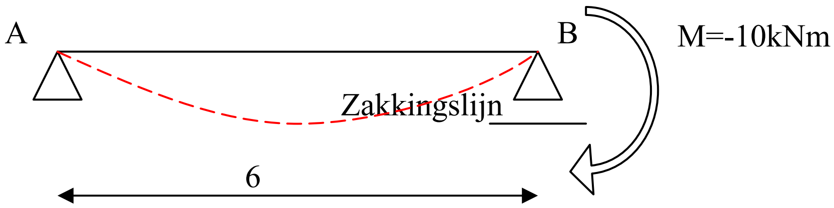
Zakking in het midden

$$\omega_{midden} = -\frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5*5*6^4}{384*1961{,}4} = 0{,}043m = -43mm$$

Moment op B door kracht 5 kN

$$-5kN*2m + M = 0 \Rightarrow M = 10kNm$$

Deel A-B



Hoekverandering in B

$$\varphi_B = \frac{Ml}{3EI} = \frac{-10*6}{3*1961{,}4} = -0{,}01 rad$$

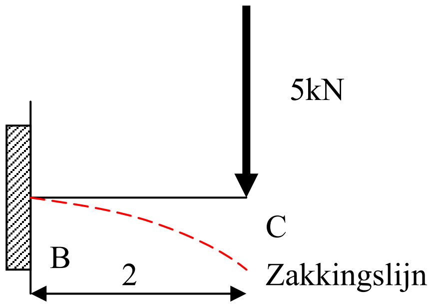
Zakking in midden door Moment

$$\omega_{midden} = \frac{Ml^2}{16EI} = -\frac{10*36}{16*1961{,}4} = 0{,}011m = 11mm$$

Totale zakking in het midden door gelijkmatige belasting en het Moment t.b.v. puntlast

$$\omega_{midden.totaal} = -43 + 11 = -32mm$$

<u>Deel B-C</u>



Totale hoekverdraaiing in B

$$\varphi_B = 0{,}023 - 0{,}01 = 0{,}013 rad$$

Zakking in C

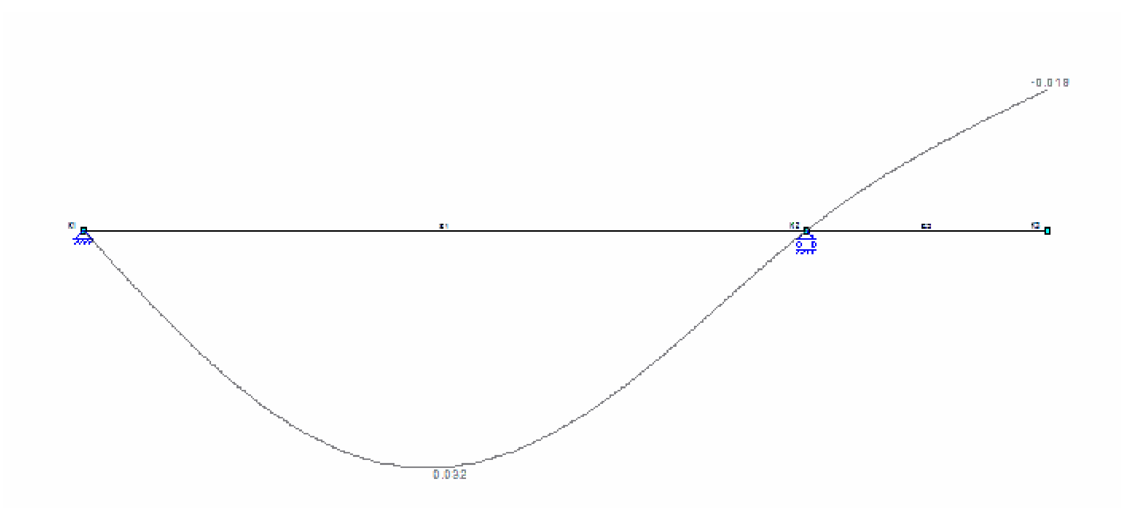
$$\omega_C = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{5*2^3}{3*1961{,}4} = 0{,}007m = -7mm$$

Statisch moment t.o.v. C

$$\varphi_B * l = 0{,}013*2 = 0{,}026m = 26mm$$

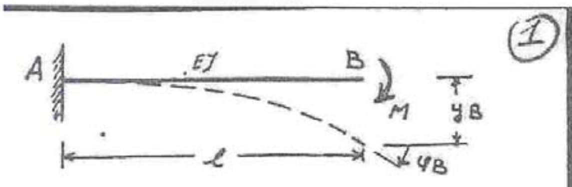
Zakking in C

$$= 26 - 7 = 19mm$$



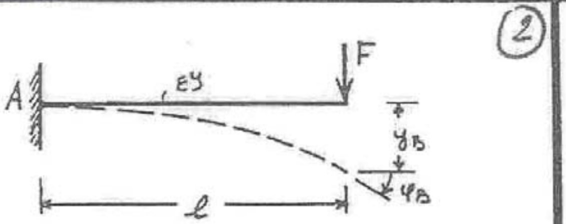
Bijlage

1



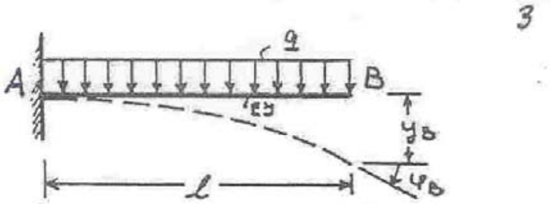
$\varphi_B = \frac{M.\ell}{EJ}$; $y_B = \frac{M.\ell^2}{2EJ}$

