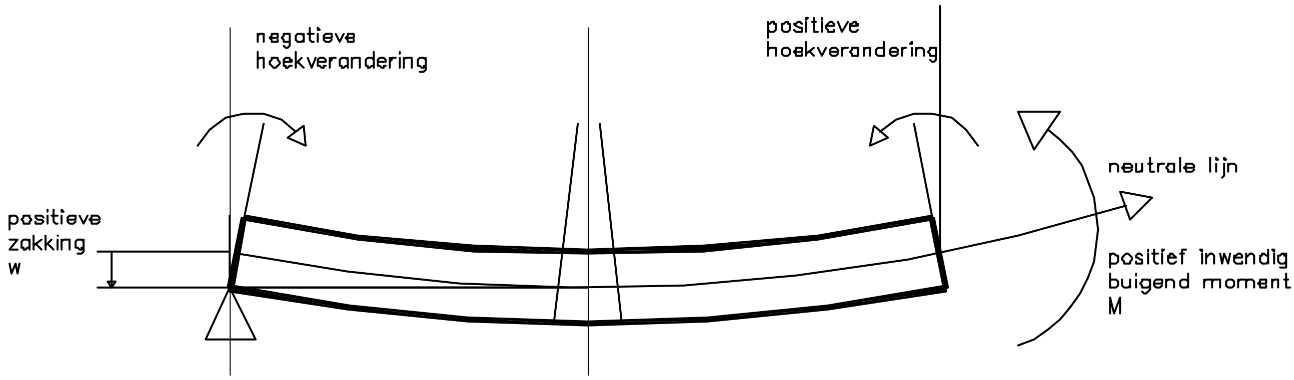
Week 07 - ribWBKII

Theorie: Integraalrekening
Onderwerp: Kromming, zakking en hoekverandering



Door een belasting zal op ieder punt in de balk een zakking ontstaan, hierdoor ontstaan t.p.v. de opleggingen hoekveranderingen.

Iedere dwarsdoorsnede van de balk zal een klein beetje verdraaien, in de balk ontstaat dan een kromming.

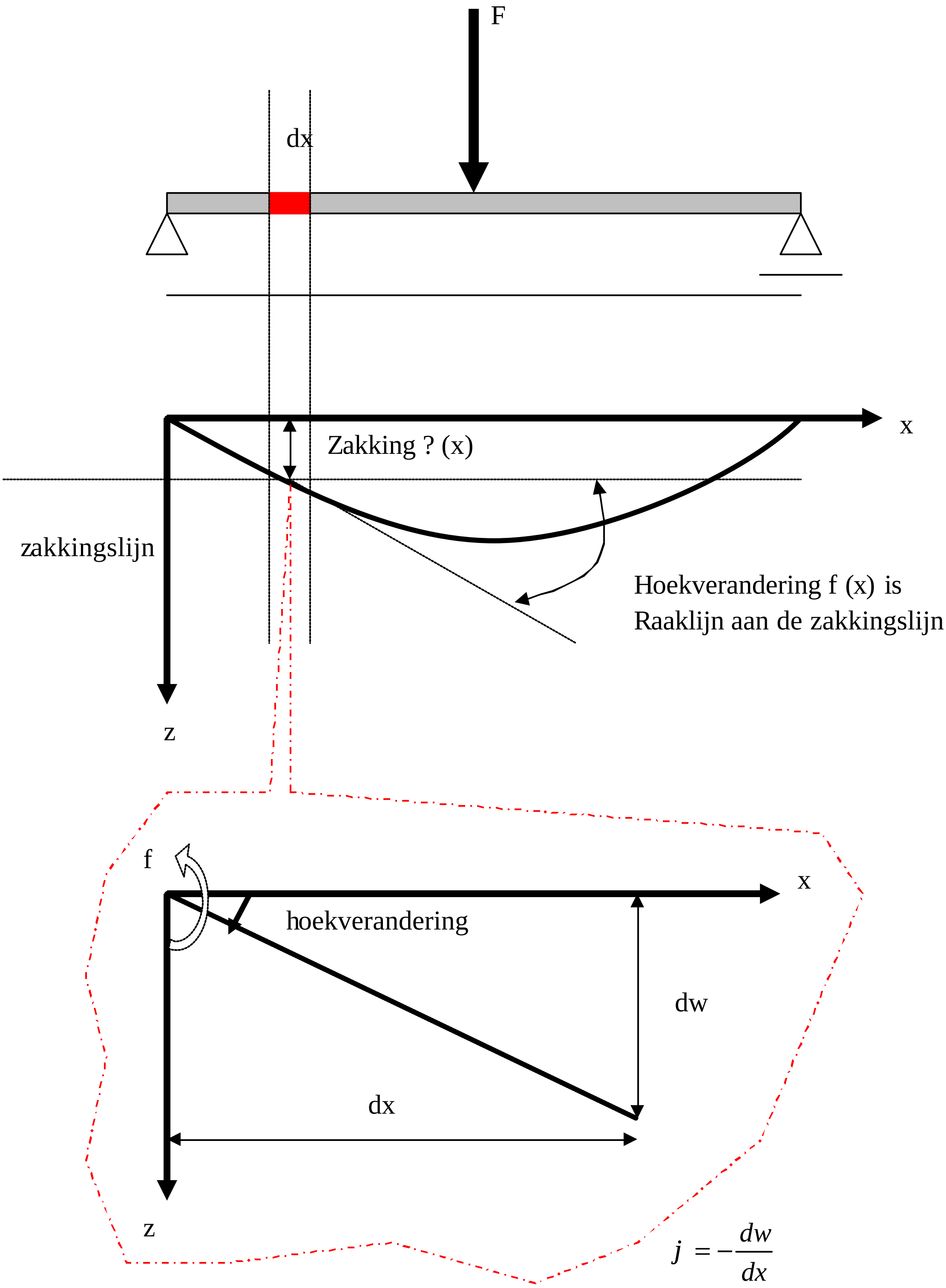
Door deze kromming zal aan de onderzijde trek en aan de bovenzijde druk optreden.
Hierdoor ontstaan momenten in de ligger.

Het verschil in draaiing van twee opeenvolgende doorsneden is een maat voor de kromming.

Relaties

- **Kinematische relatie** = het verband tussen verplaatsing en vervorming (hoekverandering en zakking – kromming)
- **Constitutieve relatie** = het verband tussen vervorming en inwendige krachten (kromming – moment en dwarskracht)
- **Evenwichts relatie** = het verband tussen inwendige krachten en belasting (moment en dwarskracht – belasting)

Kinematische relatie (verband tussen verplaatsing en kromming)



$$j = -\frac{dw}{dx}$$

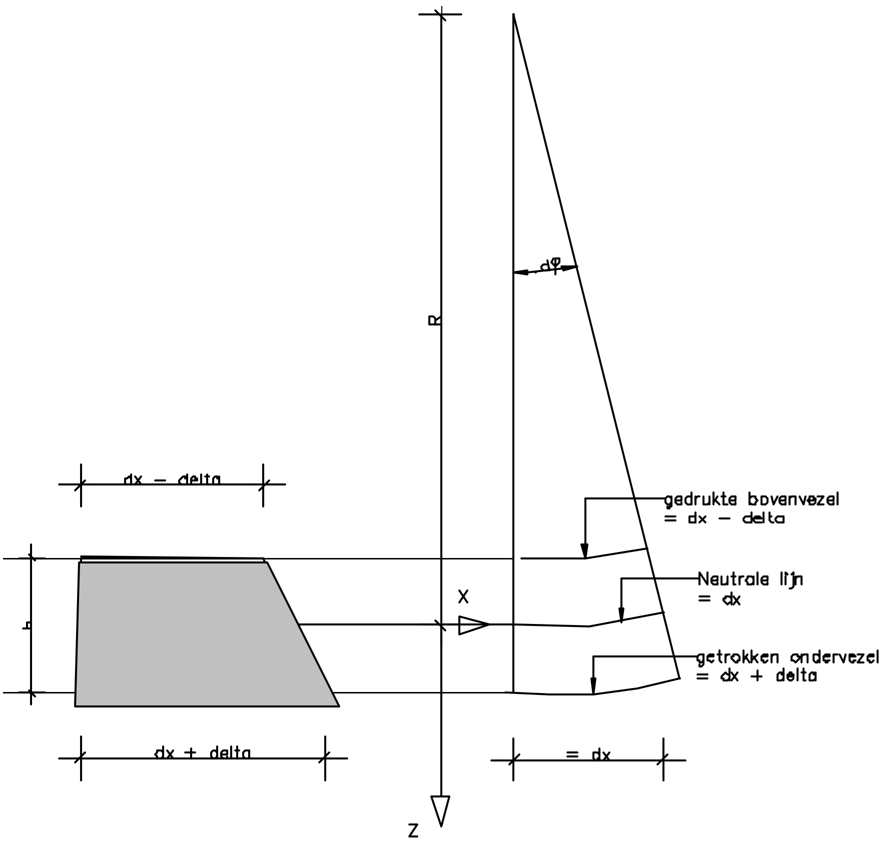
Bij een positieve zakking dw over en kleine afstand dx zal de liggeras roteren over een kleine hoek.

Het verband tussen rotatie en zakking is dan

$$j = -\frac{dw}{dx}$$

De rotatie draait tegen de positieve afspraak in (min-teken).

De hoekverandering is dus de afgeleide van de zakking, deze hoekverandering is gelijk aan de R.C en geeft dus de richtingsverandering aan als raaklijn aan de kromming in het beschouwde punt



R heet de kromtestraal en geeft aan hoe sterk de ligger vervormd is.
De kromming van een ligger wordt ook aangeduid met ? (kappa).

Het verband tussen kromming en kromtestraal is

$$k = \frac{1}{R}$$

Uit bovenstaand figuur blijkt

$$dj = \tan .dj = \frac{dx}{R}$$

Dan is

$$k = \frac{dj}{dx} = \frac{1}{R}$$

Het verband tussen de hoekverandering f en de kromming ?