2



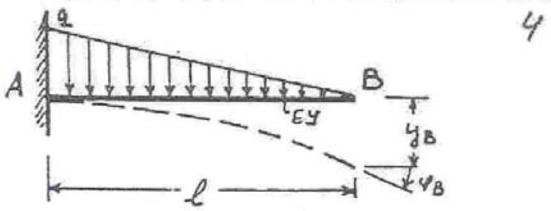
$\varphi_B = \frac{F.\ell^2}{2EJ}$; $y_B = \frac{F.\ell^3}{3EJ}$

3



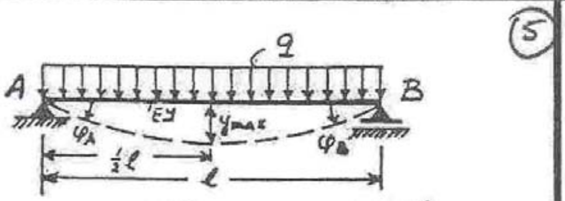
$\varphi_B = \frac{q\ell^3}{6EJ}$; $y_B = \frac{q\ell^4}{8EJ}$

4



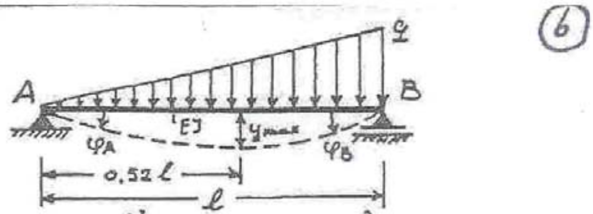
$\varphi_B = \frac{q\ell^3}{24EJ}$; $y_B = \frac{q\ell^4}{30EJ}$

5



$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{q\ell^3}{24EJ}$; $y_{max} = \frac{5q\ell^4}{384EJ}$

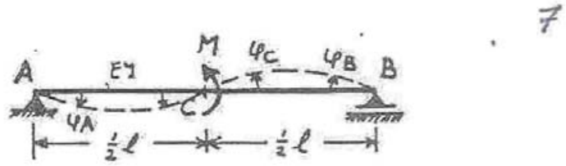
6



$\varphi_A = \frac{7q\ell^3}{360EJ}$; $\varphi_B = \frac{-8q\ell^3}{360EJ}$

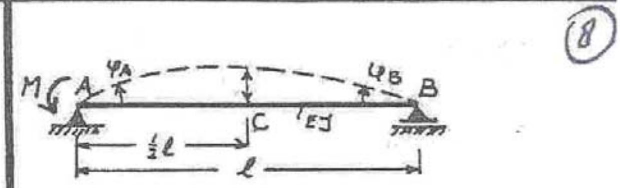
$y_{max} = \frac{0,0065\,q\ell^4}{EJ}$

7



$\varphi_A = \varphi_B = \frac{M.\ell}{24EJ}$; $\varphi_C = -\frac{M.\ell}{12EJ}$

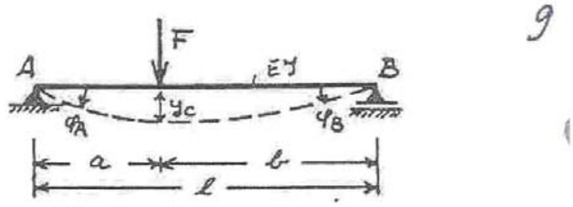
8



$\varphi_A = -\frac{M.\ell}{3EJ}$; $\varphi_B = \frac{M.\ell}{6EJ}$

$\varphi_C = \frac{M.\ell}{24EJ}$; $y_C = \frac{M.\ell^2}{16EJ}$

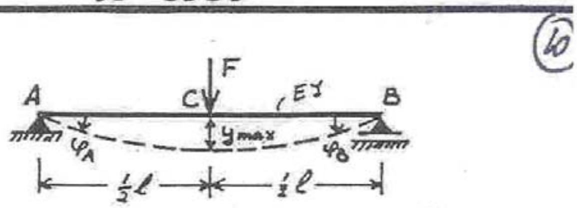
9



$\varphi_A = \frac{F.a.b}{6\ell EJ}(\ell+b)$; $\varphi_B = -\frac{F.a.b}{6\ell EJ}(\ell+a)$

$y_C = \frac{F.a^2b^2}{3\ell EJ}$

10



$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{F.\ell^2}{16EJ}$; $y_{max} = \frac{F.\ell^3}{48EJ}$