De kromming is de afgeleide van de hoekverandering

$$k = \frac{dj}{dx} \quad \text{met} \quad j = -\frac{dw}{dx}$$

Indien we de hoekverandering aan beide zijden van het =-teken differentiëren;

$$\frac{dj}{dx} = -\frac{d}{dx} * \left(\tfrac{dw}{dx}\right) = -\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (2^e \text{ orde})$$

Dus:

$$k = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

Definitie
De kromming is gelijk aan de afgeleide van de hoekveranderingsfunctie en is dus gelijk aan de helling van de raaklijn aan de hoekveranderingsfunctie in het beschouwende punt.

Verband tussen rek en kromming

De uiterste vezel heeft op een afstand z vanaf de neutrale lijn een lengte van

dx + ?

uit gelijkvormigheid van figuur 02

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx + \Delta}{R + z}$$

Kruislings vermenigvuldigen geeft dan

$$R\Delta + Rdx = Rdx + zdx \Leftrightarrow \Delta = \frac{zdx}{R}$$

$$e(z) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta}{dx} = \frac{zdx}{Rdx} = \frac{z}{R} = \frac{1}{R} * z = k * z$$

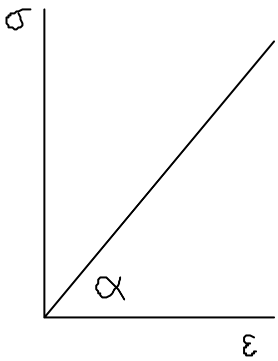
Dus:

De rek op een afstand z vanaf de neutrale lijn is evenredig met de afstand tot de neutrale lijn. De mate waarin de rek toeneemt, wordt bepaald door de kromming (?)

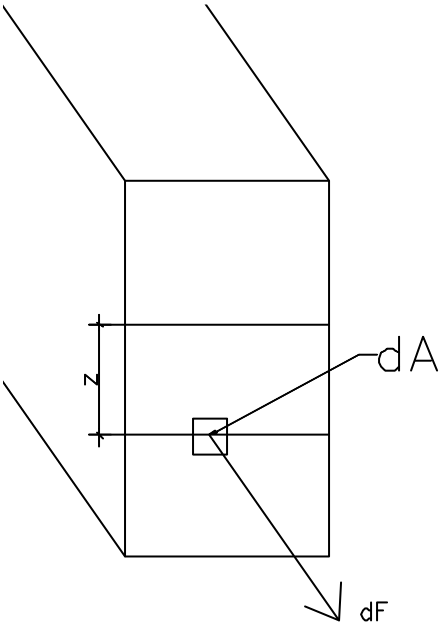
$e(rek) = k * z$

Constitutieve relatie (verband tussen kromming en moment)

Als de rek voor ieder vezeltje bekend is dan is ook de spanning voor ieder vezeltje bekend. Bij een lineair verband tussen spanning en rek geldt immers de wet van Hooke $\left(\Delta l = \frac{F * l}{EA} \right)$



$$\tan a = E = \frac{s}{e}$$



$dF = s dA$ en $dM = z dF$

De momentsom van alle vezelkrachten t.o.v. de neutrale lijn moet gelijk zijn aan het inwendige moment in de ligger.

Dus

$$M = \int_A dM = \int_A z dF = \int_A z * s dA$$

Met $E = \frac{s}{e}$ en $e(rek) = k * z$ → $s = E * k * z$ (met E en ? als constanten)

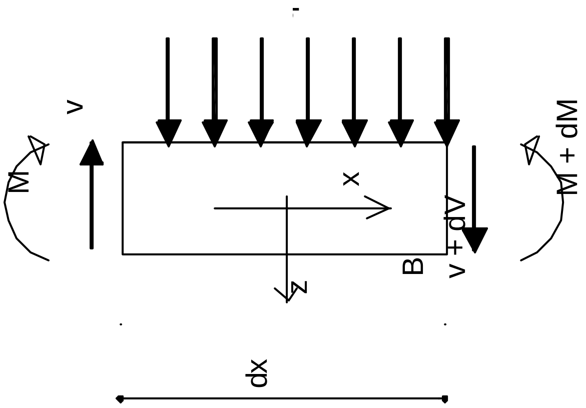
$M = E * k * \int_A z^2 dA$ met $I = \int_A z^2 * dA$ (uit lesweek 06)

Dus

$M = EI * k$

De kromming is dus rechtevenredig met de grootte van het moment.
(Het produkt EI wordt de buigstijfheid genoemd)

Evenwichtsrelatie (Verband tussen moment en belasting)



De belasting is de afgeleide van de dwarskracht (lesweek 05)

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

De dwarskracht is de afgeleide van het moment (lesweek 05)

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

Indien we de dwarskrachtfunctie aan beide zijden van het =-teken nogmaals differentiëren dan,

$$\frac{d}{dx} * \frac{dM(x)}{dx} = \frac{dV(x)}{dx} \Leftrightarrow \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx}$$

Basisformule (verband moment en belasting)

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

Buigingstheorie

Zakking w

Kinematische relatie $k = -\dfrac{d^2w}{dx^2}$

Kromming ?

Constitutieve relatie $M = EI * k$

Moment M

Evenwichtsrelatie $\dfrac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$

Belasting q

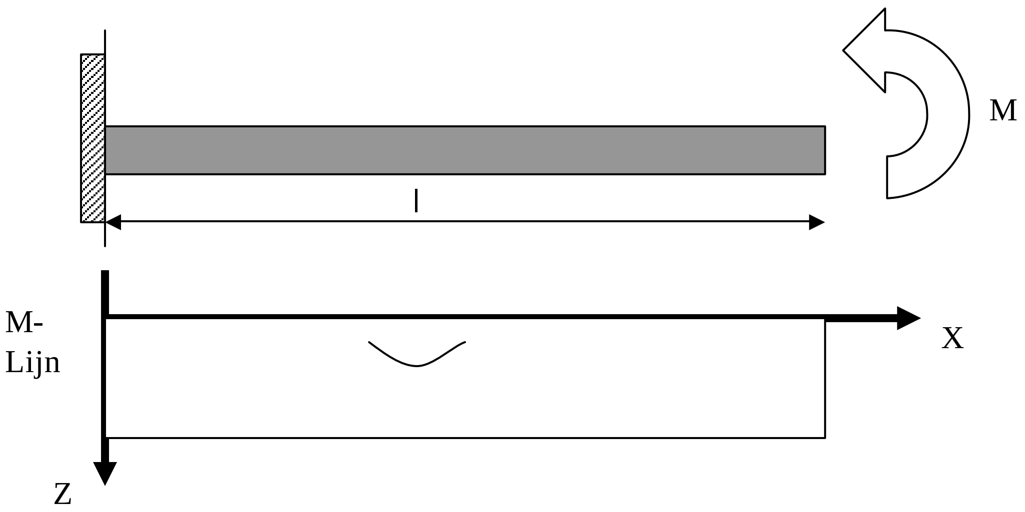
$$k = \frac{dj}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow dj = \frac{M}{EI}dx \Rightarrow j = \int \frac{M}{EI}dx$$

$$\frac{dw}{dx} = -j \Rightarrow dw = -j\,dx \Rightarrow w = -\int j\,dx$$

Dus

$j = \int \dfrac{M}{EI}dx$ en $w = -\int j\,dx$

Voorbeeld#1 (uitkragende ligger)



$$j(x) = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{M}{EI} * x + C_1$$

$$w(x) = -\int j\, dx \;\rightarrow\; w(x) = -\int \frac{M}{EI} * x + C_1 = -\frac{1}{2}\frac{M * x^2}{EI} - C_1 x + D$$

Uit de randwaarden weten we dat t.p.v. de inklemming (x=0) de hoekverandering en de zakking nul zijn.

Dus zijn de integratieconstanten C en D ook nul

Hiermee liggen de zakkingslijn w(x) en de hoekverandering f (x) vast.

<u>Voor l = x</u>

$$w(x) = -\frac{1}{2}\frac{M * x^2}{EI}$$

en

$$j(x) = \frac{M * x}{EI}$$

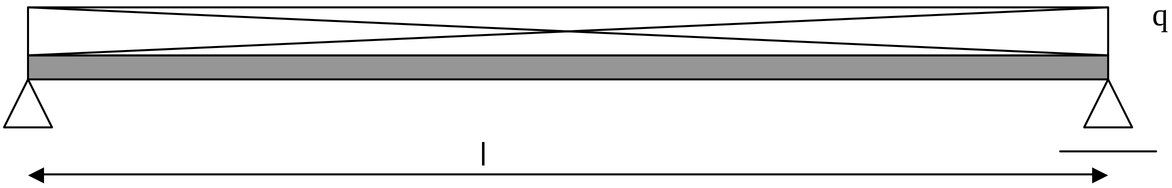
<u>Voor l = l</u>

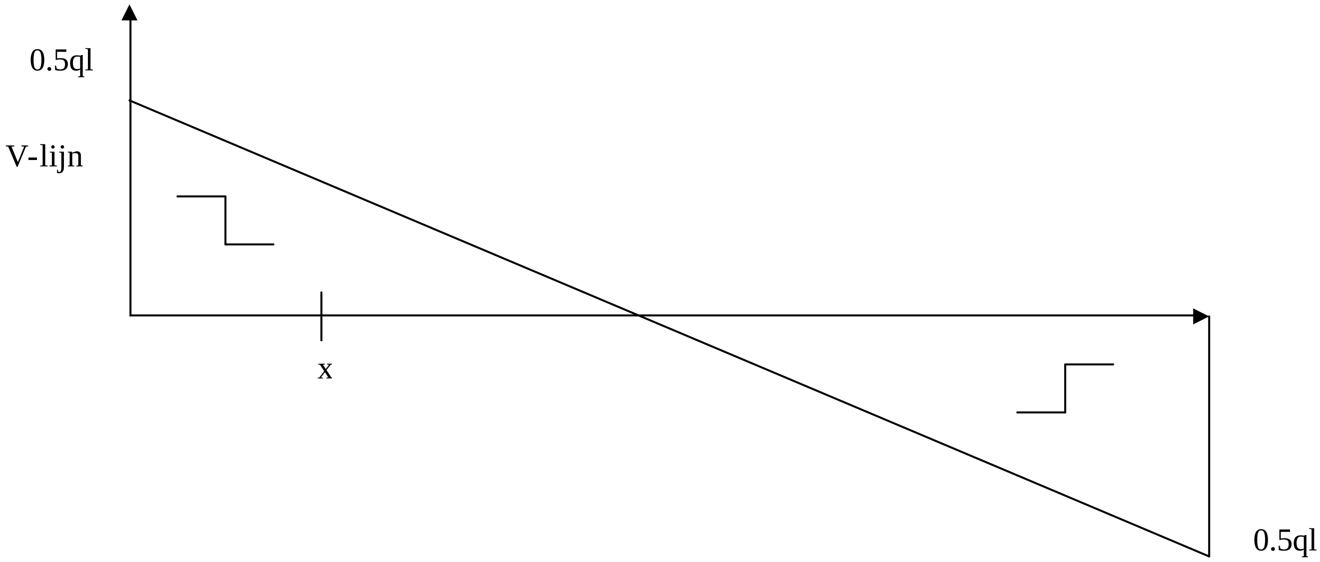
$$w_{max} = -\frac{1}{2}\frac{M * l^2}{EI}$$

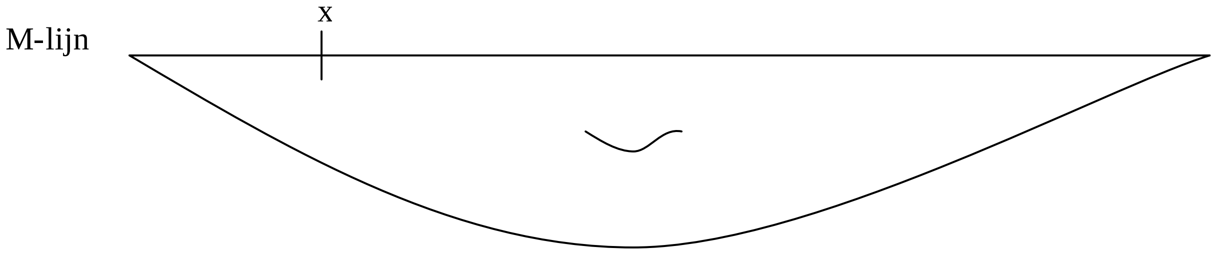
en

$$j_{max} = \frac{M * l}{EI}$$

<u>Voorbeeld#2 (Ligger op twee steunpunten met gelijkmatig verdeelde belasting)</u>







t.o.v. punt x

$$j(x) = \int \frac{M}{EI} dx = \int \frac{\frac{1}{2} * q * l * x - \frac{1}{2} q x^2}{EI} dx = \frac{\frac{1}{4} * ql * x^2 - \frac{1}{6} q x^3}{EI} + C$$

$$w(x) = -\int j\,dx \rightarrow w(x) = -\int \frac{\frac{1}{4} qlx^2 - \frac{1}{6} qx^3}{EI} + Cdx = -\frac{1}{12}\frac{qlx^3}{EI} + \frac{1}{24}\frac{qx^4}{EI} - Cx + D$$

Uit de randvoorwaarden weten we dat de zakking t.p.v. de opleggingen nul bedraagt.

De integratieconstante D bedraagt dan ook nul

<u>Voor:</u>

x=0 en w=0 → D=0

$$0 = -\frac{2}{24} * \frac{q * l * 0^3}{EI} + \frac{1}{24} * \frac{q * 0^4}{EI} - C * 0 + D \Rightarrow 0 = 0 + 0 + 0 + D \Rightarrow D = 0$$

<u>Voor:</u>

x= l en w=0 → C_1= →

$$0 = -\frac{2}{24} * \frac{q * l * l^3}{EI} + \frac{1}{24} * \frac{q * l^4}{EI} - C * l + 0$$

$$C_1 * l = -\frac{2}{24} * \frac{q * l * l^3}{EI} + \frac{1}{24} * \frac{q * l^4}{EI} + 0 \Rightarrow C_1 = \frac{-2ql^4 + ql^4}{l * 24 * EI} = \frac{-ql^3}{24EI}$$

Hiermee ligt de zakkingslijn w en de hoekverandering f vast

$$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{ql^3 x}{24EI}$$

$$j(x) = \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

De maximale zakking treedt op halverwege de overspanning, terwijl de grootste hoekverandering optreedt bij de opleggingen

<u>Voor x= ½ l, , zakking halverwege de overspanning</u>

$$w_{\max} = \frac{qx(x^3 + 2lx^2 + l^3)}{24EI} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}ql(\frac{1}{2}l^3 - 2l(\frac{1}{2}l)^2 + l^3)}{24EI} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}ql(\frac{1}{8}l^3 - \frac{4}{8}l^3 + l^3)}{24EI} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}ql * \frac{5}{8}l^3}{24EI} \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{16}ql^4}{24EI}$$

$$w_{\max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

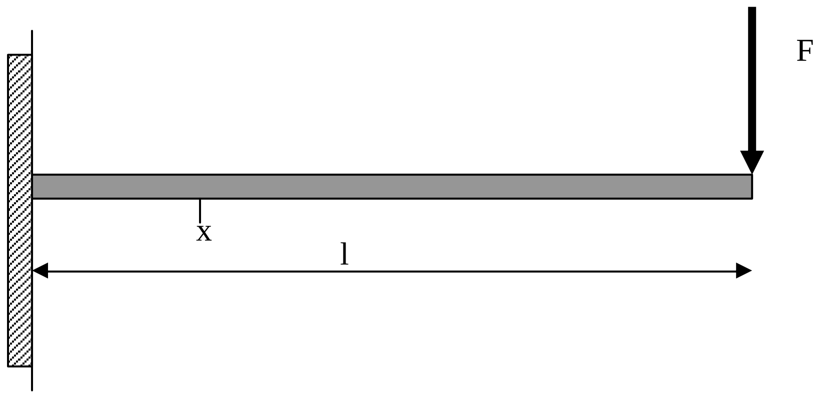
<u>Voor x = 0, hoekverandering t.p.v. de opleggingen</u>

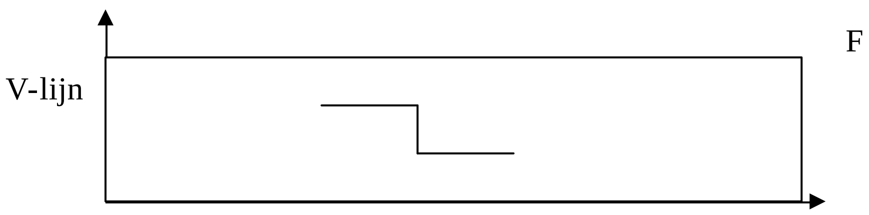
$$j(x) = \frac{6qlx^2 - 4qx^3 - ql^3)}{24EI} \Leftrightarrow \frac{q(6lx^2 - 4x^3 - l^3)}{24EI}$$

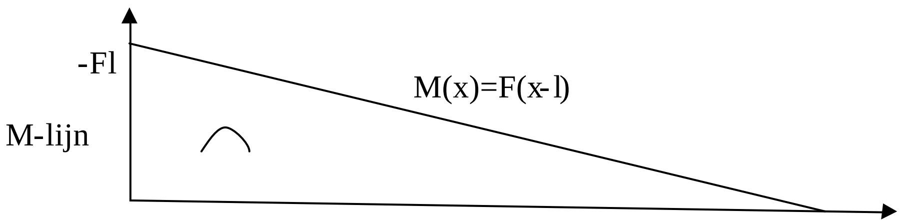
$$j(0) = \frac{q(6l0^2 - 40^3 - l^3)}{24EI} \Rightarrow \frac{q(0 - 0 - l^3}{24EI}$$

$$j_{\max} = \frac{ql^3}{24EI}$$

Voorbeeld#3, uitkragende ligger met puntlast op het uiteinde







t.o.v. punt x

$$j\,(x) = \int \frac{M}{EI} dx = \int \frac{F * x - F * l}{EI} dx = \frac{\frac{1}{2}Fx^2 - Flx}{EI} + C$$

$$w(x) = -\int j\,dx = -\int \frac{\frac{1}{2}Fx^2 - Flx}{EI} + Cdx = -\frac{\frac{1}{6}Fx^3 + \frac{1}{2}Flx^2}{EI} - Cx + D$$

Uit de randwaarden weten we dat t.p.v. de inklemming (x=0) de hoekverandering en de zakking nul zijn.

Dus zijn de integratieconstanten C en D ook nul

Hiermee liggen de zakkingslijn w(x) en de hoekverandering f (x) vast.

$$w(x) = \frac{Fx^2(3l - x)}{6EI}$$ **en** $$j\,(x) = \frac{Fx(x - 2l)}{2EI}$$

De grootste zakking en hoekverandering treden op aan het uiteinde (x=l)

$$w_{\max} = \frac{Fl^2(3l - l)}{6EI} \Leftrightarrow \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

En

$$j_{\max} = \frac{Fl(l-2l)}{2EI} \Leftrightarrow -\frac{Fl^2}{2EI}$$

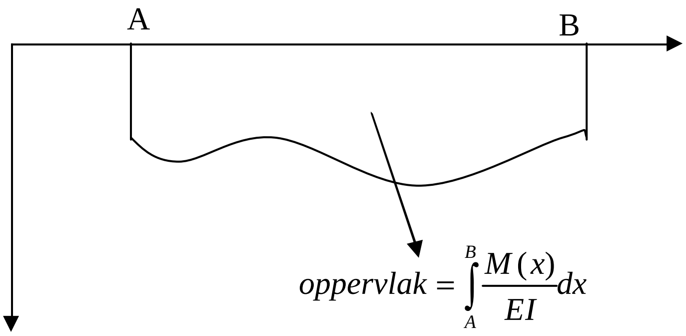
$$j_{\max} = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

Methode van het gereduceerde Momentenvlak

In het voorgaande zagen we dat voor de hoekverandering de M-lijn gedeeld dient te worden door de buigstijfheid.
Het resultaat wordt dan de gereduceerde momentenlijn genoemd.

$$j = \int \frac{M}{EI} dx$$

Eerste stelling van het gereduceerde momentenvlak



Indien we de hoekverandering bij punt B willen weten, moeten we bij de hoekverandering van punt A het oppervlak onder M/EI-lijn optellen

$$j_B = j_A + \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

Oftewel;

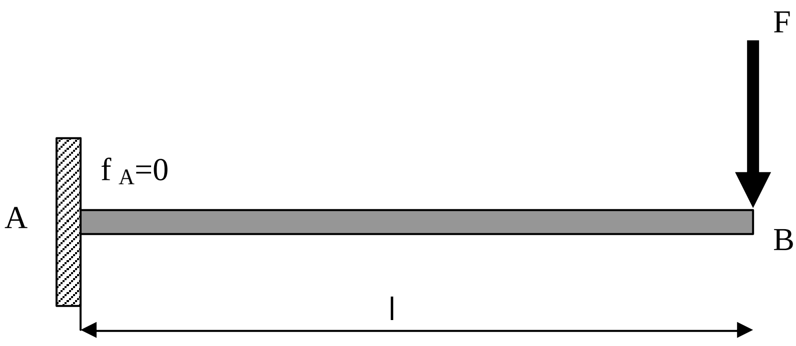
Eerste stelling v/h gereduceerde momentenvlak

$$j_B = \frac{oppervlak.v.d..M - lijn..tussen..A..en..B}{EI}$$

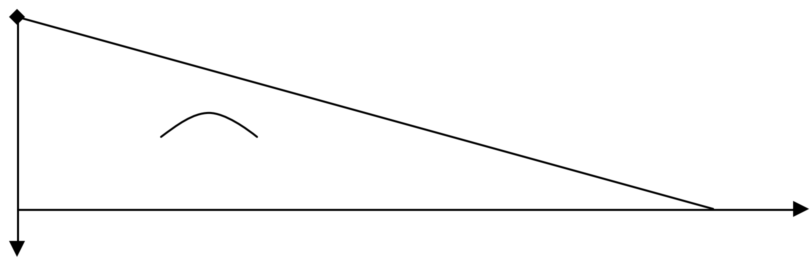
$f_A = 0$

Voorwaarden: De M-lijn voor de gehele constructie is bekend
Van één punt is de hoekverandering bekend.

Hoekverandering voor een puntlast op een uitkragende ligger



M/EI-lijn



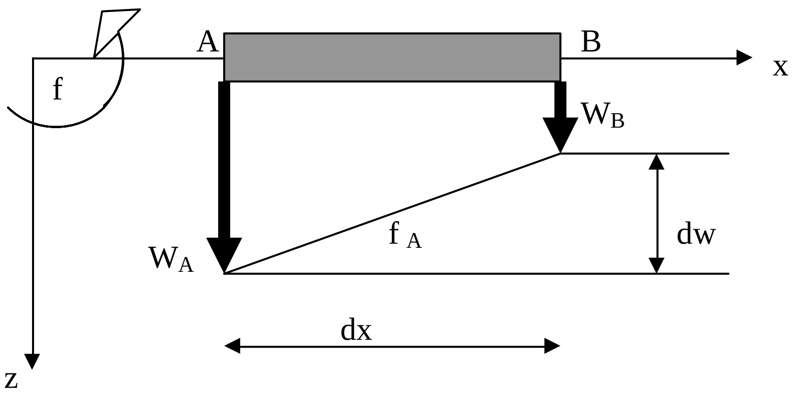
$$\frac{M_{\max}}{EI} = \frac{-Fl}{EI}$$

$$opperlvlakte = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

De hoekverandering in punt B is nu;

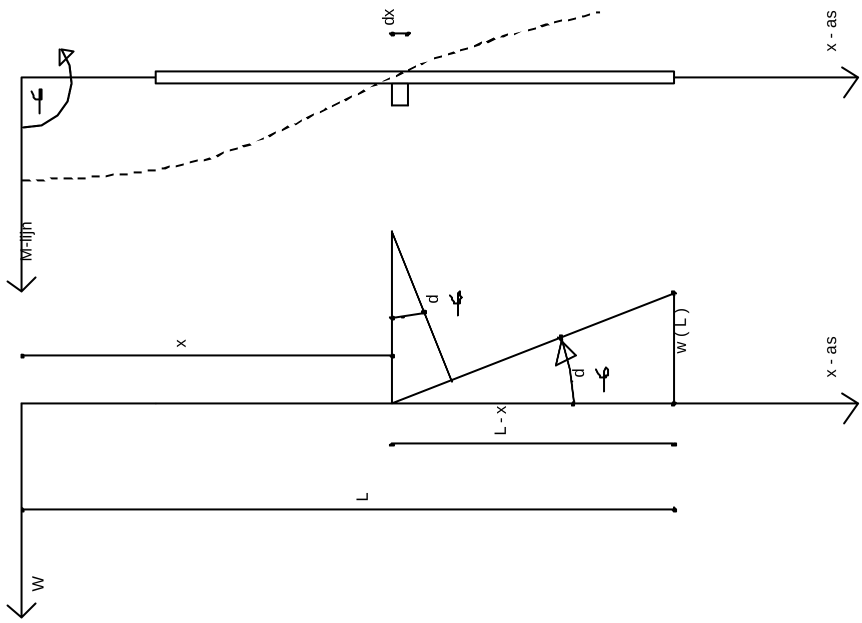
$$j_B = j_A + oppervlakte \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} \qquad \text{(in radialen)}$$

Zakking voor een uitkragende ligger



Uit bovenstaand figuur volgt dat bij een kleine hoekverandering de toename van de zakking Op een afstand dx vanaf punt A in punt B dw zal zijn.

$$w_B = w_A - j_A dx$$



De lengte waarover de bovenstaande ligger is gebogen is heel klein en wordt aangeduid als dx = (l-x). Het knikje heeft een hoekverandering df

De verplaatsing aan het eind van de ligger is nu:

$$dw = -dj(l - x)$$

We weten inmiddels dat de toename van de hoekverandering over een stukje van de balk gelijk is aan het oppervlak onder de gereduceerde momentenbalk over dat zelfde stukje balk.

$$d j = \frac{M}{EI} dx$$

De zakking ten gevolge van één knikje is nu:

$$dw = -\frac{M}{EI} dx * (l - x) \qquad \textit{(statisch moment)}$$

Bovenstaande is het moment dat werkt over een heel klein stukje van de ligger met lengte dx en dat het hele kleine knikje f veroorzaakt.

Indien over heel de ligger het moment werkt dan;

$$w(l) = -\int_{x=0}^{x=l} \frac{M}{EI} * (l - x) dx = -\frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=l} M(l - x) dx$$

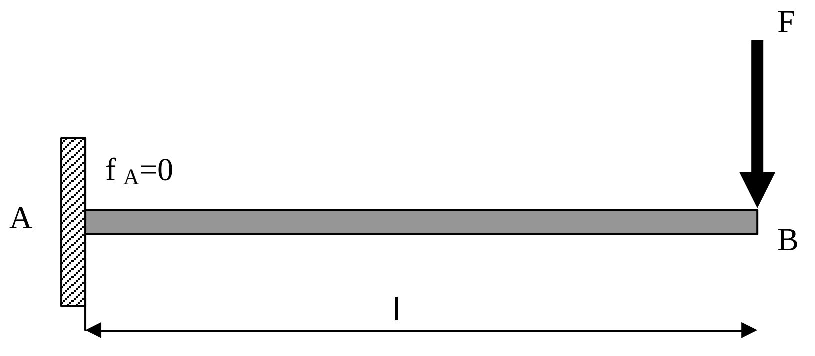
Oftewel

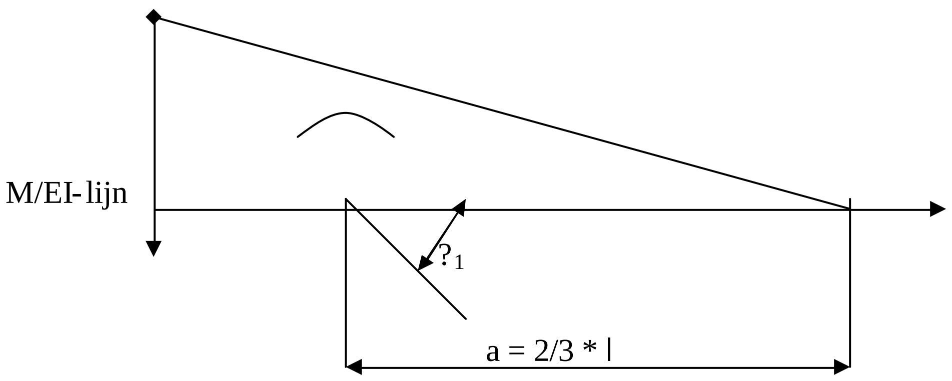
Tweede stelling v/h gereduceerde momentenvlak

$$w(l) = -\frac{statisch.moment.v/d.M - lijn.t.o.v..B}{EI}$$

f A=0 en ? A=0

<u>Zakking voor een puntlast op een uitkragende ligger</u>





$$\frac{M_{max}}{EI} = \frac{-Fl}{EI}$$

$$opperlvlakte = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

De hoekverandering in punt B is nu;

$$j_B = j_A + oppervlakte \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} = -\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$ (in radialen)

Belangrijk is dat de richting van het hoekje ?1 op de juiste manier wordt aangegeven.
Bij een positief moment werkt het hoekje als een knikje naar boven.
Bij een negatief moment (zoals hierboven0 werkt het hoekje als een knikje naar beneden.
Knikje naar beneden dan zakking positief
Knikje naar boven dan zakking negatief

Voor de zakking in punt B passen we nu de 2e stelling van het gereduceerd momentenvlak toe.

Knikje omlaag dus hoek negatief en zakking positief

$$j_B = -q_1 = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

$$w_B = \frac{\frac{1}{2}Fl^2 \frac{2}{3}l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$